

# Experimentalphysik III

Oliver Benson

## Literatur:

**Meschede:** *Gerthsen Physik*, Springer

**Bergmann-Schaefer:** *Experimentalphysik Band 3 (Optik) und Band 4 (Teilchen)*, de Gruyter

**Demtröder:** *Experimentalphysik Band 2 und Band 3*, Springer

**Tipler:** *Physik*, Spektrum

## vertiefend:

**Hecht:** *Optik*, Oldenburg

**Schwabl:** *Quantenmechanik*, Springer

**Cohen-Tannoudji:** *Quantum Mechanics*, de Gruyter

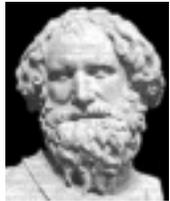
Abbildungen falls nicht anders angegeben aus Halliday „Physik“ (Wiley) und Gerthsen „Physik“ (Springer)

# 1. Teil Geometrische Optik

# 0. Kurze Einleitung

## Geschichtliches zur Geometrischen Optik

ab ca. **450 BC** (Antikes Griechenland): Demokrit, Aristoteles, Archimedes, Euklid –  
Beobachtungen zur Lichtspiegelung, Lichtausbreitung, Farben



Archimedes



Aristoteles

**965-1020:** Ibn-al-Haitham (Alhazan von Basra): Spiegel, Linsen, Linsenfehler, Sehhilfen

**1270:** Witelos Perspectiva: Parabolspiegel, Lichtbrechung

**1609/10:** Galilei – Konstruktion des Teleskops (nach Lippershey) und astronomische  
Beobachtungen

**1611:** Keplers Dioptrice – Prinzipien von Teleskop und Mikroskop



Galilei



Kepler

Nach den ersten Sehsteinen, d.h. geschliffenen Kugeln und Halbkugeln (2000 BC) schlug Alhazan Linsen als Sehhilfen vor. Die erste Darstellung einer Brille findet sich auf einem Fresko von **1352** (Tomaso di Modena)

1621: Snell – Brechungsgesetz für Dielektrika

1657: Fermat – Prinzip des „kürzesten Wegs“



Snell

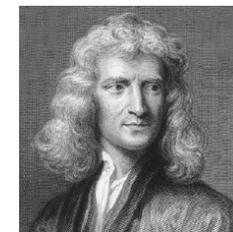
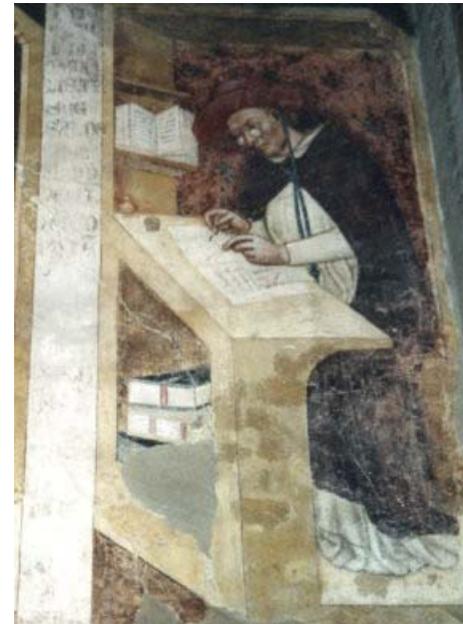


Fermat

1676: Römer – Messung der Lichtgeschwindigkeit

1678: Huygens - Elementarwellen

1704: Newtons Opticks – Korpuskulartheorie der Optik



Newton

## Kurze Wiederholung aus der Elektrodynamik

Licht ist eine elektromagnetische Welle. Elektromagnetische Wellen wurden durch Maxwell vorhergesagt (1865) und durch Hertz zuerst nachgewiesen (1880).

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} &= 0 & \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 & \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} \end{aligned}$$

Maxwell-Gleichungen  
(quellfrei, im homogenen,  
isotropen Medium)

mit  $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}$      $\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$

Aus den Maxwell-Gleichungen lässt sich sehr leicht durch Einsetzen eine Wellengleichung ableiten, z.B. für das elektrische Feld:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} = 0$$

Wellengleichung für das elektrische Feld

Dabei ist:  $c = 1 / \sqrt{\mu \mu_0 \epsilon \epsilon_0}$      $c_0 = 1 / \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$

Eine Lösung der Wellengleichung ist **die ebene Welle**.

$$\vec{E}(r, t) = E_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$$

Amplitude      Phase

Wichtige Größen der elektromagnetischen Welle:

$$c_0 = 1 / \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \quad \text{Phasengeschwindigkeit (Vakuumlichtgeschwindigkeit)}$$

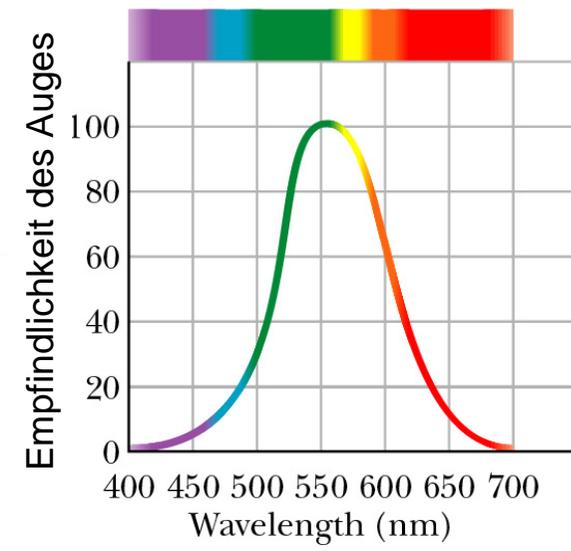
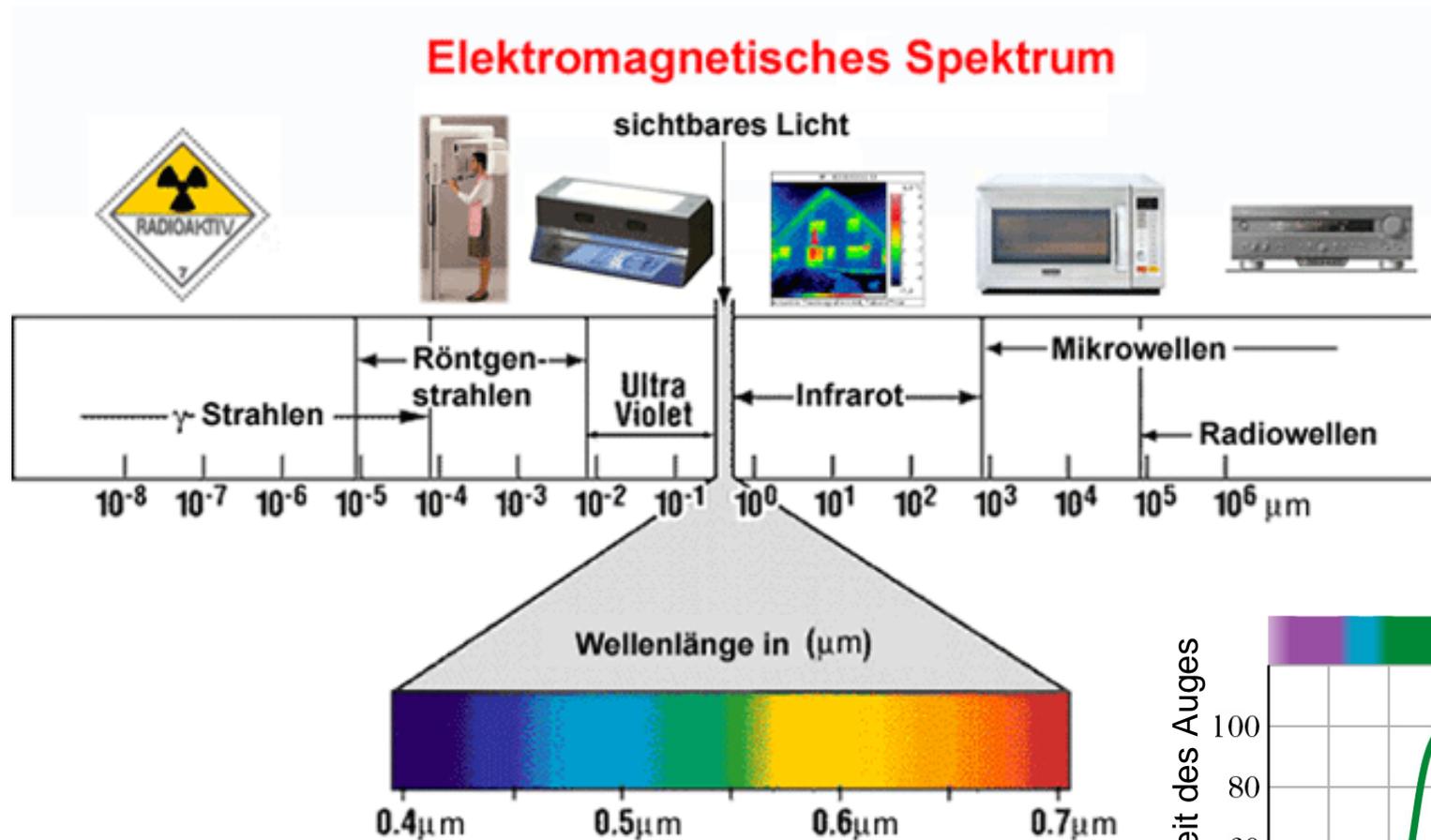
$$c_0 = 2,9899 \times 10^8 \text{ m/s}$$

$$|\vec{k}| = k = 2\pi / \lambda \quad \text{Wellenvektor}$$

$$\omega = 2\pi\nu \quad \text{Kreisfrequenz}$$

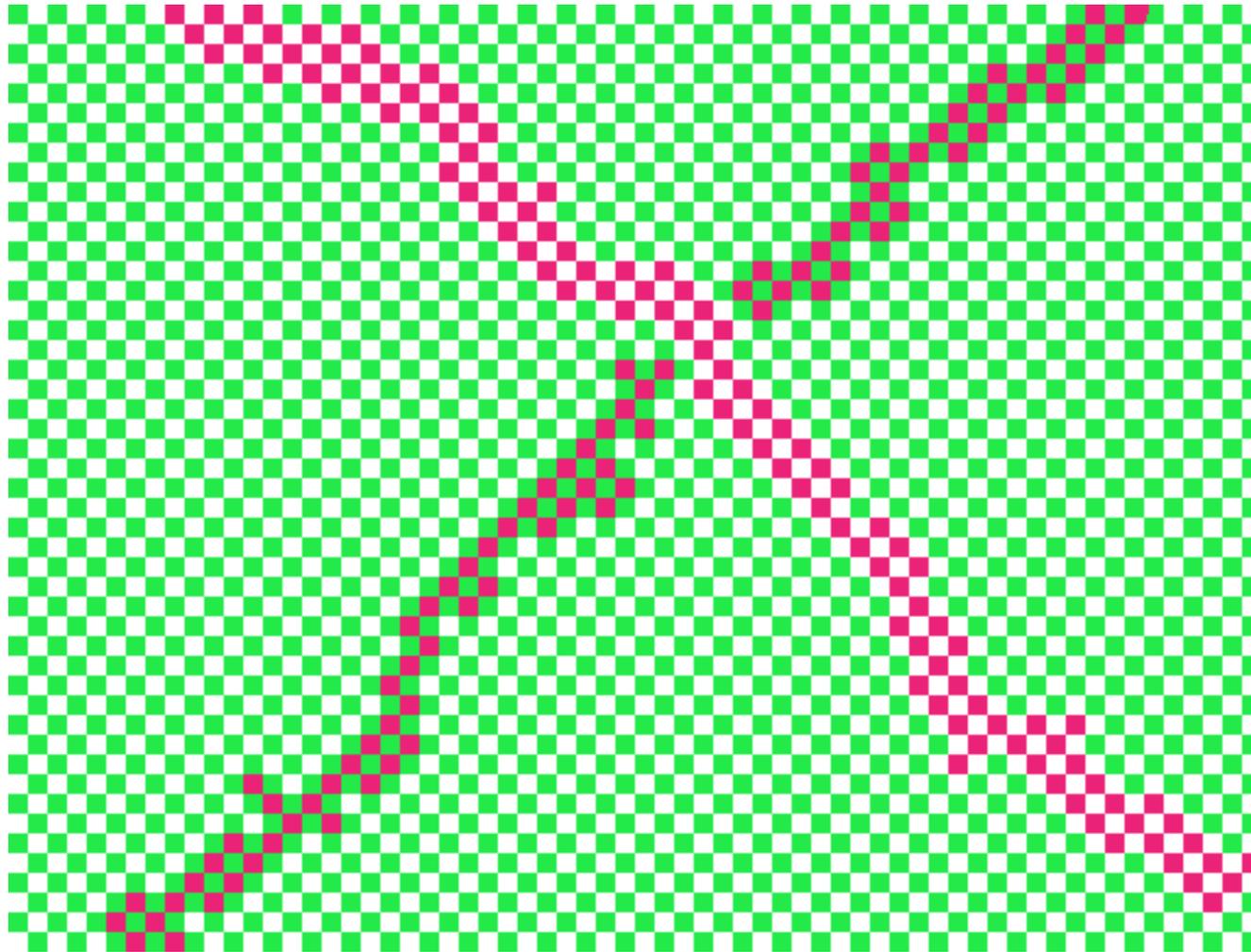
$$c = \omega / k \quad \text{Dispersionsrelation}$$

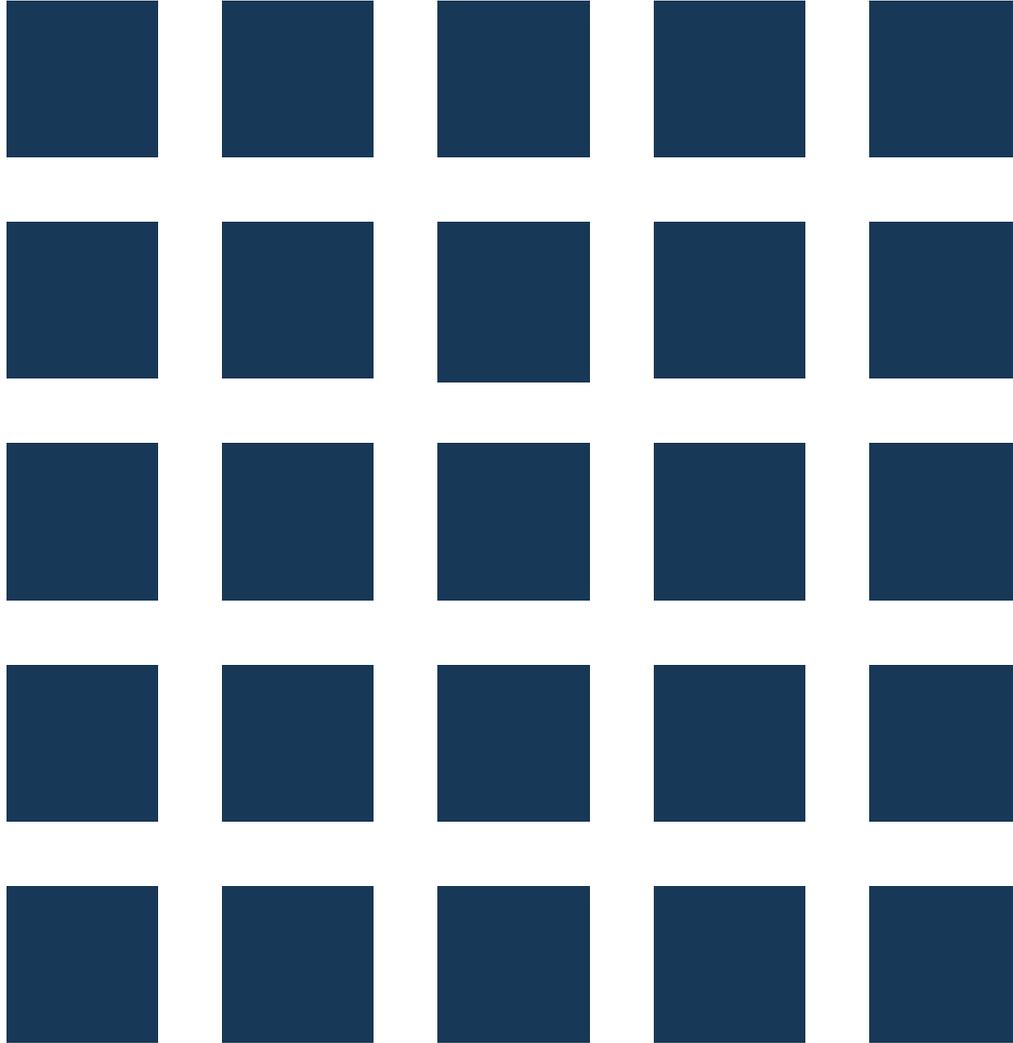
# Das elektromagnetische Spektrum

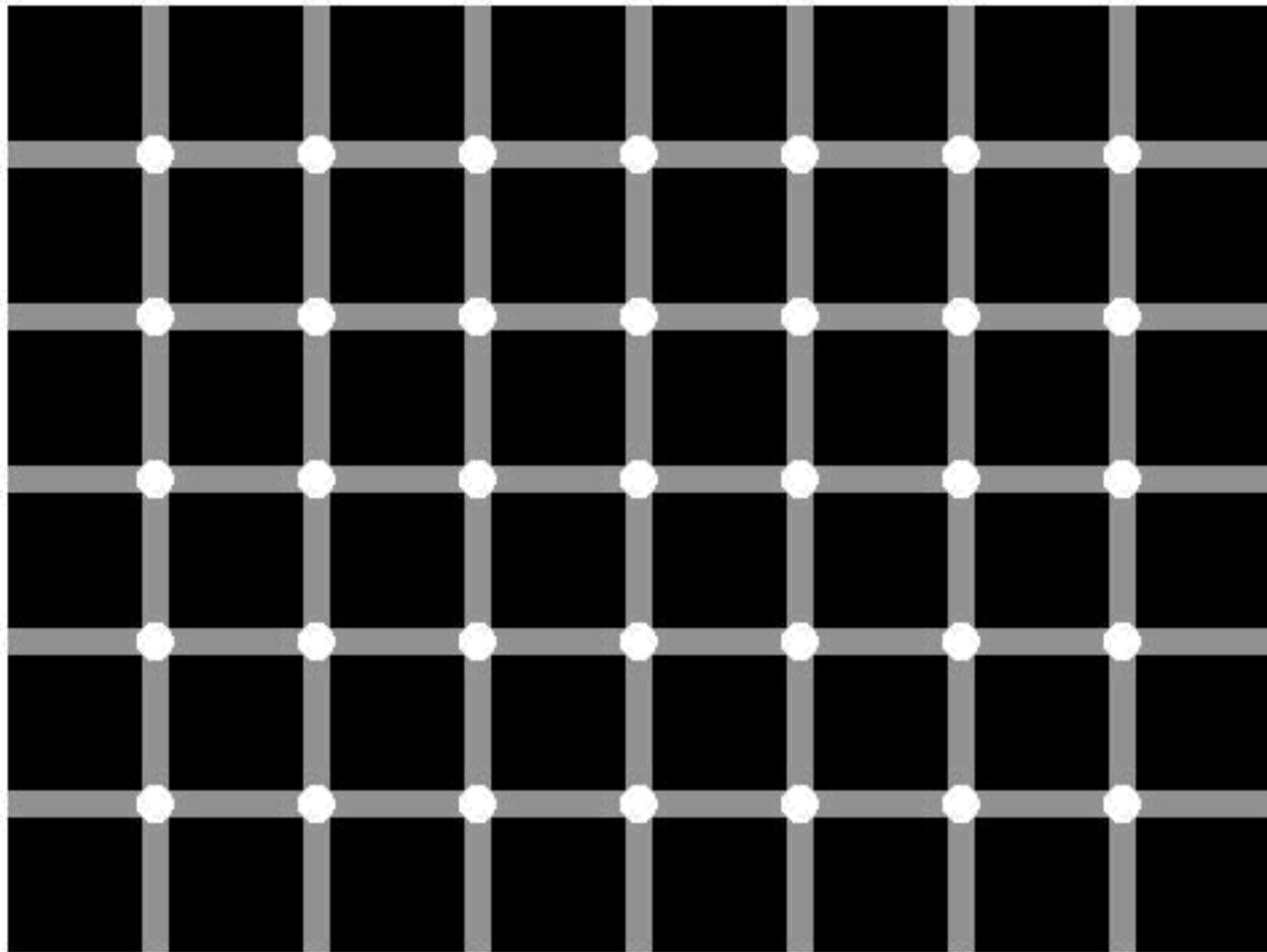


## Optische Täuschungen

Das Auge (genauer das Gehirn) lässt sich leicht überlisten:





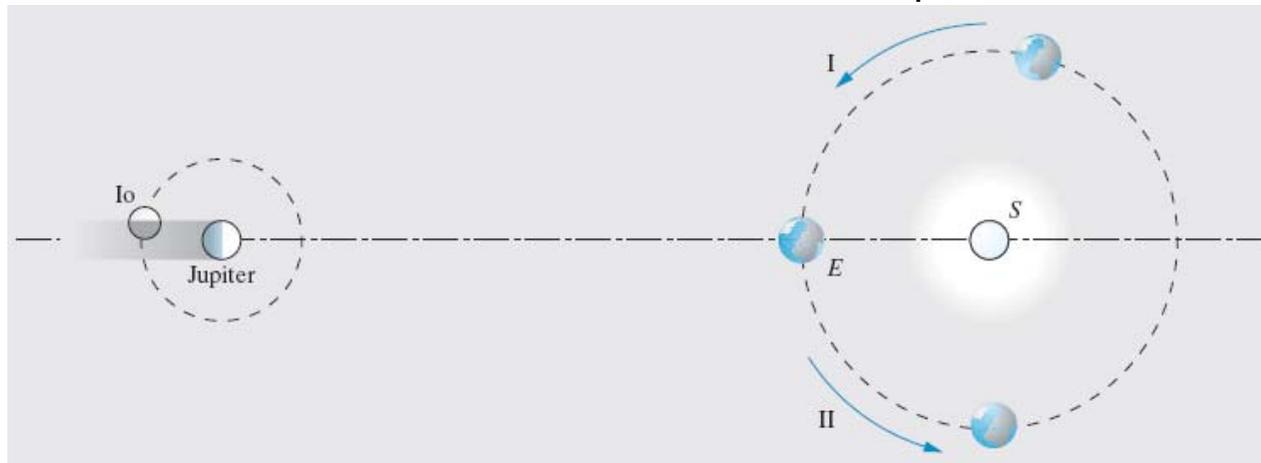


# Messung der Lichtgeschwindigkeit

## Astronomische Messungen

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Licht im Vakuum wurde 1676 von Römer durch eine astronomische Beobachtung bestimmt.

Als eine natürliche Uhr diente der Umlauf der Jupitermonde: 1 Umlauf = 171.99 h (Ganymed)

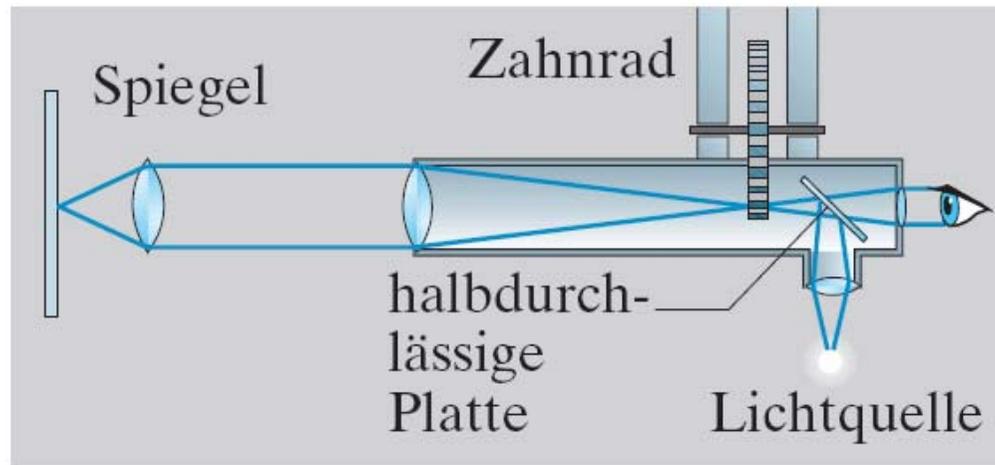


Römer beobachtete die 25. Wiederkehr des Ganymed. Da die Erde zu diesem Zeitpunkt um ihren Bahndurchmesser weiter von Jupiter entfernt war, traf dies Ereignis später ein:

$$c = \underbrace{3 \times 10^8 \text{ km}}_{\text{Bahndurchmesser}} / \underbrace{1000 \text{ s}}_{\text{Zeitverzögerung}} = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

## Labormessungen

Fizeau verwendete das zweimalige Durchlaufen des Lichtstrahls durch ein Zahnrad.



Zeit des Weiterrückens von einer Lücke im Zahnrad mit  $N$  Zähnen zur nächsten:

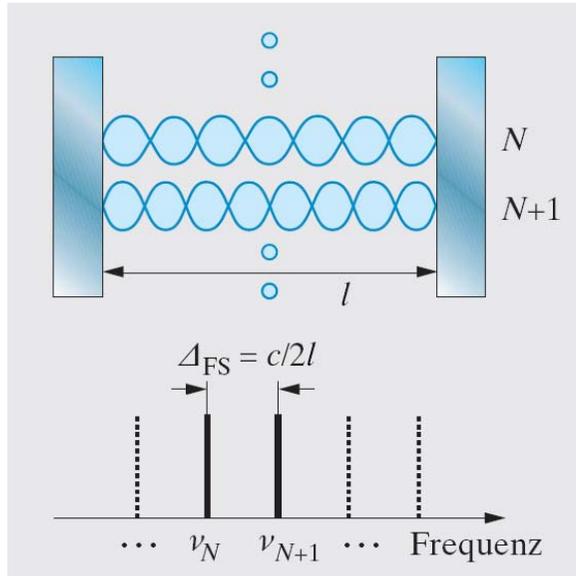
$$T = 1/(\nu N)$$

Umlauffrequenz

$T$  muss der Zeit für das zweimalige Durchlaufen der Strecke  $s$  zum Spiegel entsprechen:

$$T = 2s/c \Rightarrow c = 2s\nu N$$

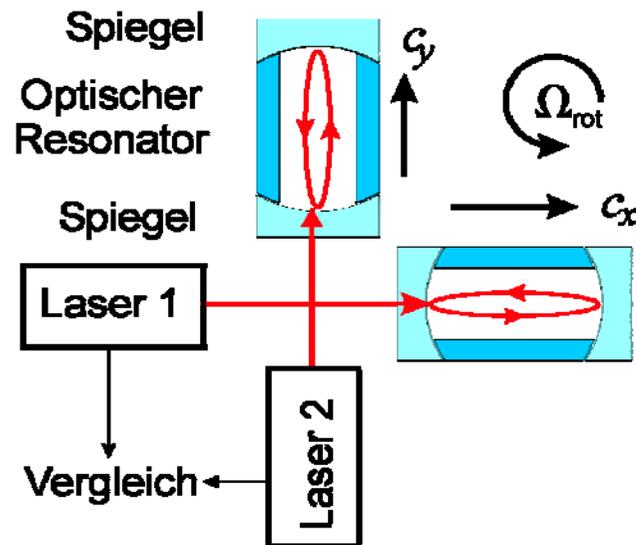
Moderne Methoden verwenden optische Resonatoren, um mögliche Veränderungen der Lichtgeschwindigkeit mit höchster Präzision zu messen.



Der Abstand zweier Resonanzen, der sogenannte **freie Spektralbereich** (FSR), ergibt sich für den abgebildeten **Fabry-Perot-Resonator** zu:

$$FSR = c/(2L)$$

Aktuelle Messungen der möglichen Anisotropie der Lichtgeschwindigkeit werden in modernen Versionen des Michelson-Morley-Experimentes (1887) gemessen.

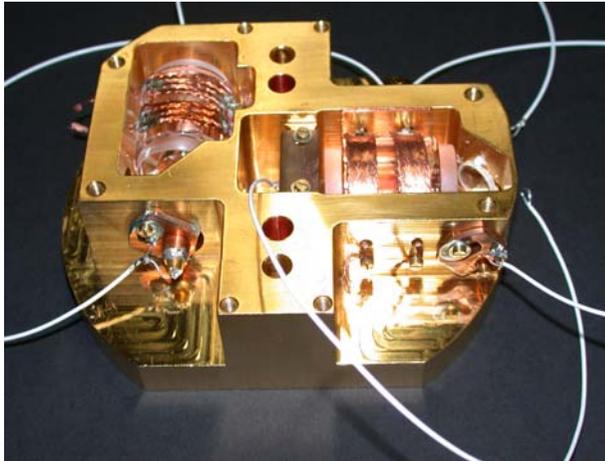


Folgende Bilder der AG Peters, HU-Berlin, zeigen: (a) verschiedene, hochgenaue Resonatoren, (b) senkrechte Anordnung der Resonatoren im exp. Aufbau, (c) Rotation der Apparatur.

a)



b)



c)



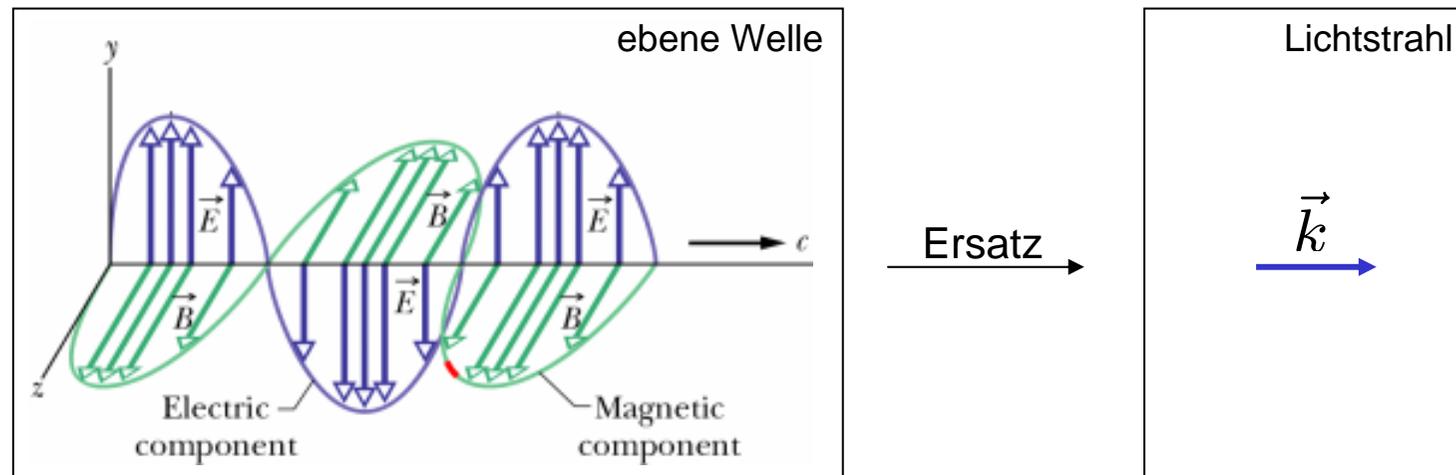
# 1. Grundprinzipien der Geometrischen Optik

## 1.1. Definition

Im Prinzip könnte man alle optischen Probleme direkt durch Lösen der Maxwell-Gleichungen mit bestimmten **Randbedingungen** finden.

Dies ist in der Praxis jedoch unmöglich, und es müssen **Näherungen** gefunden werden. Eine Näherung ist die Geometrische Optik.

Die Geometrische Optik ist ein sehr starke Vereinfachung. Sie beschreibt die Lichtausbreitung allein durch transversal begrenzte ebene Wellen, sogenannte **Lichtstrahlen**.



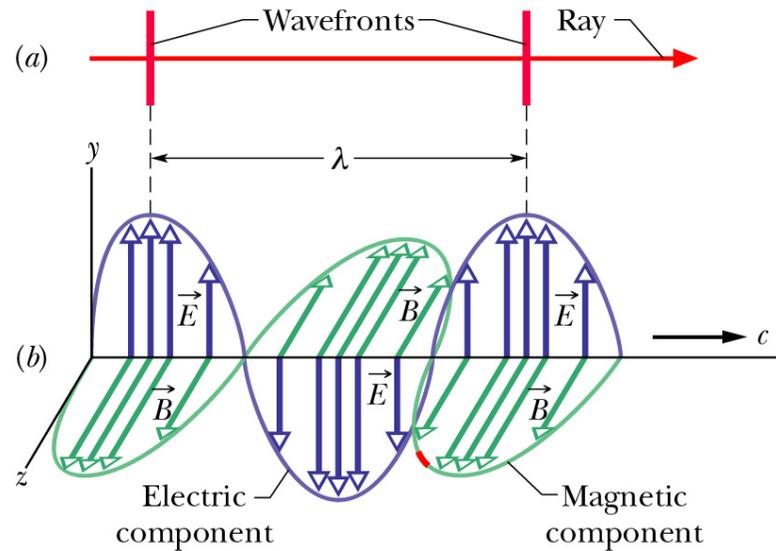
Die Näherung ist akzeptabel für:  $\lambda = \frac{2\pi}{k} \ll d$  Faustregel:  $500 \text{ nm} \Rightarrow d \geq 10 \mu\text{m}$

Ansonsten treten Beugungseffekte auf, die später behandelt werden.

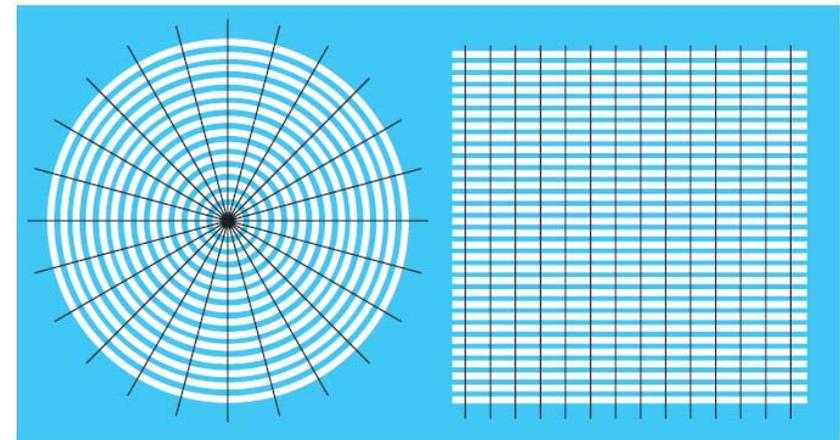
Die Geometrische Optik beschreibt optische Phänomene durch Lichtstrahlen, die eine durch den Wellenvektor  $k$  festgelegte Ausbreitungsrichtung haben.

Die Lichtstrahlen verlaufen senkrecht zu den **Wellenfronten**.

Wellenfronten sind **Orte gleicher Phase**.

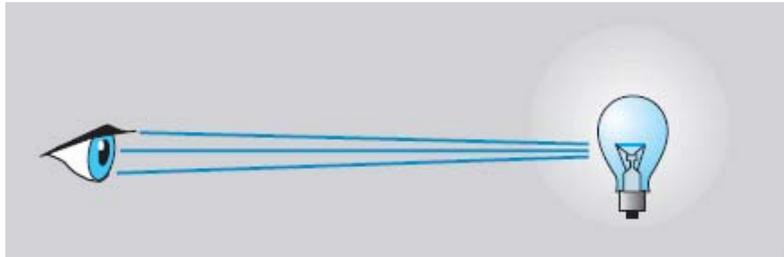


Verdeutlichung der Wellenfronten

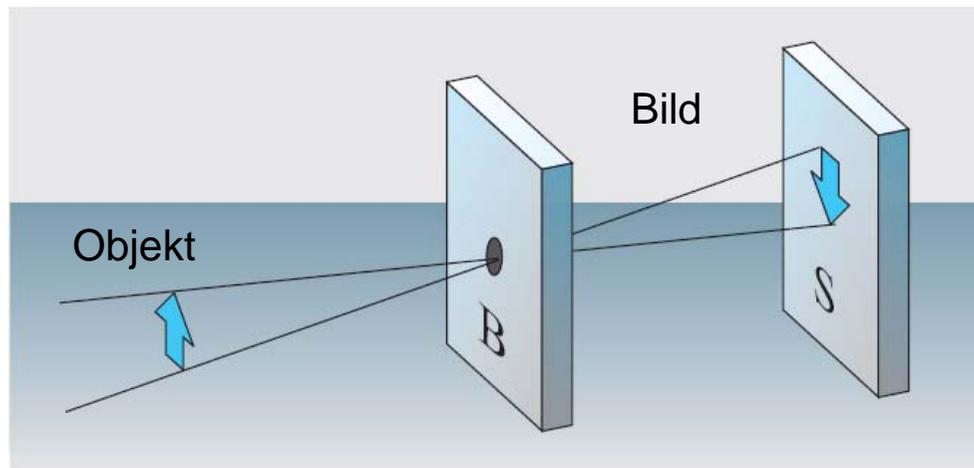


Wellenfronten (weiss) und Strahlen (schwarz) für eine Kugelwelle und eine ebene Welle

Die Vorstellung der Antike war, dass das Auge Strahlen aussendet, mit denen es Gegenstände abtastet. Tatsächlich ist es umgekehrt. Das Gehirn interpretiert die Signale des Auges so, dass es annimmt, die Gegenstände befänden sich am Ursprungsort der Strahlen.



Ein einfaches strahlenoptisches Instrument ist die Lochkamera:



Prinzip der **Lochkamera**

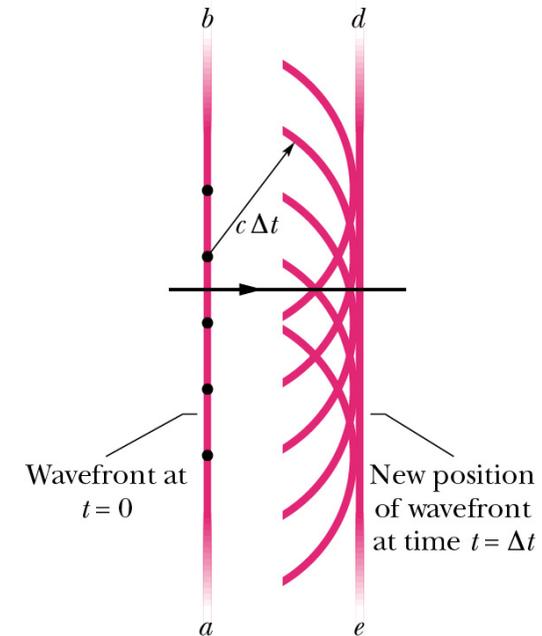
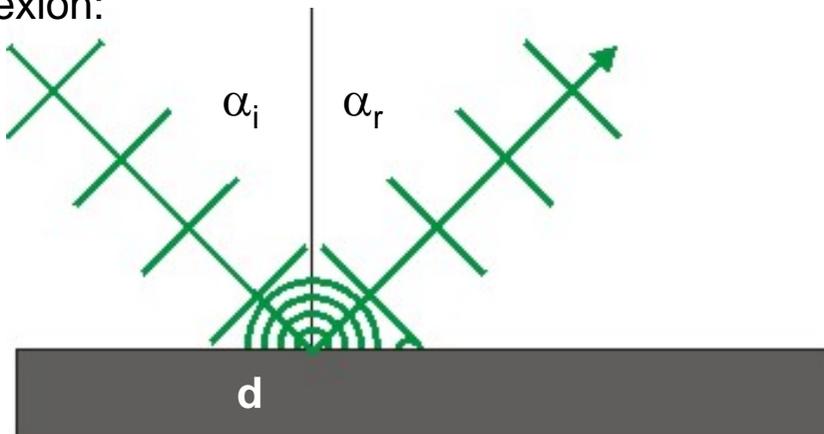
Ein ausreichend kleines Loch bedingt, dass jeder Punkt des Objektes auf genau einen Bildpunkt abgebildet wird.

## 1.2. Das Brechungsgesetz

### Huygensches Prinzip

Jeder Punkt einer Wellenfront ist Ausgangspunkt einer sphärischen Elementarwelle.

Reflexion:



während  $\Delta t = \sin \alpha_i d / c_i$  ist die neue Wellenfront um  $c_r \Delta t$  vorangekommen.

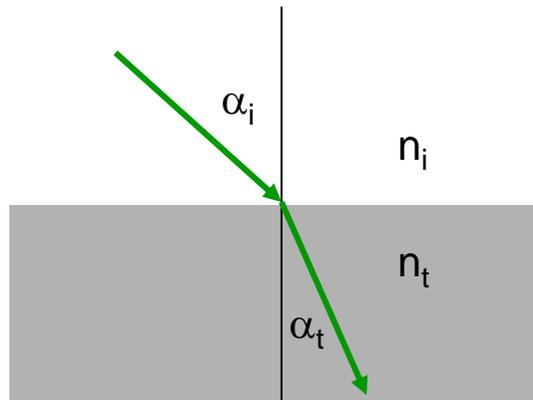
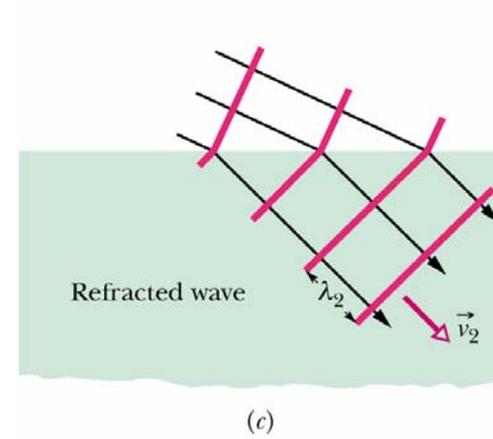
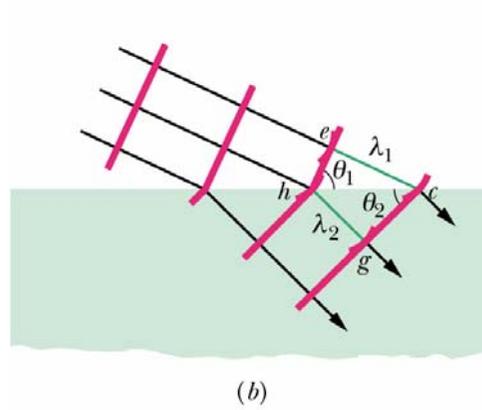
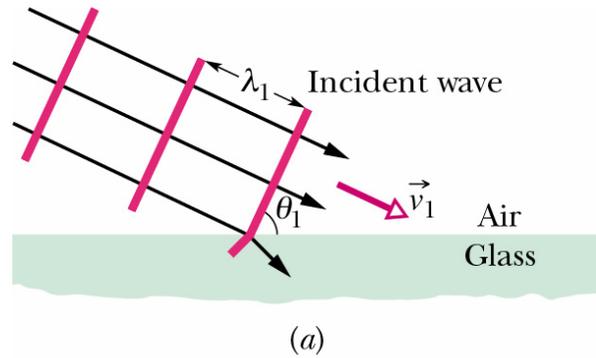
somit  $\sin \alpha_r = c_r \Delta t / d = c_r / c_i \sin \alpha_i$

da  $c_r = c_i$  folgt

$$\alpha_r = \alpha_i$$

Reflexionsgesetz

Ganz ähnlich folgt bei der Transmission:



$$\frac{\sin \alpha_t}{\sin \alpha_i} = \frac{c_t}{c_i} = \frac{n_i}{n_t}$$

Snellsches Brechungsgesetz

$$n_i = \sqrt{\mu_i \epsilon_i} = \sqrt{\epsilon_i}$$

Brechungsindex

meistens

## Fermatsches Prinzip

Ein Lichtstrahl verläuft so, dass seine **optische Weglänge** (OWL) ein Extremum ist.

$$OWL = \int_{\gamma} n(\vec{r}) d\vec{r} \stackrel{\text{falls } n \text{ ortsunabhängig}}{=} nL$$

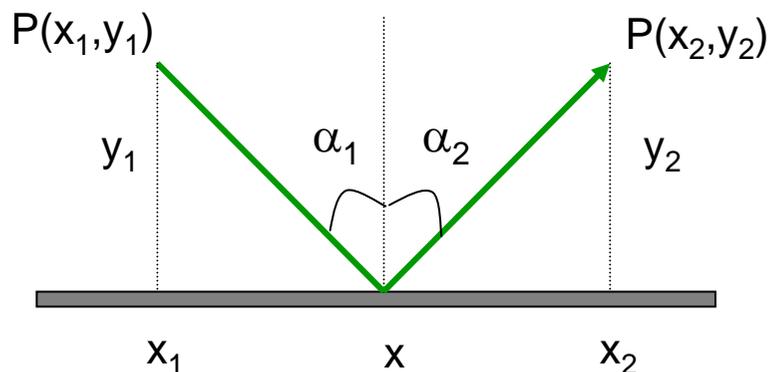
Fermatsches Prinzip als Variationsprinzip:

$$\delta \int_{\gamma} n(s) ds = 0$$

Variation vom Weg  $\gamma$

Lagrange-Hamilton-Formalismus

Mechanik & Quantenmechanik



$$OWL = \sqrt{(x - x_1)^2 + y_1^2} + \sqrt{(x_2 - x)^2 + y_2^2}$$

$$\frac{\partial OWL}{\partial x} = \frac{(x - x_1)}{\sqrt{(x - x_1)^2 + y_1^2}} - \frac{(x_2 - x)}{\sqrt{(x_2 - x)^2 + y_2^2}} = 0$$

$$\underbrace{\sin \alpha_1} - \underbrace{\sin \alpha_2} = 0$$

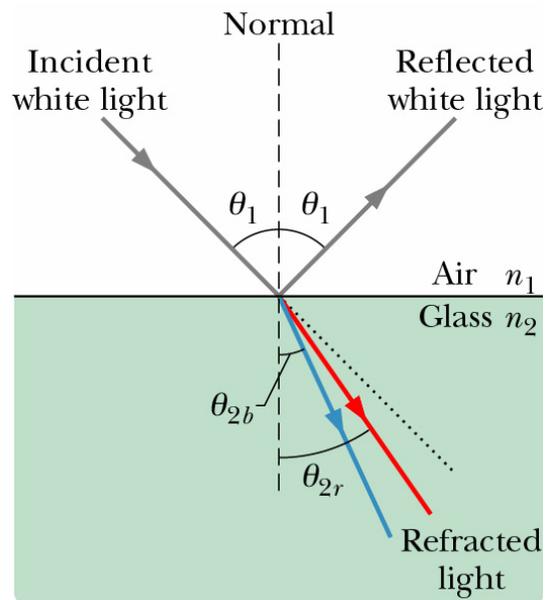
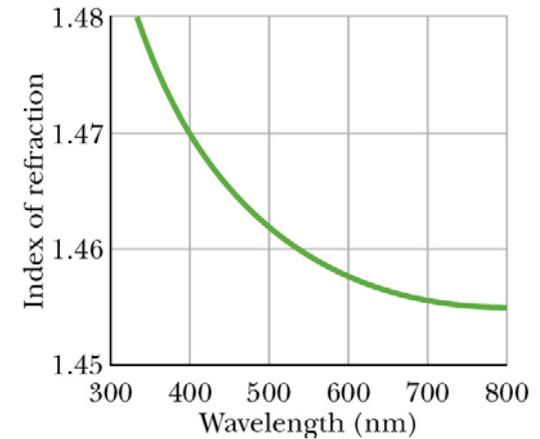
Ähnlich kann das Snellsche Gesetz abgeleitet werden.

## Dispersion

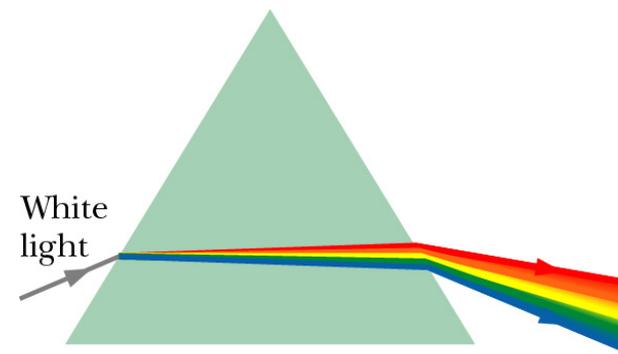
Der Brechungsindex  $n$  ist eine Funktion der Wellenlänge.

$$n = n(\lambda) \quad \text{Dispersion}$$

In Glas nimmt  $n$  mit abnehmender Wellenlänge zu, d.h. blaues Licht wird stärker gebrochen als rotes.



Dispersion bei Brechung an Grenzfläche



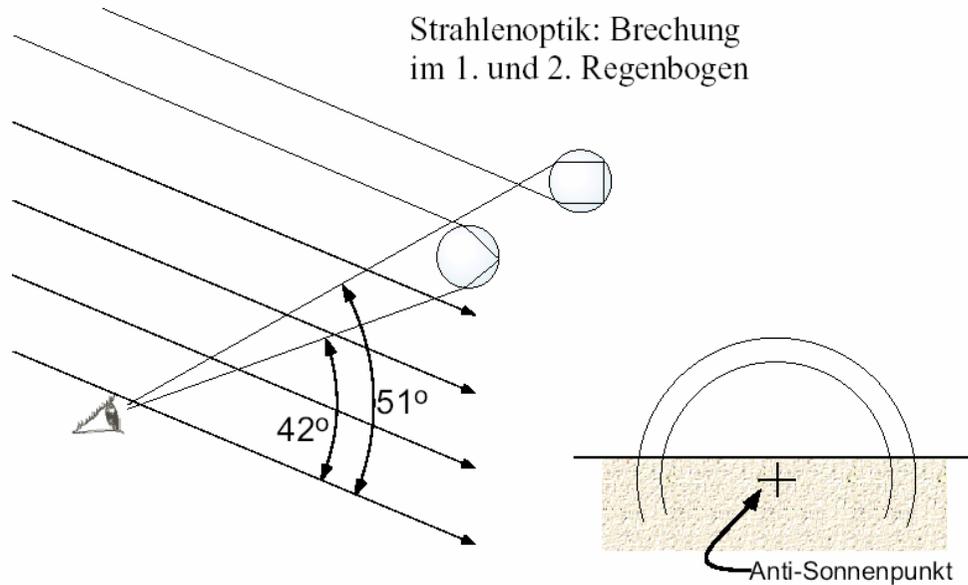
(b)

Dispersion in einem Prisma (Newton 1672)

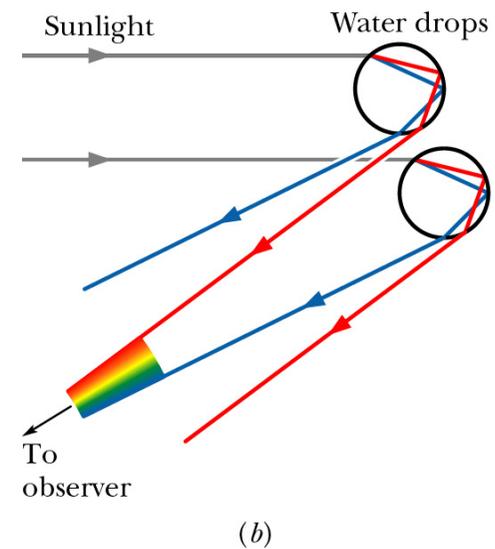
Ein bekanntes Phänomen der Lichtbrechung und Dispersion ist der Regenbogen.

Der primäre (sekundäre) Regenbogen entspricht der einfachen (zweifachen) Reflexion an der Wasser-Luft Grenzfläche.

Dispersion führt zu einer Aufspaltung des weißen Lichts in Spektralfarben.



Charakteristischer Winkel des primären  
(sekundären) Regenbogens



Farbzerlegung durch Brechung  
In Wassertropfchen.



Photos taken by Dan Bush of Albany, Missouri



Photos taken by Dan Bush of Albany, Missouri

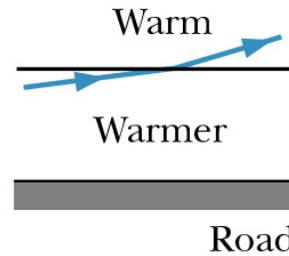
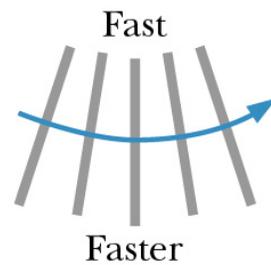
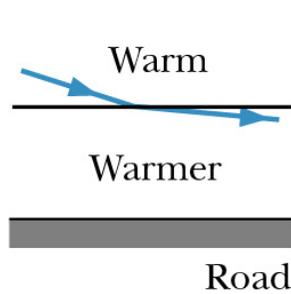
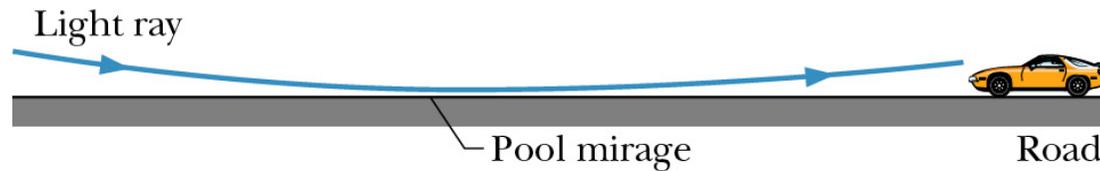
Der Brechungsindex kann von weiteren Parametern abhängen:

$$n = n(\lambda, \vec{r}, \hat{r}, \hat{\sigma}, I, T, \dots)$$

Wellenlänge
Richtung
Intensität

Ort
Polarisation
Temperatur

Eine durch Temperaturschwankungen räumliche Abhängigkeit führt z.B. zu Spiegelungseffekten oder der Fata Morgana.



## Totalreflexion

Ein spezieller Fall kann beim Lichteinfall von einem optisch dichteren Medium (mit Brechungsindex  $n_i$ ) in ein Medium mit  $n_t < n_i$  eintreten.

Da  $\sin \alpha_t \leq 1$  erfolgt für den Fall  $\sin \alpha_i > n_t/n_i$  keine Transmission.

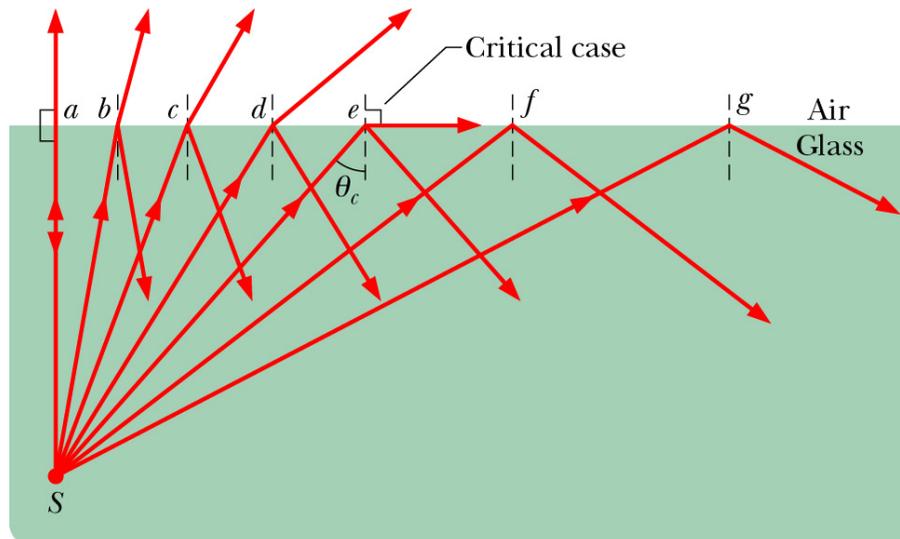
Die einfallende Welle wird vollständig reflektiert, man spricht von **Totalreflexion**.

Für den kritischen Winkel der Totalreflexion gilt:

$$\sin \theta_c = n_t/n_i$$

$$\sin \theta_c = n^{-1}$$

Für den Einfall in Luft ( $n=1$ )

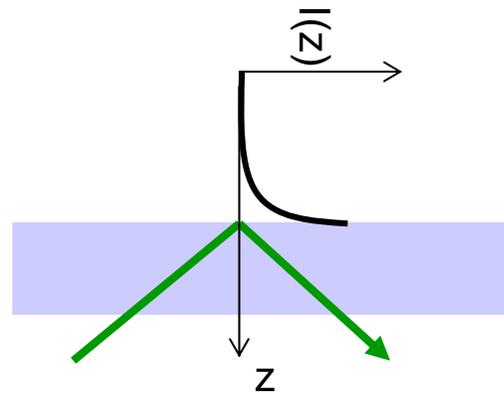


Transmission/Reflexion von Licht aus einer Punktquelle am optisch dichteren Medium.

Für normales Glas mit  $n=1,4$  bis  $1,5$  ist  $\theta_c=42^\circ$ .

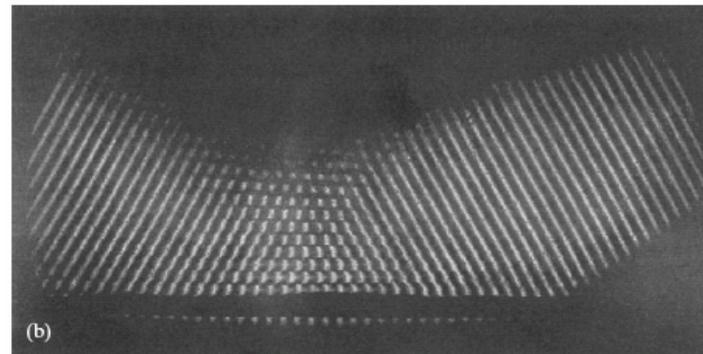
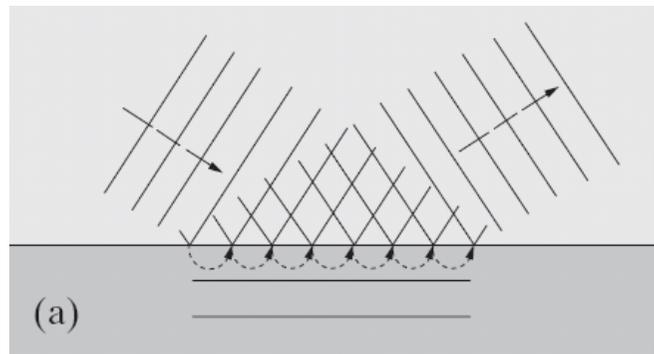
Die Intensität der einlaufenden Welle springt bei Totalreflexion an der Grenzfläche nicht un stetig auf 0, sondern nimmt exponentiell ab.

Der  $k$ -Vektor ist komplex. Man spricht von einem **evaneszenten Feld**.



Intensitätsverlauf (links) und Form (unten) einer evaneszenten Welle.

$$\vec{E}(r, t) = E_0 e^{-k_z z} e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)}$$

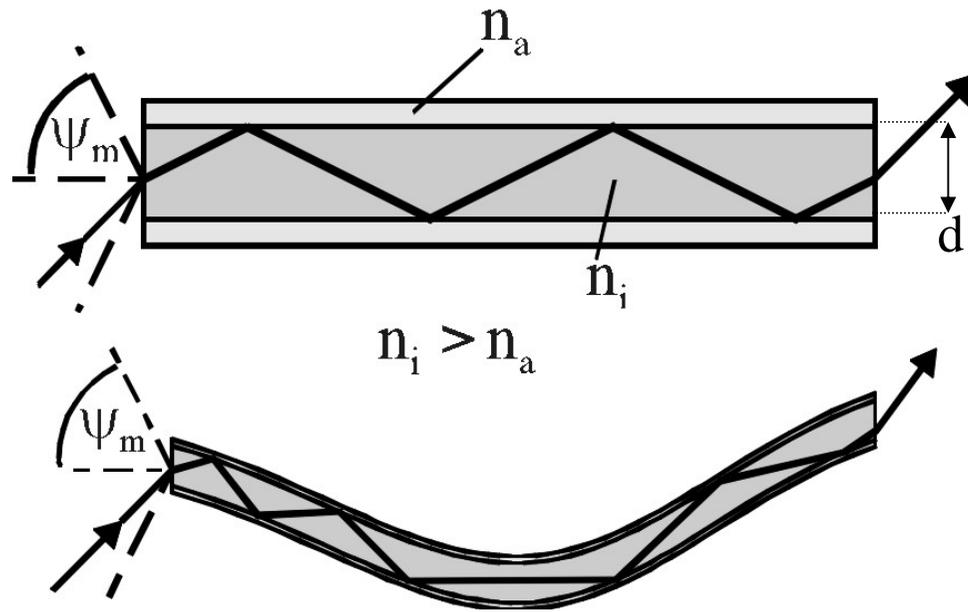


Experiment mit Mikrowellen: Evaneszentes Eindringen der Welle in das optisch dünnere Medium. Der Spiegelpunkt des Strahls liegt hinter (!) der Grenzfläche (Goos-Hänchen-Effekt).

### 1.3. Lichtleitung in Optischen Fasern

#### Prinzip

Die Totalreflexion wird auch in **optischen Fasern** zur Lichtleitung benutzt. Die Fasern besitzen einen Kern aus einem optisch dichteren Material, in dem das Licht geführt wird.



Ein strahlenoptisches Bild für die Lichtleitung ist nur anwendbar, falls:  $d \gg \lambda$

Dabei handelt es sich dann um **Multi-Mode-Fasern** (im Gegensatz zu **Single-Mode-Fasern**).

Glasfasern einzusetzen erschien wegen der hohen Dämpfung in normalem Glas zunächst als wenig aussichtsreich. 1 m Fensterglas ist optisch fast dicht.

Kommerzielle Fasern besitzen eine Dämpfung von  $< 0,2 \text{ dB/km} \approx 4\%/km$

$$dB = 10 \log(P_0/P)$$

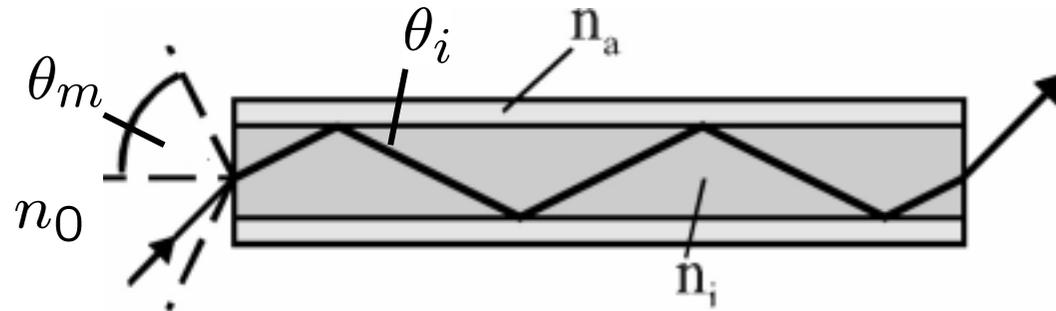
↑  
↑  
einfallende bzw. transmittierte Leistung

#### Dämpfung verschiedener „transparenter“ Stoffe

| Medium                | Dämpfung in dB/Km | Eindringtiefe bei 30 dB in m |
|-----------------------|-------------------|------------------------------|
| Fensterglas           |                   |                              |
| optisches Glas        |                   |                              |
| dichter Nebel         |                   |                              |
| Luft über Stadtgebiet |                   |                              |
| Lichtleiter           |                   |                              |
| Einmodenfasern        |                   |                              |

## Numerische Apertur

Ein wichtiger Parameter für eine optische Faser ist ihr maximaler Akzeptanzwinkel



$(90^\circ - \theta_i)$  muss grösser als  $\theta_c$  für die Totalreflexion sein!

$$\sin(90^\circ - \theta_i) = \frac{n_a}{n_i} = \cos \theta_i = (1 - \sin^2 \theta_i)^{1/2}$$

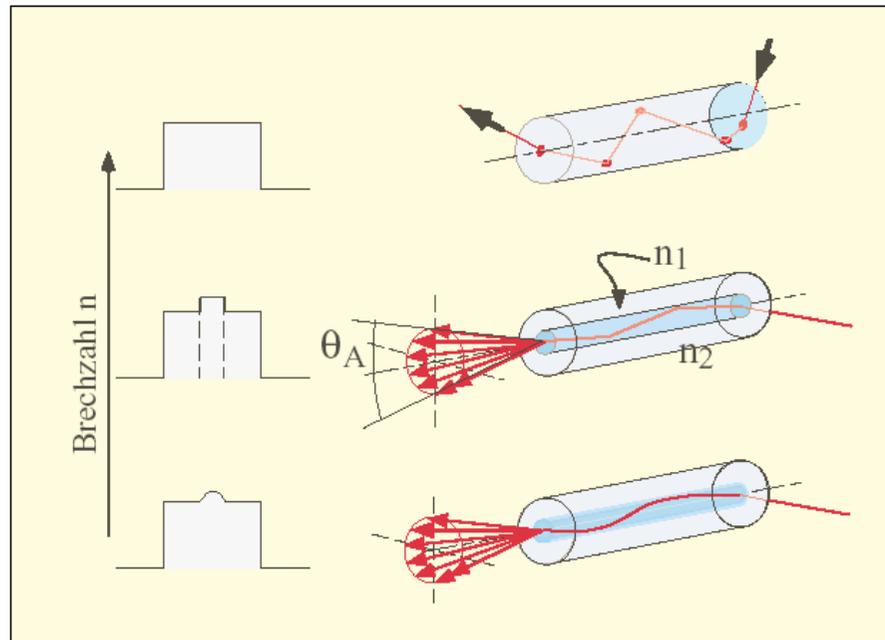
Mit dem Snellschen Gesetz folgt dann:

$$\sin \theta_m = \frac{1}{n_0} (n_i^2 - n_a^2)^{1/2}$$

$$n_0 \sin \theta_m = NA = \sqrt{n_i^2 - n_a^2}$$

**Numerische Apertur (NA) der Faser**

Manche Fasern haben keinen Indexsprung (**step index fiber**), sondern ein Indexprofil (**graded index fiber** oder **GRIN fiber**).

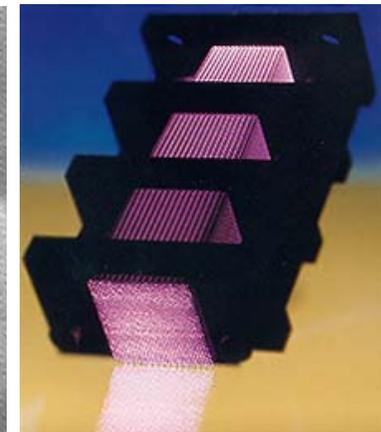
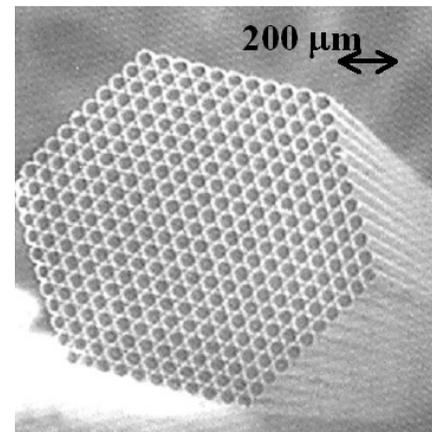


Glaszylinder

step index fiber

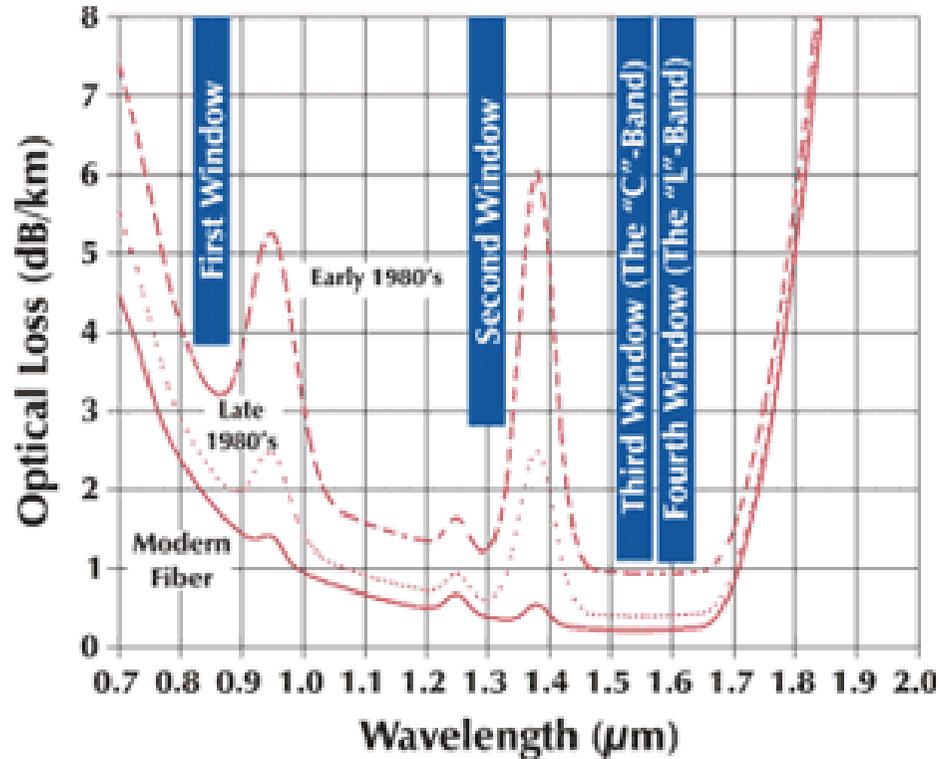
GRIN fiber

Für Röntgenstrahlen ist  $n(\text{Luft}) > n(\text{Glas})$ .  
Röntgenstrahlen können unter fast streifendem Einfall ( $< 0,2^\circ$ ) in Glaskapillaren geführt werden.



## Kommerzielle Fasern

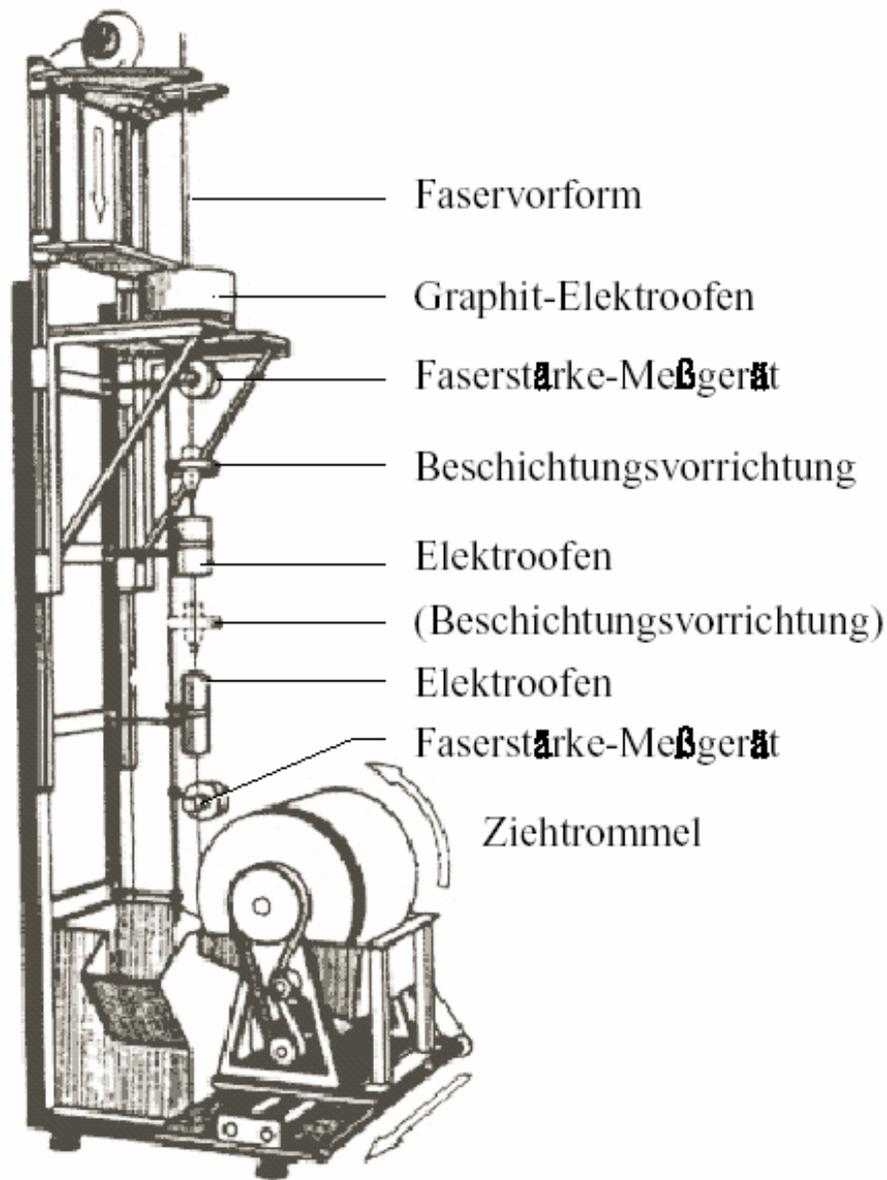
Geeignete Wellenlängenbereiche für die Glasfaserübertragung sind durch die Dämpfung des Glasmaterials bestimmt.



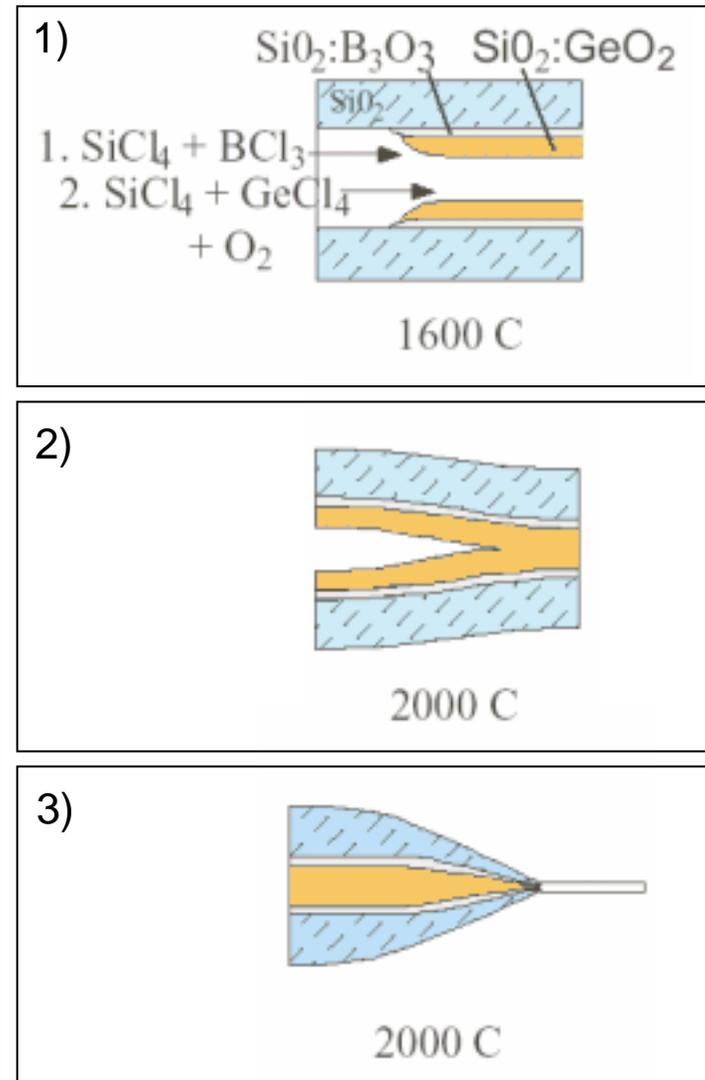
| Window            | Operating Wavelength |
|-------------------|----------------------|
| 800nm - 900 nm    | 850 nm               |
| 1250 nm - 1350 nm | 1310 nm              |
| 1500 nm - 1600 nm | 1550 nm              |



Links: Typische Verluste in optischen Fasern; rechts oben: Transmissionsfenster; rechts unten: konfigurierte Faserstecker und Lichtleitung durch Faserbündel



Faserziehturm

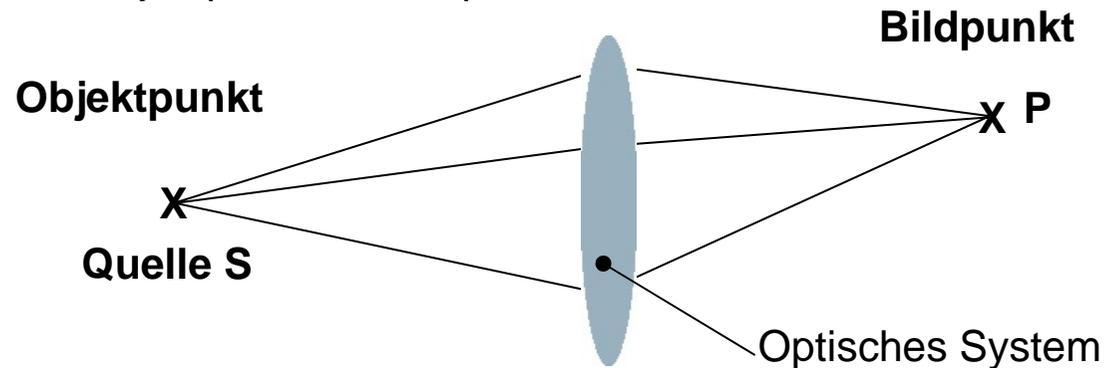


Faserherstellung durch Chemical Vapor Deposition und Faserziehen

## 2. Abbildung, Reflexion, Brechung

### 2.1. Die optische Abbildung

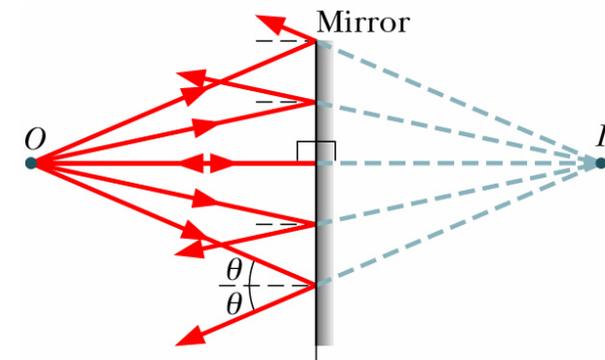
Das Problem der optischen Abbildung ist die Bestimmung der räumlichen Transferfunktion, die Objektpunkte in Bildpunkte überführt.



reeller Bildpunkt und  
reeller Objektpunkt

Definitionen:

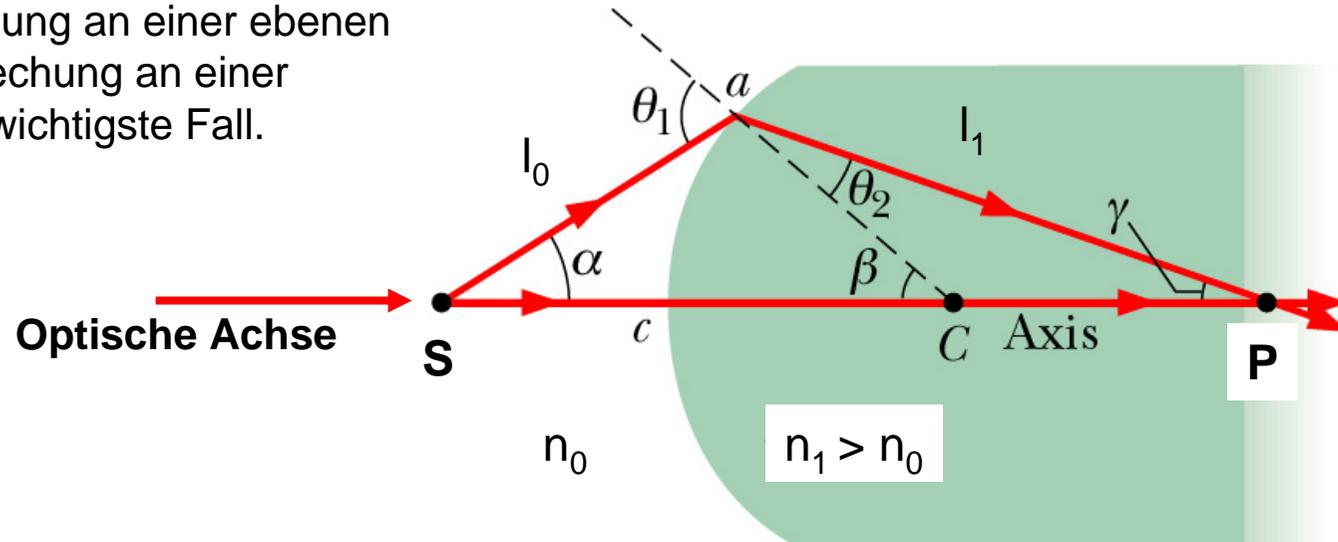
|                        |                                  |
|------------------------|----------------------------------|
| Reeller Objektpunkt    | Strahlen gehen divergierend aus  |
| Virtueller Objektpunkt | Strahlen gehen konvergierend aus |
| Reeller Bildpunkt      | Strahlen konvergieren            |
| Virtueller Bildpunkt   | Strahlen divergieren             |



virtueller Bildpunkt und  
reeller Objektpunkt

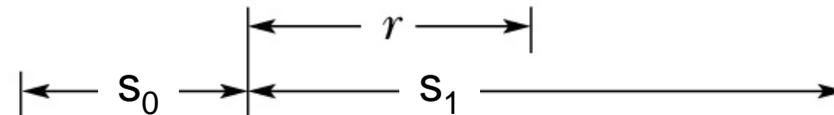
## 2.2. Die Brechung an Kugelflächen

Neben der Brechung an einer ebenen Fläche ist die Brechung an einer Kugelfläche der wichtigste Fall.



$s_0$  = Objektweite

$s_1$  = Bildweite



Die optische Weglänge (OWL) ist:  $OWL = n_0 l_0 + n_1 l_1$

Mit dem Kosinussatz für die Dreiecke SaC und ACP:

$$l_0 = \left[ r^2 + (s_0 + r)^2 - 2r(s_0 + r) \cos \beta \right]^{1/2}$$

$$l_1 = \left[ r^2 + (s_1 - r)^2 + 2r(s_1 - r) \cos \beta \right]^{1/2}$$

Mit Variation über  $\beta$  folgt nun:

$$\frac{d}{d\beta} (n_0 l_0 + n_1 l_1) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{n_0 2r(s_0 + r) \sin \beta}{2l_0} - \frac{n_1 2r(s_1 - r) \sin \beta}{2l_1} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{n_0}{l_0} + \frac{n_1}{l_1} = \frac{1}{r} \left( \frac{n_1 s_1}{l_1} - \frac{n_0 s_0}{l_0} \right)} \quad \text{exakt}$$

Im Fall achsennaher Strahlen ( $s_1 \approx l_1$ ;  $s_0 \approx l_0$ )

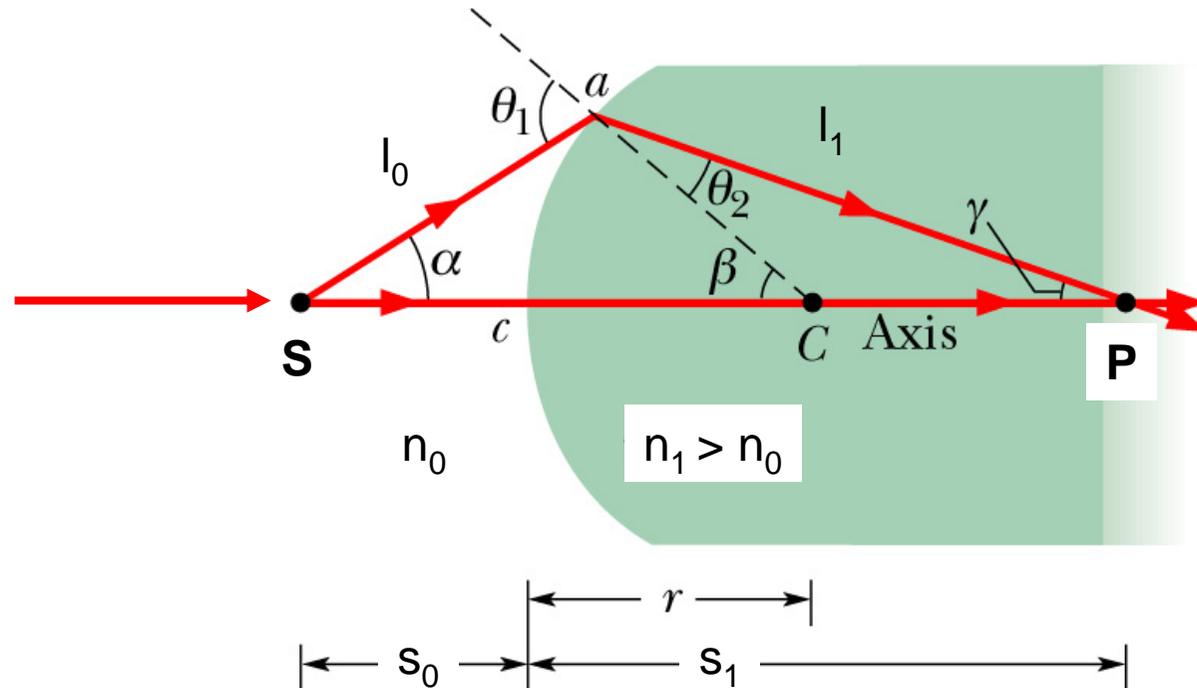
$$\boxed{\frac{n_0}{l_0} + \frac{n_1}{l_1} = \frac{n_1 - n_0}{r}} \quad \text{achsennah}$$

Spezialfälle:

$$s_1 = \infty \Rightarrow s_0^\infty = \boxed{f_0 = \frac{n_0}{n_1 - n_0} r} \quad \text{Objektbrennweite}$$

$$s_0 = \infty \Rightarrow s_1^\infty = \boxed{f_1 = \frac{n_1}{n_1 - n_0} r} \quad \text{Bildbrennweite}$$

Es ist wichtig, die Vorzeichenvereinbarungen zu beachten (von links eintreffendes Licht):



$s_0, f_0$  (Objektweite und Objektbrennweite)

positiv falls links von C

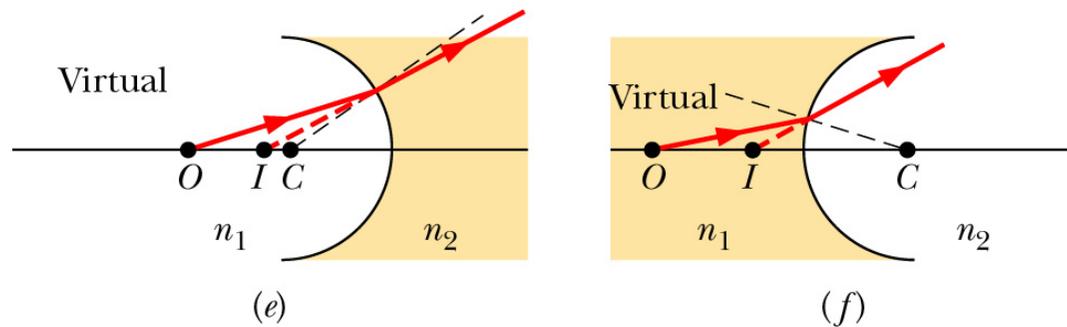
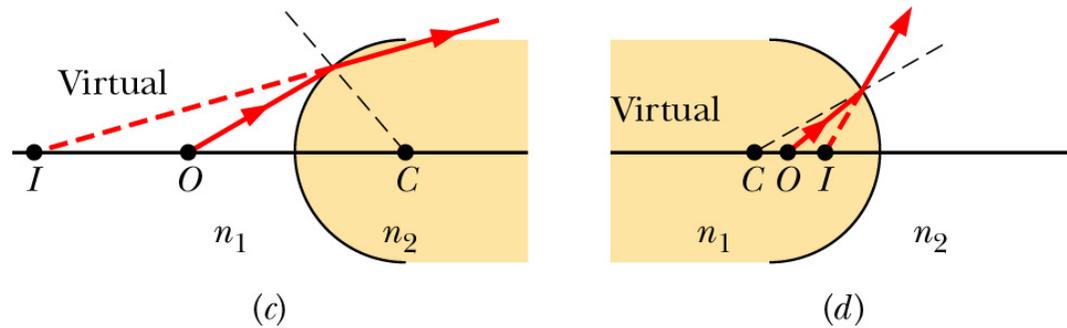
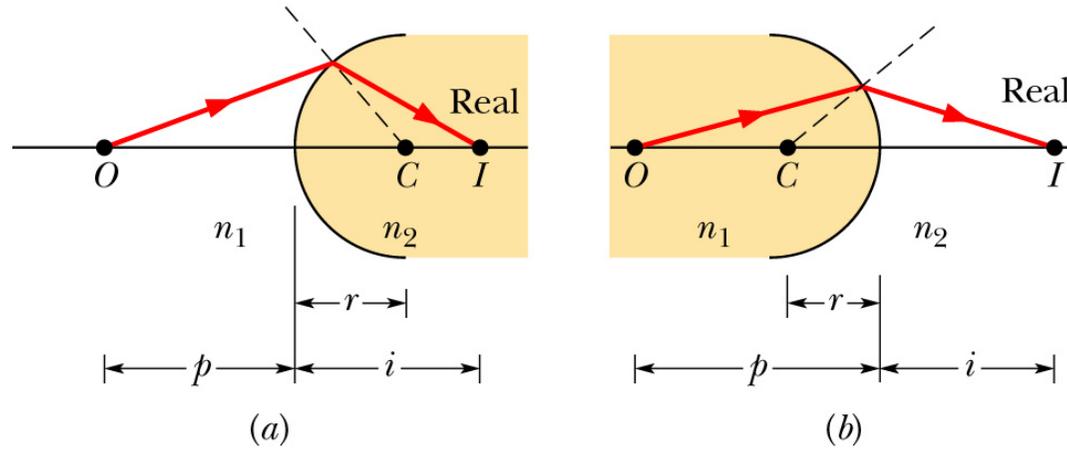
$s_1, f_1$  (Bildweite und Bildbrennweite)

positiv falls rechts von C

$r$  (Krümmungsradius)

positiv falls **C** rechts c

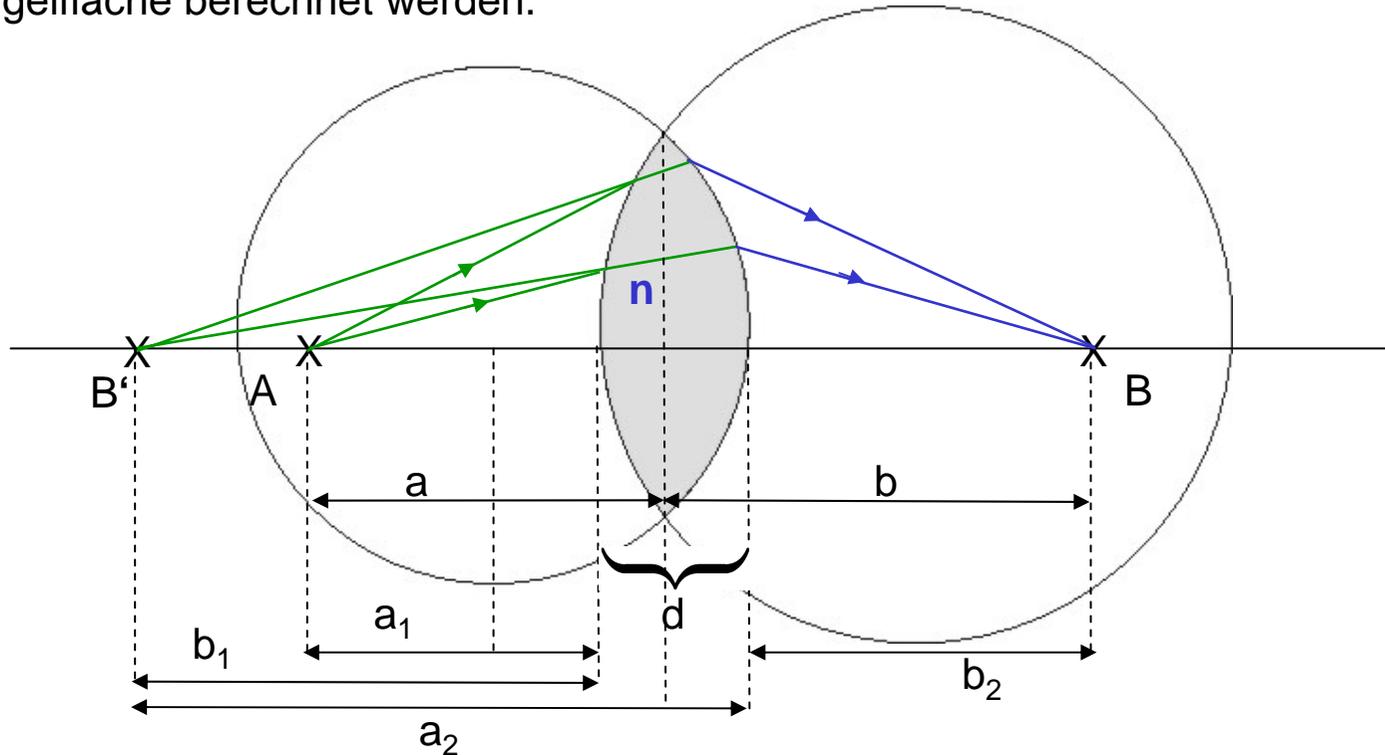
Einige Beispiele von reellen und virtuellen Abbildungen an einer Kugelfläche:



$O$  = Objektpunkt

$I$  = Bildpunkt

Die Abbildung durch eine dünne Linse kann nun als zweimalige Abbildung an einer Kugelfläche berechnet werden.



1) A wird durch die erste Fläche nach  $B'$  (virtuell) abgebildet:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{n}{b_1} = \frac{n-1}{r_1}$$

2)  $B'$  wird durch die zweite Fläche nach  $B$  abgebildet:

$$\frac{n}{(d-b_1)} + \frac{1}{b_2} = \frac{1-n}{r_2}$$

$$|a_2| = |b_1| + |d|$$

( $b_1 < 0$ , da virtuell)

Mit der Näherung für **dünne Linsen**  $d \ll a$   $d \ll b$

folgt:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = (n - 1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Linsenschleiferformel

Für einen achsennahen Strahl mit  $a = \infty$  ist somit:

$$f = \frac{1}{n-1} \left( \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \right)$$

Dasselbe gilt für  $b$ . Somit sind die Bild- und Objektbrennweite bei der dünnen Linse gleich.

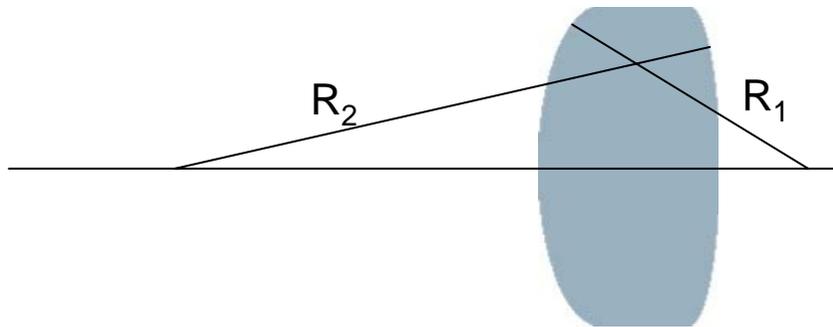
Die Größe  $f$  ist die **Brennweite** der Linse.

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

Abbildungsgleichung für dünne Linsen

## 2.3. Dünne Linsen

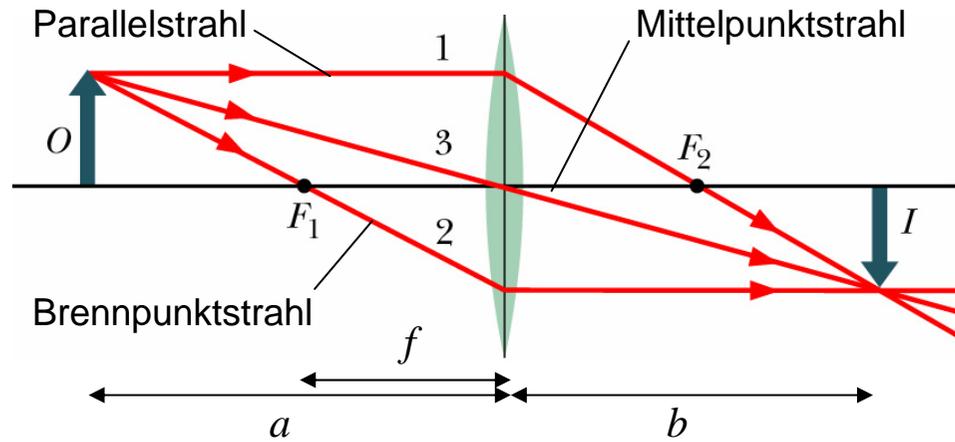
Eine sphärische Linse besteht aus zwei sphärischen Grenzflächen.



Verschiedene Arten von Linsen:

|  |  |  |   |  |  |
|--|--|--|---|--|--|
|  |  |  |  |  |  |
| (a)  | (b)  | (c)  | (d)   | (e)  | (f)  |
| Bi-convex  | Planar<br>convex   | Meniscus<br>convex   | Bi-concave  | Planar<br>concave  | Aspherical   |
| $R_1 > 0$  | $R_1 = \infty$   | $R_1 > 0$  | $R_1 < 0$   | $R_1 = \infty$   |  |
| $R_2 < 0$  | $R_2 < 0$  | $R_2 > 0$  | $R_2 > 0$   | $R_2 > 0$  |  |

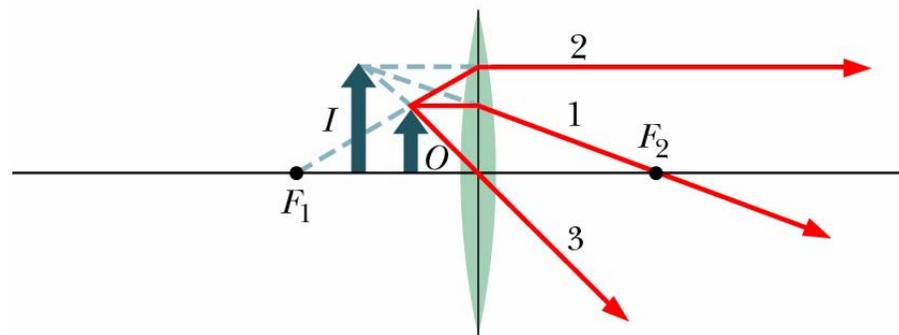
Die Bildkonstruktion erfolgt mit Hilfe der drei Hauptstrahlen



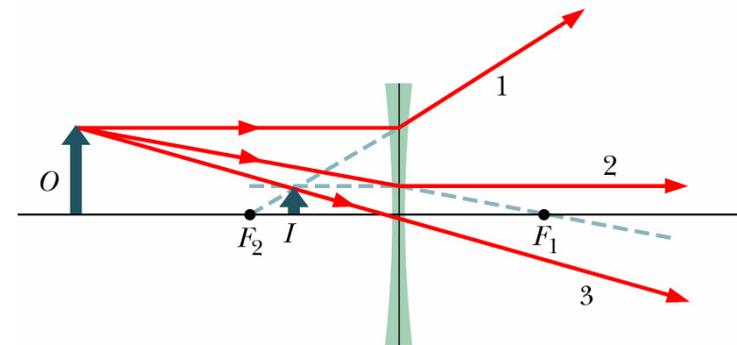
Die **Vergrößerung** der Linse ist:

$$M = I/O = -b/a = f/(f - a)$$

dünne Linse

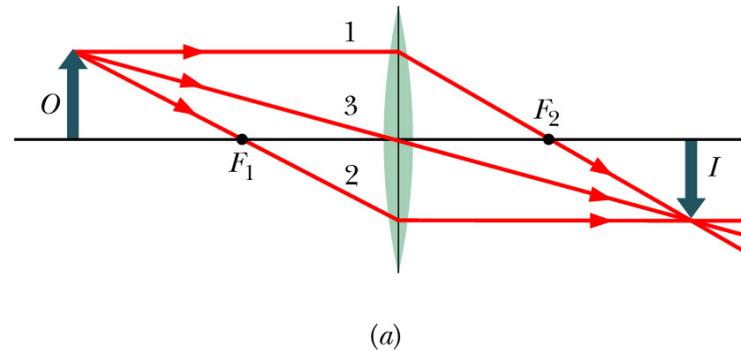


Konstruktion eines virtuellen Bildes

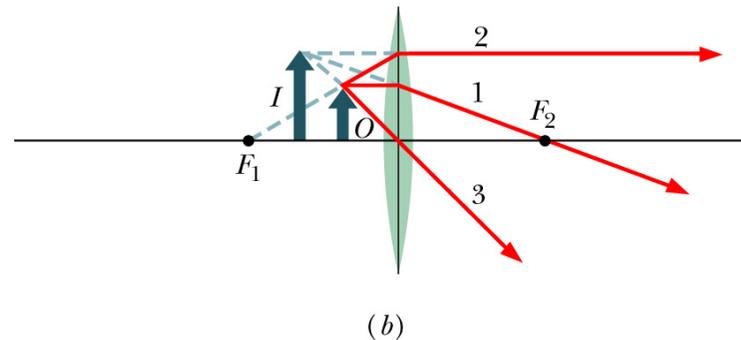


Bildkonstruktion bei der Zerstreuungslinse

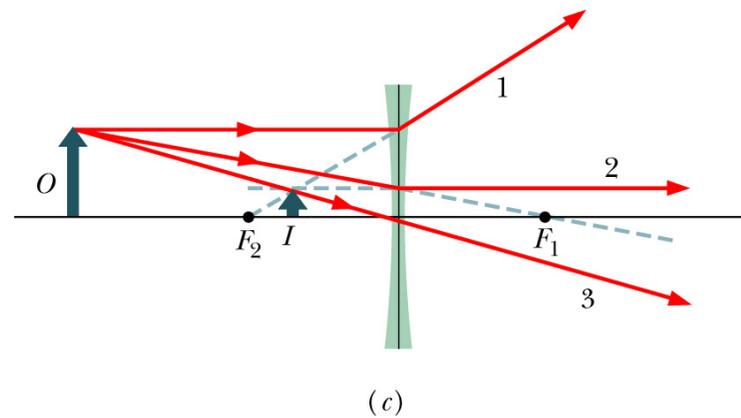
An einer Sammellinse entsteht ein reelles umgekehrtes Bild, wenn der Objektpunkt vor dem (Objekt-)Brennpunkt liegt.



Bei Annäherung an den Brennpunkt wird das Bild virtuell und aufrecht.

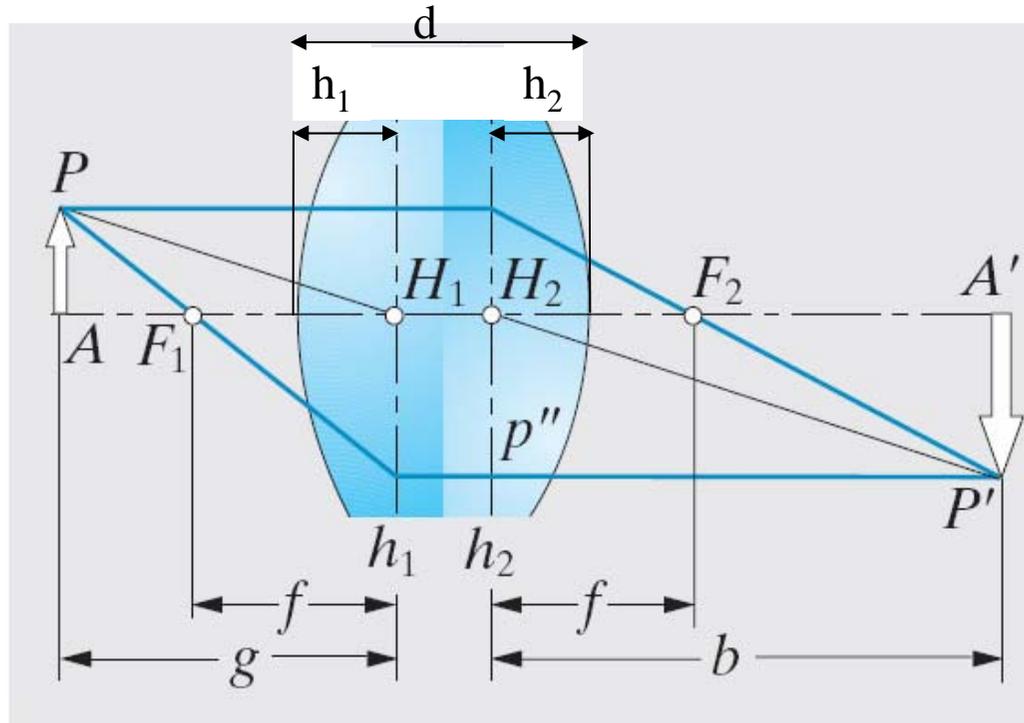


Eine Zerstreuungslinse erzeugt immer ein aufrechtes virtuelles Bild.



## 2.4. Dicke Linsen

Für dicke Linsen kann man eine ähnliche Konstruktionsvorschrift mit Hilfe der sogenannten **Hauptebenen** finden.



Die Lage der Hauptebenen wird bei Linsen oder Linsensystemen (z.B. Zoomlinsen beim Photoapparat) meist bezüglich des Scheitels der letzten Linse angegeben.

Im Falle einer einfachen dicken Linse gilt:

$$h_1 = -\frac{(n-1)fd}{nr_2}$$

$$h_2 = -\frac{(n-1)fd}{nr_1}$$

Dabei ist:

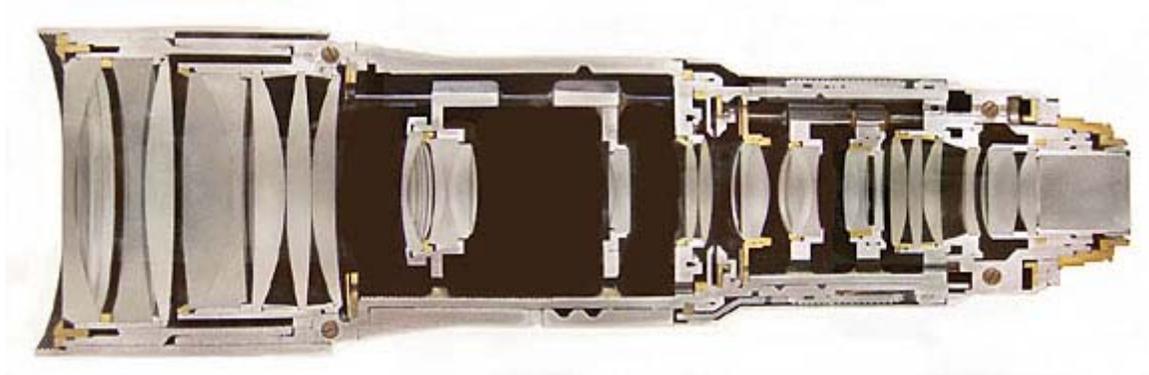
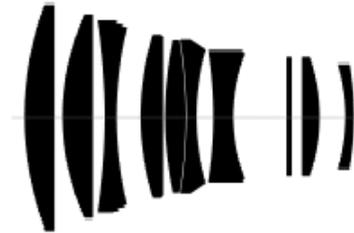
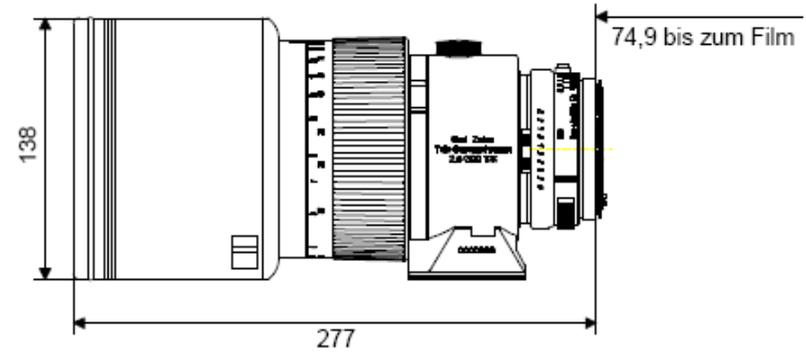
$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{(n-1)d}{nr_1r_2} \right)$$

## 2.5. Linsensysteme

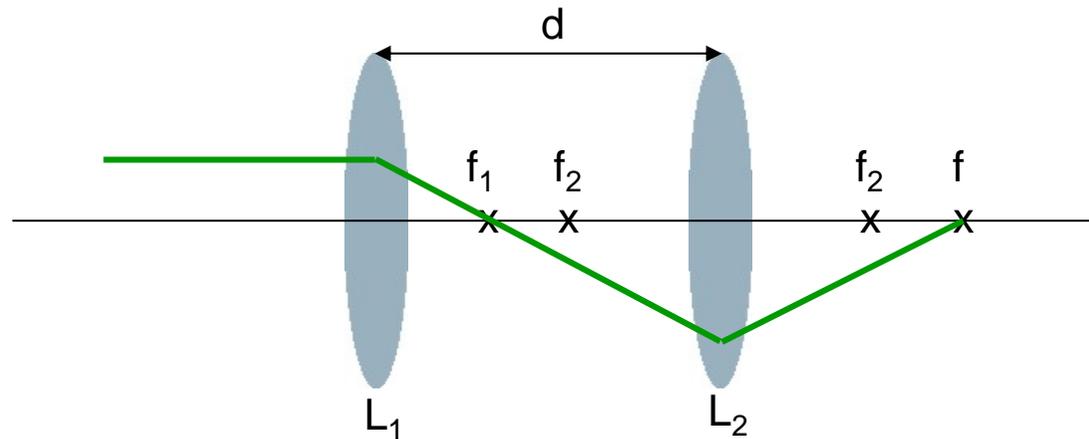
Optische Geräte und Systeme bestehen oft aus einer Vielzahl von Linsen (bis zu 50 bei Objektiven für sog. Waferstepper, die in der Chipherstellung verwendet werden).

Beispiel rechts: Teleobjektiv von Zeiss

Beispiel unten: Mikroskopobjektiv



Die kombinierte Wirkung zweier dünner Linsen lässt sich leicht berechnen:



Ein unendlich weit entfernter Gegenstand wird in die Brennebene von L<sub>1</sub> abgebildet.

Objektweite für L<sub>2</sub> ist somit  $a_2 = d - f_1$

somit:  $\frac{1}{b_2} + \frac{1}{d - f_1} = \frac{1}{f_2}$   $b_2$  ist aber die Brennweite des Gesamtsystems

Also:  $\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{(f_1 - d)f_1} \approx \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$

$d \ll f_1, f_2$

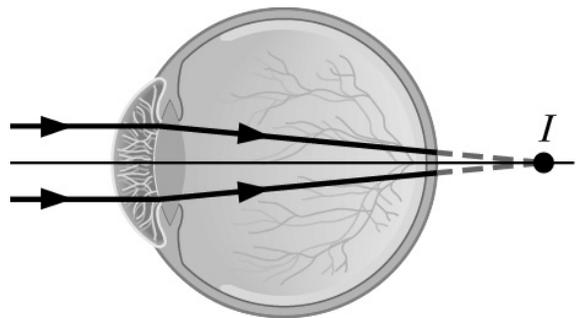
Für dünne Linsen gilt also

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

Additionstheorem für dünne Linsen

$\frac{1}{f} = D$  heisst die **Brechkraft** einer Linse  $[D] = m^{-1} = dt = \text{Dioptrie}$

Die Brechkraft dünner Linsen addiert sich.

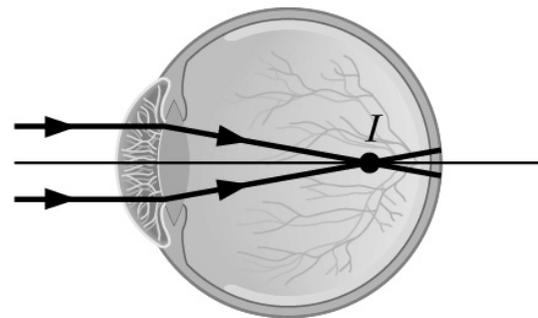


(a)

**Weitsichtigkeit**

Korrektur mit konvexer Linse

$$D > 0$$



(b)

**Kurzsichtigkeit**

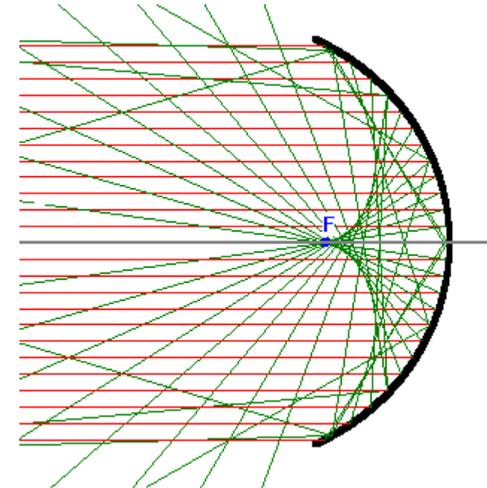
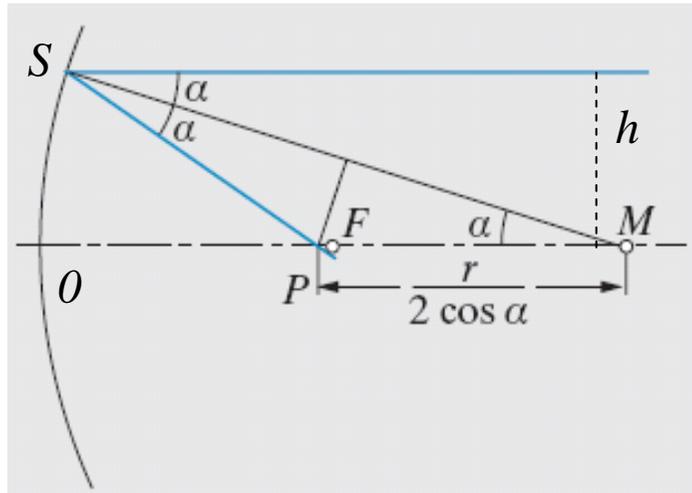
Korrektur mit konkaver Linse

$$D < 0$$

## 3. Einfache optische Elemente

### 3.1. Spiegel

Ein Hohlspiegel kann als ein abbildendes Element eingesetzt werden.



Das Dreieck FMS ist gleichseitig, daher

$$\overline{FM} = \frac{r}{2} \cos^{-1} \alpha \quad \text{und} \quad \overline{OF} = r \left( 1 - \frac{1}{2 \cos \alpha} \right)$$

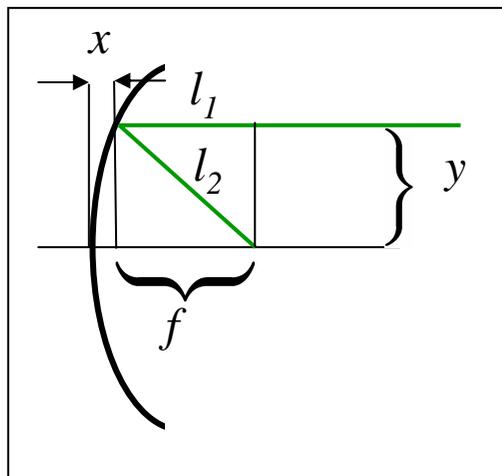
Für achsennahe Strahlen:  $\overline{OF} = f \approx r/2$  Brennweite des Hohlspiegels

Für achsferne Strahlen ergibt sich bei genauer Rechnung eine Abhängigkeit des Fokus vom Achsabstand  $h$  der Strahlen.

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - (h/r)^2} = \frac{1}{r} \sqrt{r^2 - h^2}$$

Somit: 
$$f = r \left[ 1 - \frac{r}{2\sqrt{r^2 - h^2}} \right]$$
 Brennweite eines sphärischen Hohlspiegels

Eine verbesserte Abbildung ergibt sich mit einem Parabolspiegel:



$$OWL = l_1 + l_2 = f - x + \sqrt{(f - x)^2 + y^2}$$

Für  $y^2 = 4fx$  hängt OWL nicht von  $x, y$  ab! Somit:

$$x = \frac{1}{4f} y^2$$
 Parabelgleichung

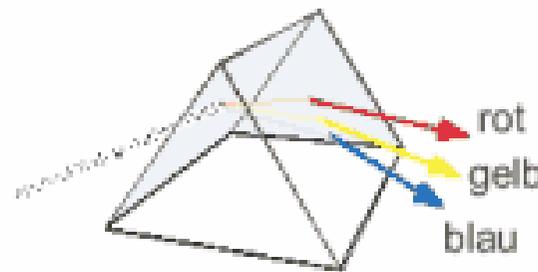
## 3.2. Prismen

Prismen sind Glaselemente mit nicht parallelen Grenzflächen.

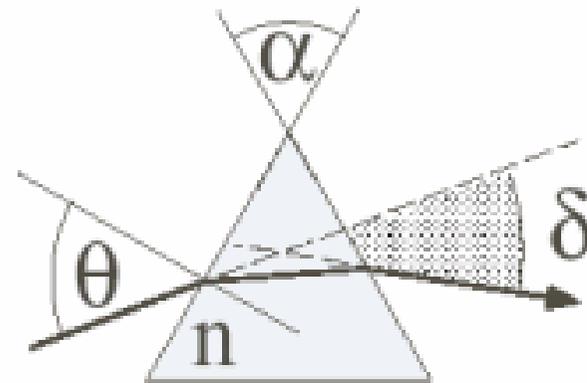
Prismen werden z.B. eingesetzt als:

- Dispersionsprismen
- Reflexionsprismen

### Dispersionsprismen



a) Dispersion im Prisma



b) Strahlableitung

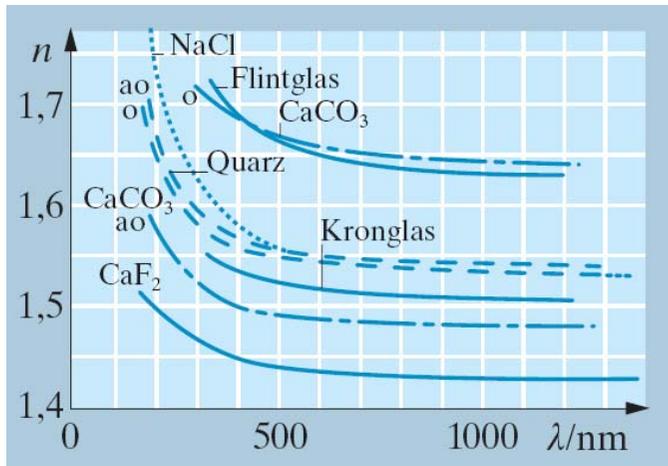
Der Ablenkwinkel  $\delta$  kann allein durch den Einfallswinkel  $\theta$  und den Prismenwinkel  $\alpha$  ausgedrückt werden:

$$\delta = \theta + \sin^{-1} \left[ \sin \alpha (n^2 - \sin^2 \theta)^{1/2} - \sin \theta \cos \alpha \right] - \alpha$$

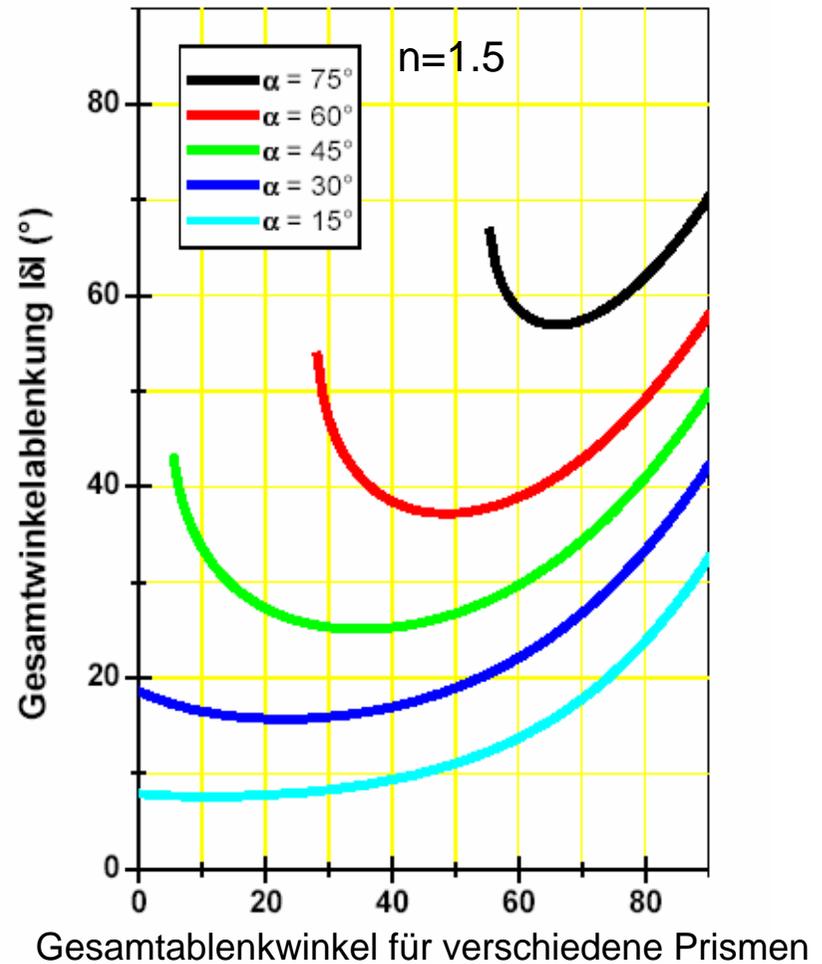
Eine minimale Ablenkung wird bei symmetrischem Strahlenverlauf erreicht.  
 In diesem Fall lässt sich leicht der Brechungsindex des Prismenmaterials bestimmen

Brechzahl aus minimalem Ablenkwinkel:

$$n = \frac{\sin(\alpha + \delta_{\min})/2}{\sin(\alpha/2)}$$

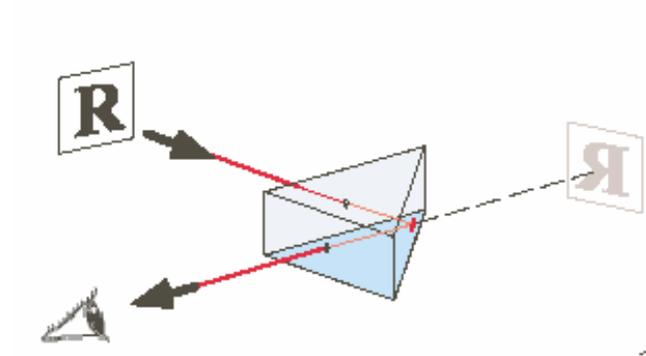


Dispersion für verschiedene Prismenmaterialien



## Reflexionsprismen

In Reflexionsprismen wird die Strahlableitung aufgrund Totalreflexion genutzt. Dabei erfolgt die Reflexion mit minimalem Verlust (besser als bei Spiegeln). Prismen können mit hoher Präzision gefertigt werden.

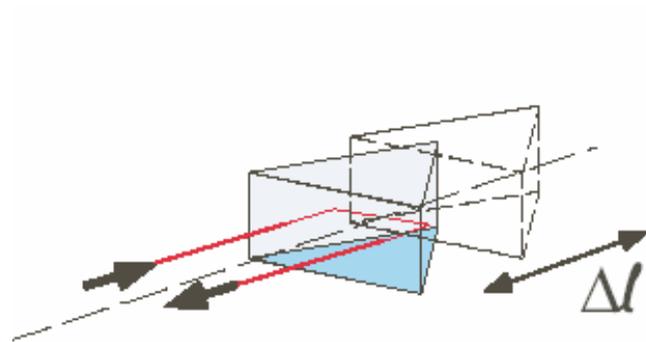


Strahlumlenkung in einem 60°-Prisma.

Kritischer Winkel der Totalreflexion:

$$\sin\theta_c = n^{-1}$$

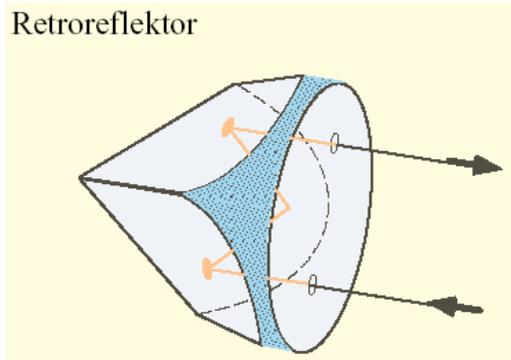
Für  $n=1,4$  bis  $1,5$  ist  $\theta_c=42^\circ$ .



180°-Umlenkung mit einem Prisma.

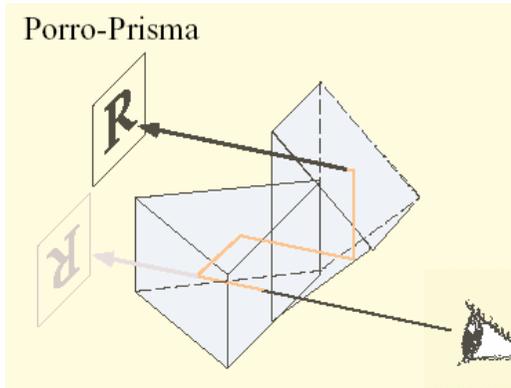
Der Strahl wird unabhängig von einer Verdrehung des Prismas in der Einfallsebene exakt umgekehrt, solange die Bedingung für Totalreflexion erfüllt bleibt.

Retroreflektor

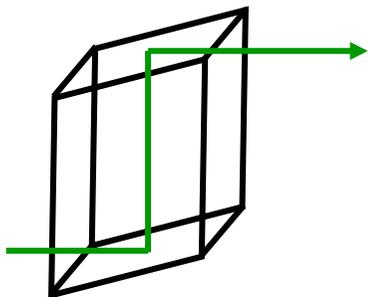


Mit einem **Corner-Cube** oder **Katzenauge**, wird jeder einfallende Strahl unabhängig von der Orientierung des Cubes exakt reflektiert, solange die Bedingung für Totalreflexion erfüllt bleibt.

Porro-Prisma



Ein **Porro-Prisma** dient zur Bildumkehr.

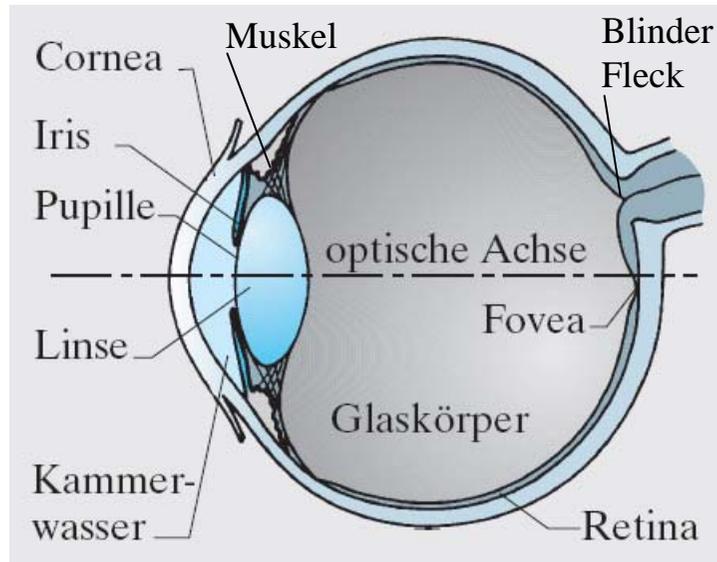


Prismen werden oft in optischen Instrumenten zur Bildumkehr, Bildverschiebung oder Strahlfaltung benutzt.

Oft kommen auch preiswerte Plastikprismen zum Einsatz.

## 4. Optische Instrumente

### 4.1. Das Auge



Das Auge bildet über eine akkomodierbare GRIN-Linse ( $n=1.386-1.406$ ) auf die Netzhaut (Retina) ab, die den Glaskörper ( $n=1.376$ ) begrenzt.

Der Haupteffekt der Lichtbrechung tritt an der Luft-Hornhaut ( $n=1.376$ ) Grenzfläche auf. Aus diesem Grund sieht man unter Wasser ( $n=1.3$ ) unscharf.

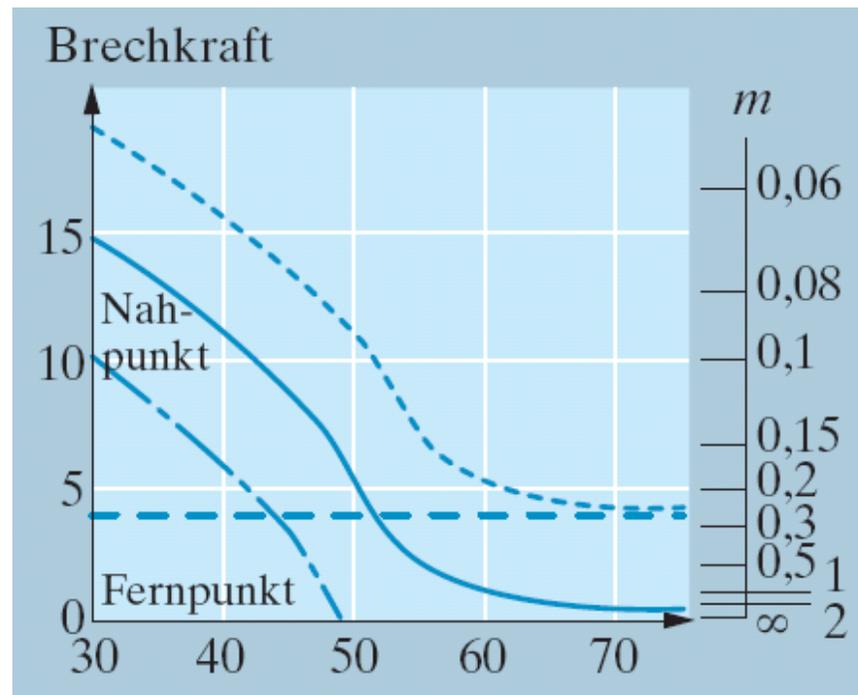
Die Brennweite der Linse ist in entspanntem Zustand etwa  $f = 2.5 \text{ cm} = 40 \text{ dt}$  (Abbildung von unendlich weiten Gegenständen auf die Netzhaut).

Der **Nahpunkt** des Auges ist der nächste Punkt, der noch scharf gesehen werden kann.

Eine bequeme Entfernung für die Betrachtung eines nahen Gegenstandes liegt bei etwa  **$s_0 = 25 \text{ cm}$** .

Die Akkomodation des Auges erfolgt durch Akkomodation der Linse. Andere Lebewesen nutzen hierzu eine Veränderung des gesamten Auges (Mollusken) oder eine Veränderung der Krümmung der Hornhaut (Raubvogel).

Die Akkomodationsfähigkeit des Auges nimmt mit zunehmendem Alter ab.



Abnahme der Akkomodationsbreite des Auges für ein kurzsichtiges (strich-punktiert, -5 dt), ein weitsichtiges (gestrichelt, 5 dt) und ein normalsichtiges Auge (durchgezogen). Für die Gesamtbrechkraft des Auges müssen 40-45 dt addiert werden.

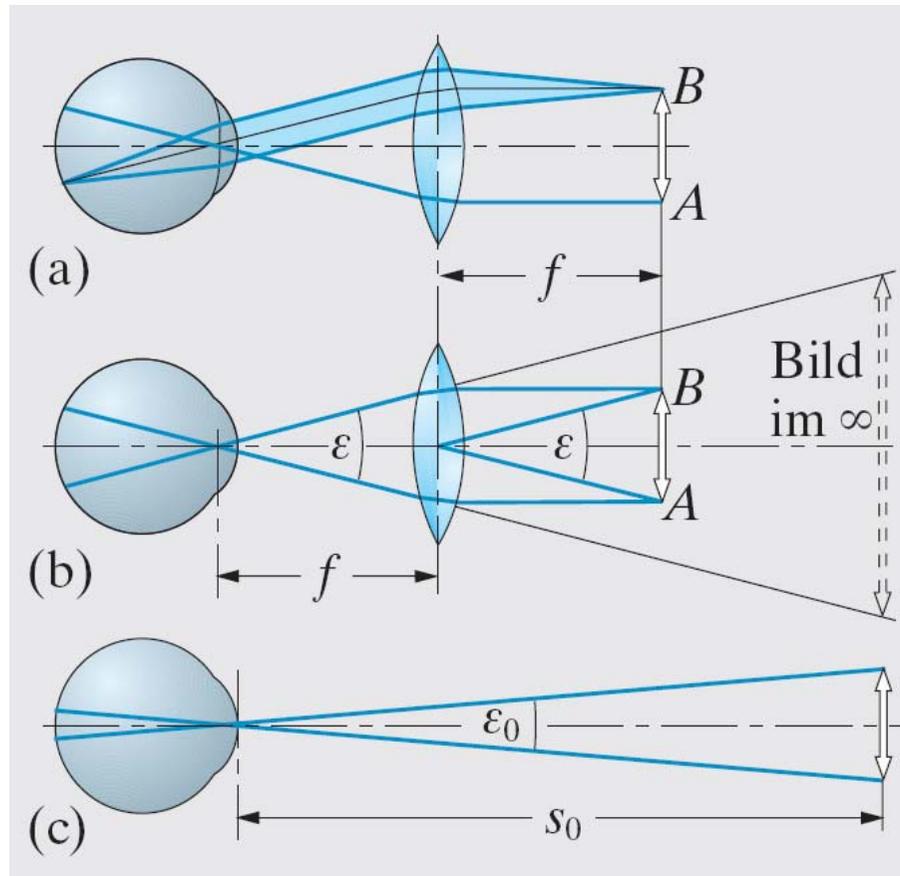
Die Fovea weist die höchste Dichte an Sehzellen auf, am blinden Fleck (Eintritt des Sehnervs) befinden sich keine Sehzellen.

## 4.2. Die Lupe

Das einfachste optische Instrument ist die Lupe.

Eine Lupe ermöglicht die vergrößerte Betrachtung eines nahen Gegenstandes.

Die **Vergrößerung  $M$  der Lupe** ist das Winkelverhältnis bei bequemer Betrachtung (Entfernung von **25cm** eines Gegenstandes) mit und ohne Lupe.



Gegenstand in der Brennweite der Lupe und Betrachtung mit entspanntem Auge

Betrachtung des virtuellen Bildes im Unendlichem mit entspanntem Auge

Betrachtung des Gegenstandes in bequemer ( $s_0=25\text{cm}$ ) Entfernung

Der Betrachtungswinkel wird mit der Lupe im Vergleich zum unbewaffneten Auge gespreizt:

$$M = (\overline{AB}/f) / (\overline{AB}/s_0) = s_0/f$$

Mit dem festgelegten Wert  $s_0=25$  cm ergibt sich also:

$$M = \frac{s_0}{f} = \frac{25 \text{ cm}}{f}$$

Vergrößerung der Lupe

Eine Lupe mit der Brennweite  $f = 10$  cm, d.h. Brechkraft 10 dt, hat also eine Vergrößerung von 2,5X.

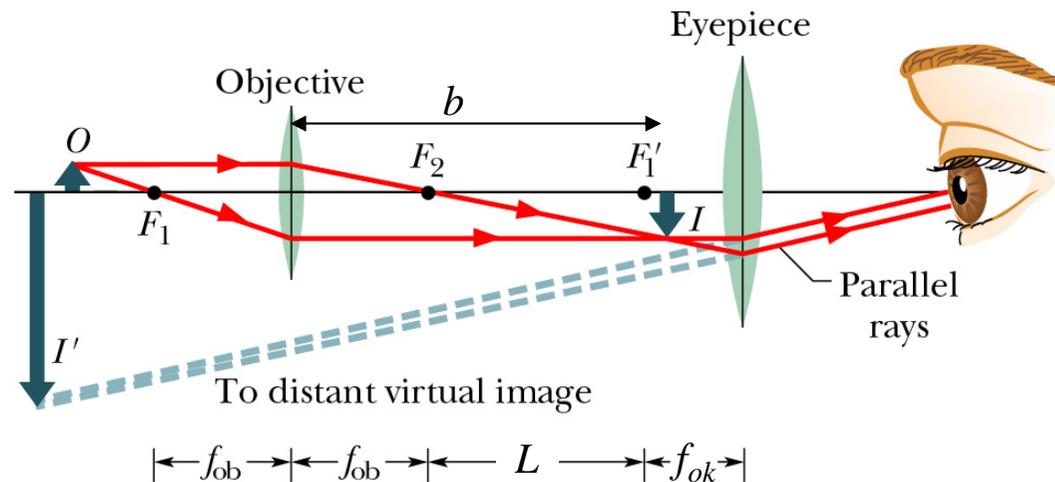
Diese Angabe findet man als Kennzeichnung auf Lupen und **Okularen**.

Ein Okular ist eine optimierte (Reduktion von Linsenfehlern), meist mehrteilige Lupe, die das Zwischenbild eines vorgeschalteten Linsensystems vergrößert.

### 4.3. Das Mikroskop

Das Mikroskop erzeugt eine hohe Vergrößerung nahe gelegener Objekte.

Dabei erzeugt das Objektiv ein reelles umgekehrtes Zwischenbild, das vom Okular vergrößert wird. Zum Scharfstellen wird das gesamte Mikroskop bewegt.



Die Vergrößerung des Objektivs ist:

$$M_{obj} = -b/a = (f_{obj} - b)/f_{obj} = -L/f_{obj} \quad \text{Objektivvergrößerung}$$

Die Vergrößerung des Okulars ist:

$$M_{ok} = s_0/f_{ok} \quad \text{Okularvergrößerung}$$

Die Tubuslänge  $L$  ist als **Standard** auf **160 mm** festgelegt.

Damit ergibt sich die Gesamtvergrößerung des Mikroskops zu:

$$M_{mikroskop} = M_{obj} M_{ok} = -\frac{L}{f_{obj}} \frac{s_0}{f_{ok}} = \frac{-160 \text{ mm}}{f_{obj}} \frac{254 \text{ mm}}{f_{ok}}$$

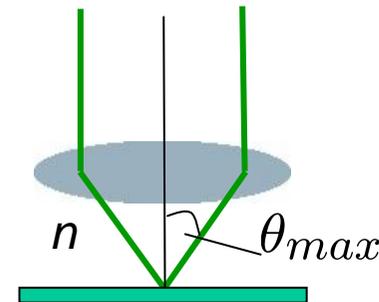
Beispiel: Ein Objektiv mit  $f_{obj}=32\text{mm}$  hat die Angabe 5X.

Zusammen mit einem 10X Okular ( $f_{ok}=254\text{mm}$ ) ist als  $M_{mikroskop}=50\text{X}$

Ein weiterer wichtiger Parameter des Objektivs ist seine **numerische Apertur NA**.

$$NA = n \sin \theta_{max}$$

Dabei ist  $\theta_{max}$  der halbe maximal Winkel des Lichtbündels, das durch das Objektiv aufgesammelt wird.



Die NA ist entscheidend für die Lichtstärke und das Auflösungsvermögen des Mikroskops.



Nomenklatur bei modernem Objektiv:

**A-Plan:** Objektiv aus der A-Plan Serie (Objektive mit erweiterter Bildfeldebnung)

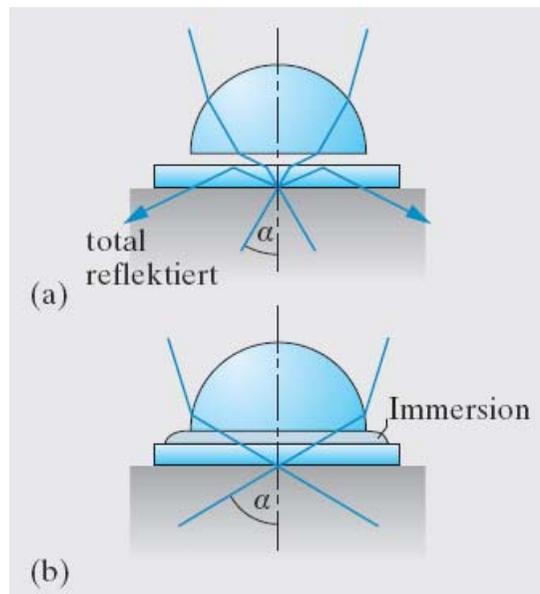
**40x:** Vergrößerung des Objektivs

**0.65:** numerische Apertur des Objektivs

$\infty$  : Tubuslänge unendlich

**0.17:** Objektiv für Deckgläser mit der Dicke 0,17 mm berechnet

Bei Mikroskopobjektiven unterscheidet man Trocken- und Immersionssysteme.



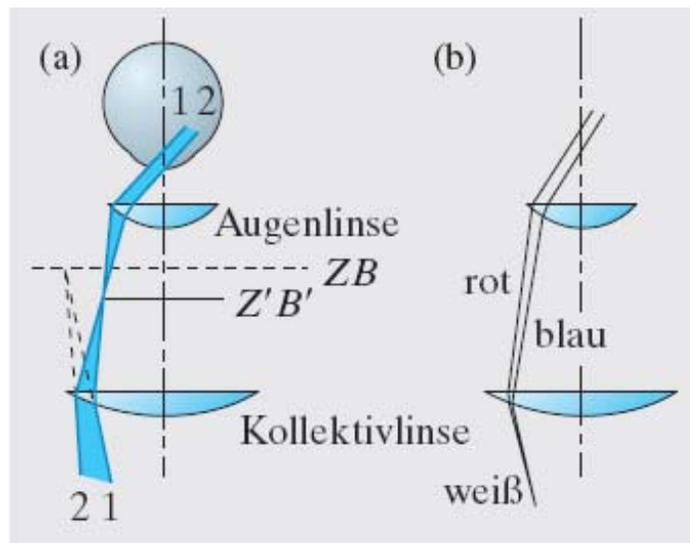
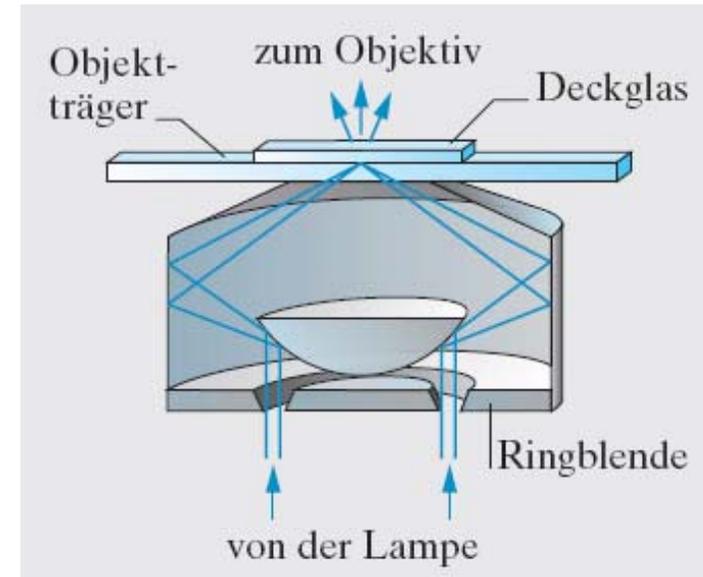
Ein Immersionsöl (z.B. Zedernholzöl mit  $n=1,5$ ) reduziert den Verlust von Teilstrahlen durch Totalreflexion an der Glas-Luft-Grenzfläche.

Dadurch kann die NA größer als 1 (bis 1.4) werden.

Moderne Objektive mit geringen Linsenfehlern (siehe 4.5) enthalten bis über 10 Einzellinsen. Dies ist erforderlich, da im Gegensatz zum Okular das gesamte Objektiv von Lichtstrahlen durchdrungen wird.

## Weitere Beispiele für Linsensysteme im Mikroskop

Der Dunkelfeldkondensator erhöht den Kontrast. Es gelangt kein direktes Licht zum Objektiv, sondern nur solches, welches von der Probe gestreut wird. Dies ist vorteilhaft bei kontrastarmen - z.B. biologischen - Proben.

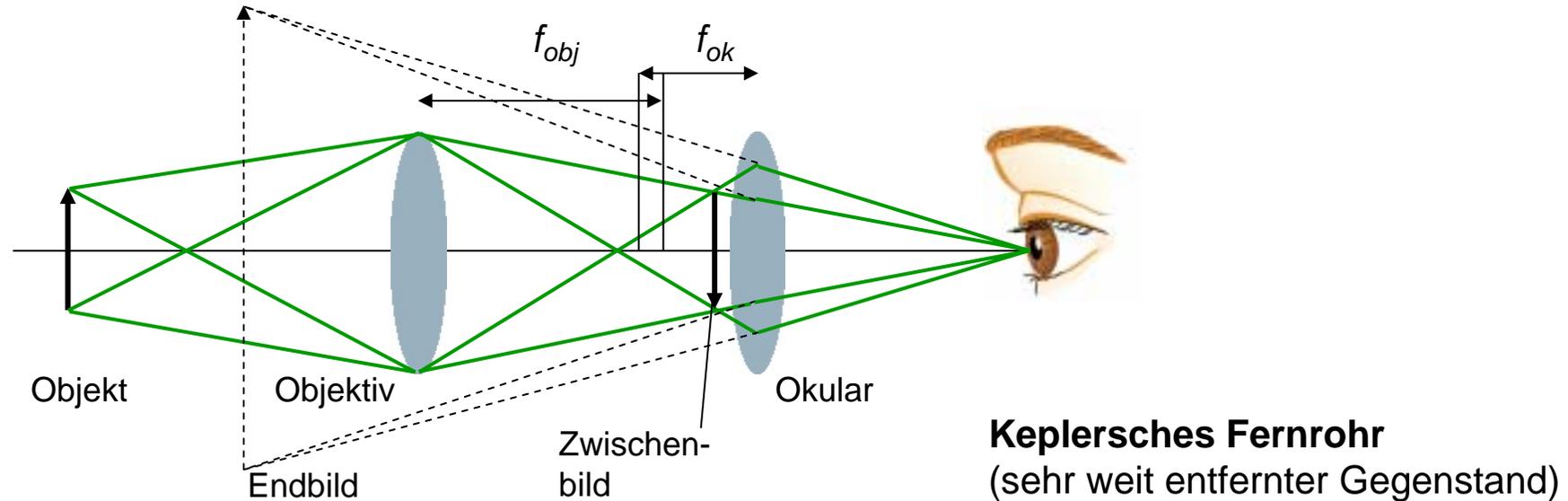


Das **Hyugens-Okular** nutzt zwei Linsen. Dadurch wird:

- a) das Sehfeld größer,
- b) sphärische und chromatische Aberration reduziert (siehe 4.5),
- c) die Möglichkeit geschaffen, eine Skala in Z'B' einzufügen.

## 4.4. Das Teleskop

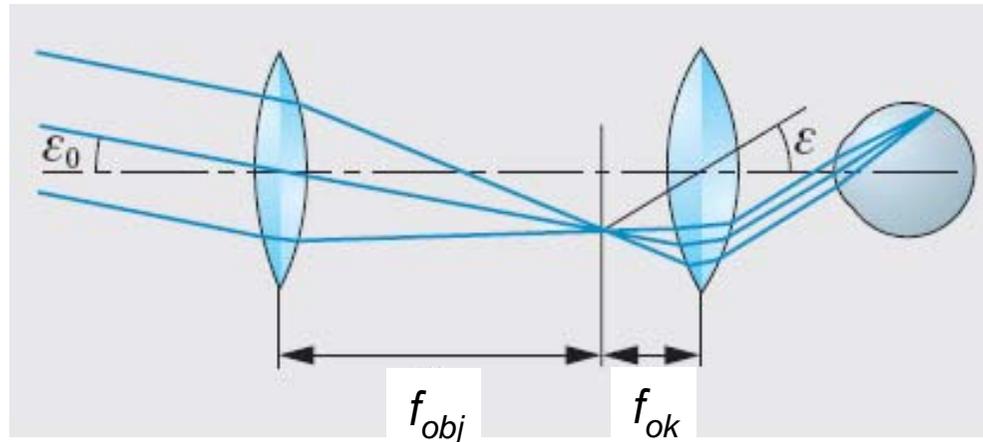
Das Teleskop erzeugt ein vergrößertes Bild eines weit entfernten Gegenstandes.



Das Zwischenbild nach dem Objektiv liegt fast in der Brennebene. An dieses Bild könnte man bis zur bequemen Sehweite  $s_0$  herangehen. Es erschiene dann unter dem Winkel  $B/s_0$ . Mit dem unbewaffneten Auge erscheint der Gegenstand unter dem Winkel  $G/g$ . Das Okular trägt als Lupe noch die Vergrößerung  $s_0/f_{ok}$  bei.

Mit  $B/G = f_{obj}/g$  folgt:

$$\frac{B/s_0}{G/g} \frac{s_0}{f_{ok}} = -f_{obj}/f_{ok} \quad \text{Vergrößerung des Teleskops}$$



**Keplersches Fernrohr**  
(unendlich weit entfernter Gegenstand)

Im Falle eines unendlich weit entfernten Gegenstandes sieht man unmittelbar als Vergrößerung des Winkelverhältnisses:

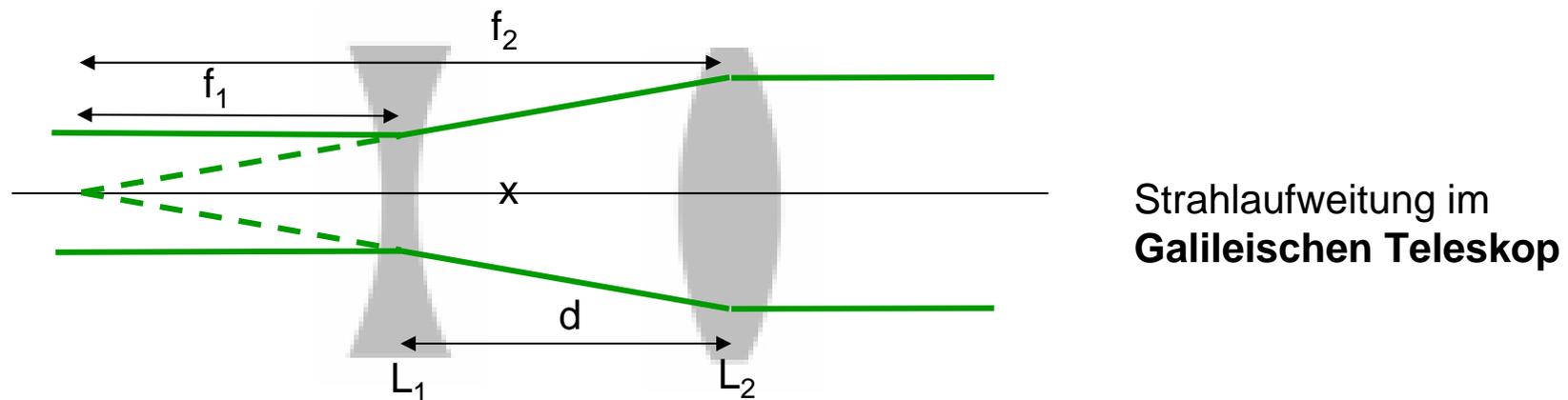
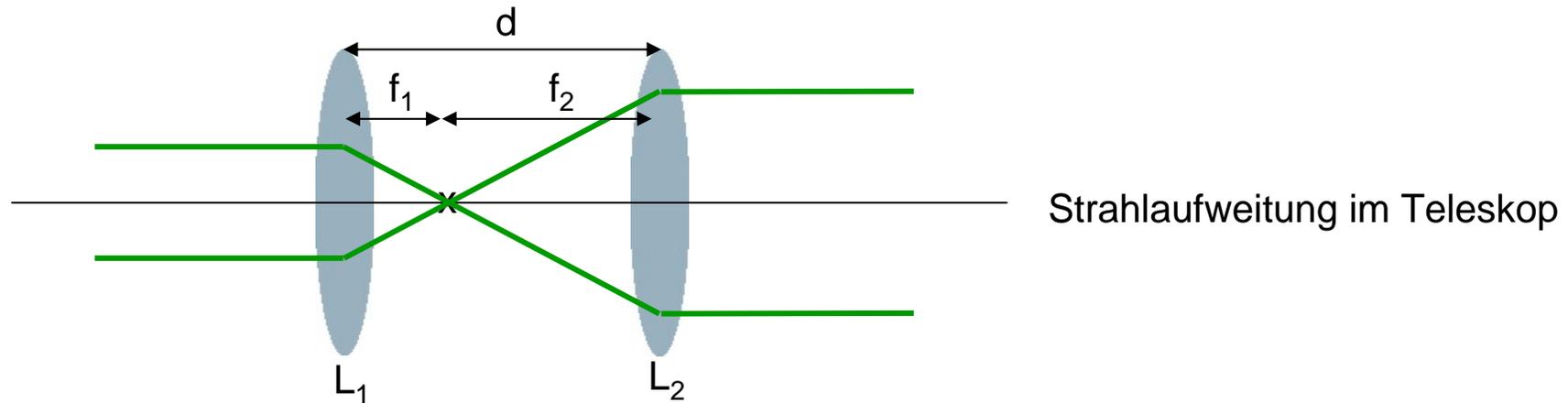
$$\epsilon / \epsilon_0 = -f_{obj} / f_{ok}$$

Das Keplersche oder **astronomische Fernrohr** erzeugt ein umgekehrtes Bild.

Zur Aufrichtung des Bildes im **Erdfernrohr** muss zusätzlich eine Umkehrlinse oder ein Aufrichtesystem eingefügt werden, was zu einem sehr langen Tubus führt.

In **Ferngläsern** wird oft ein doppeltes Porro-Prisma zur Aufrichtung verwendet.

Eine wichtige Anwendung von Teleskopen ist auch die **Strahlaufweitung**.



In beiden Fällen ist  $d = f_1 + f_2$

Das Galileische Teleskop erzeugt ein aufrechtes Bild.

Wegen des fehlenden Fokus kann es zur Strahlaufweitung auch bei sehr intensiven Laserstrahlen eingesetzt werden.

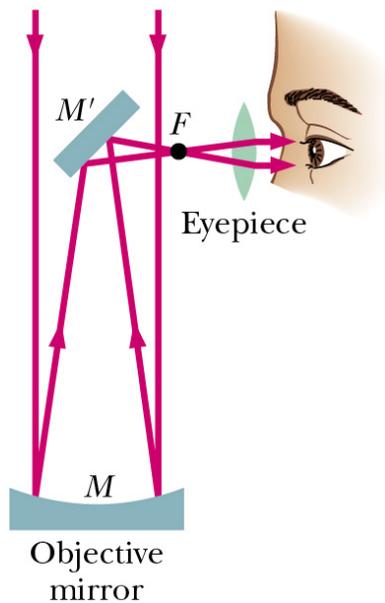
## Spiegelteleskope

Für astronomische Beobachtungen weit entfernter Objekte sind das **Auflösungsvermögen** und die **Lichtstärke** des Teleskops ausschlaggebend.

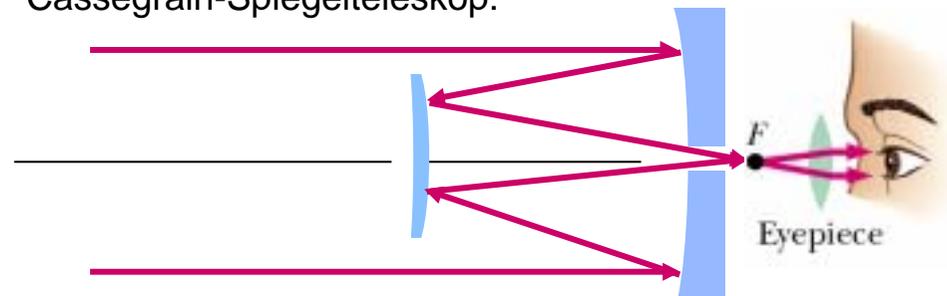
Beide erfordern sehr große Aperturen. Glaslinsen sind nur bis zu einer Größe von etwa einem Meter herstellbar.

Eine Abhilfe schaffen Spiegelteleskope.

Newton'sches Spiegelteleskop:

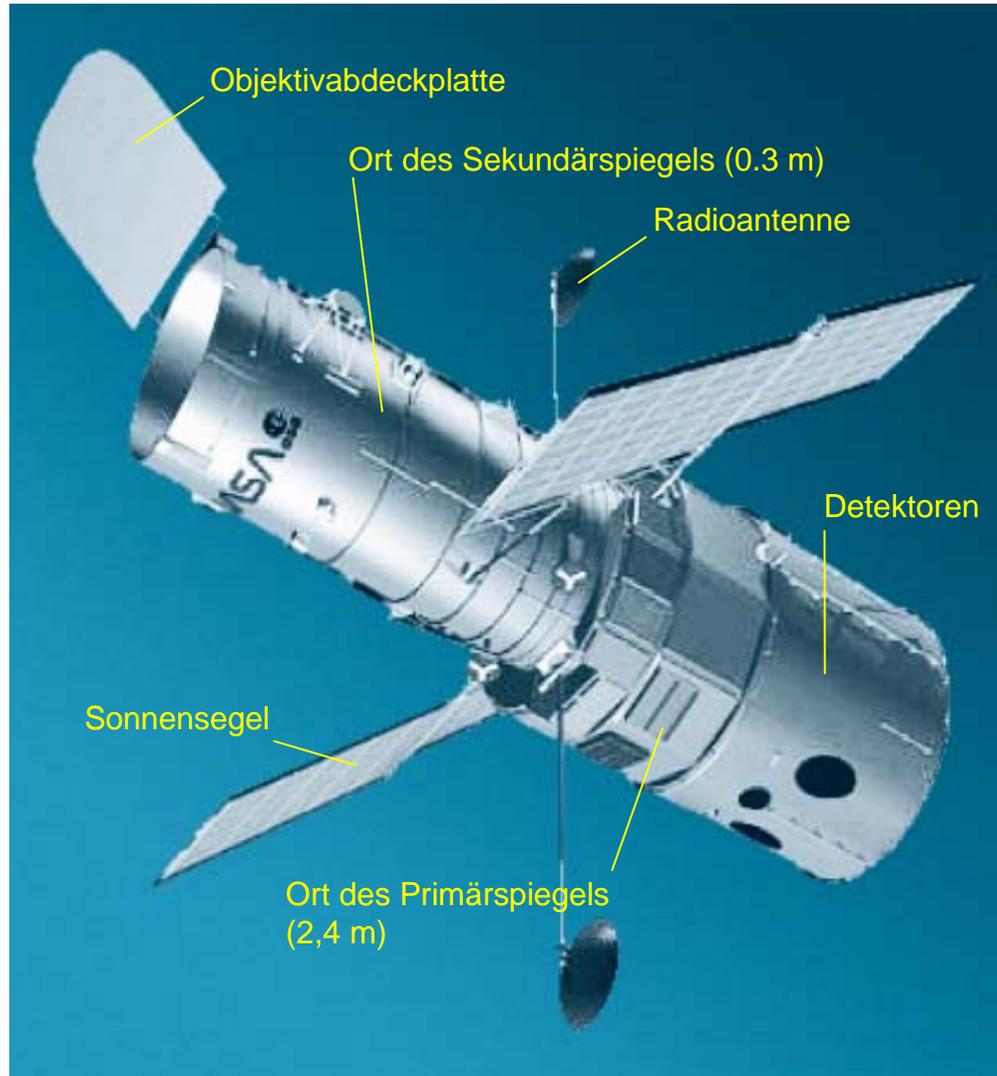


Cassegrain-Spiegelteleskop:



- Große Spiegel (viele Meter) können hergestellt werden.
- Spezielle Abbildungsfehler (Koma, Astigmatismus, s. 4.5) treten auf und beschränken das Sichtfeld der Spiegelteleskope.

## Ein Beispiel für ein Spiegelteleskop: Das Hubble-Weltraumteleskop



## 4.5. Linsenfehler

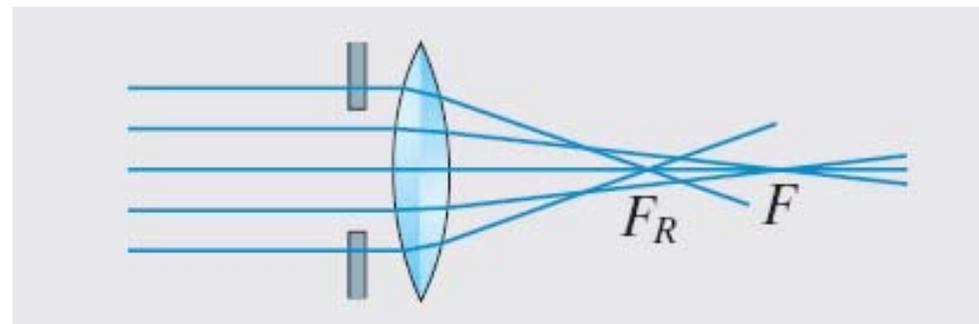
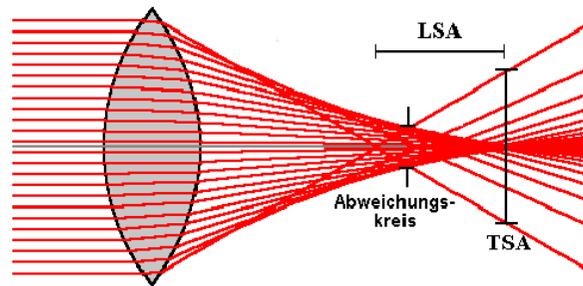
Eine bisher vorausgesetzte ideale Abbildung bildet alle Punkte einer Objektebene eindeutig in eine Bildebene ab.

Dies ist jedoch in realen optischen Systemen nicht der Fall. Es treten **Linsenfehler** oder **Aberrationen** auf.

Man unterscheidet 5 monochromatische oder **Seidelsche Aberrationen** und die **chromatische Aberration**.

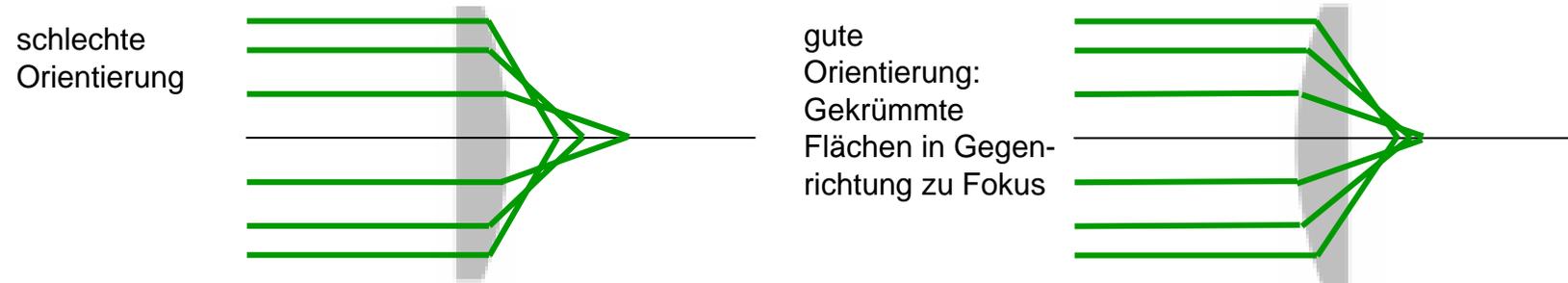
### 1 Sphärische Aberration

An Kugelflächen werden achsferne Strahlen stärker gebrochen als achsnahe.



Verdeutlichung der sphärischen Aberration und Verringerung durch eine Blende

Zur Verringerung von Aberrationen können speziell geformte Linsen eingesetzt werden.

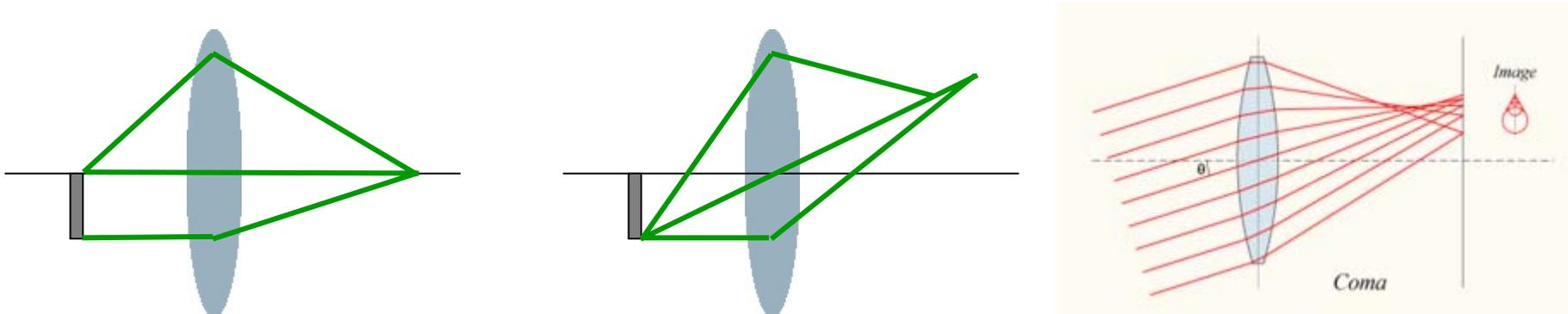


Verringerung der sphärischen Aberration durch richtige Orientierung einer Plankonvexlinse.

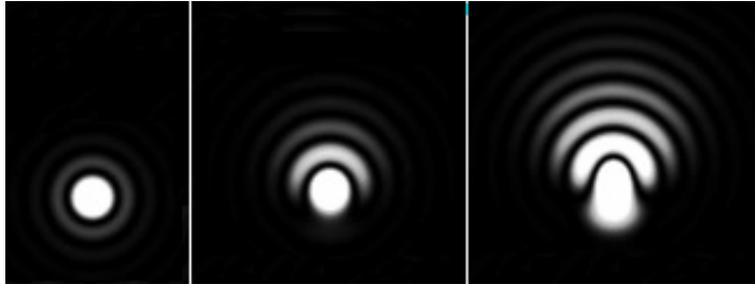
Eine weitere Möglichkeit ist die Verwendung nicht sphärischer Linsen, sog. **Asphären**.

## 2 Koma

Asymmetriefehler für Punkte, die nicht auf optischer Achse liegen, selbst wenn ein Punkt auf der optischen Achse perfekt abgebildet wird.



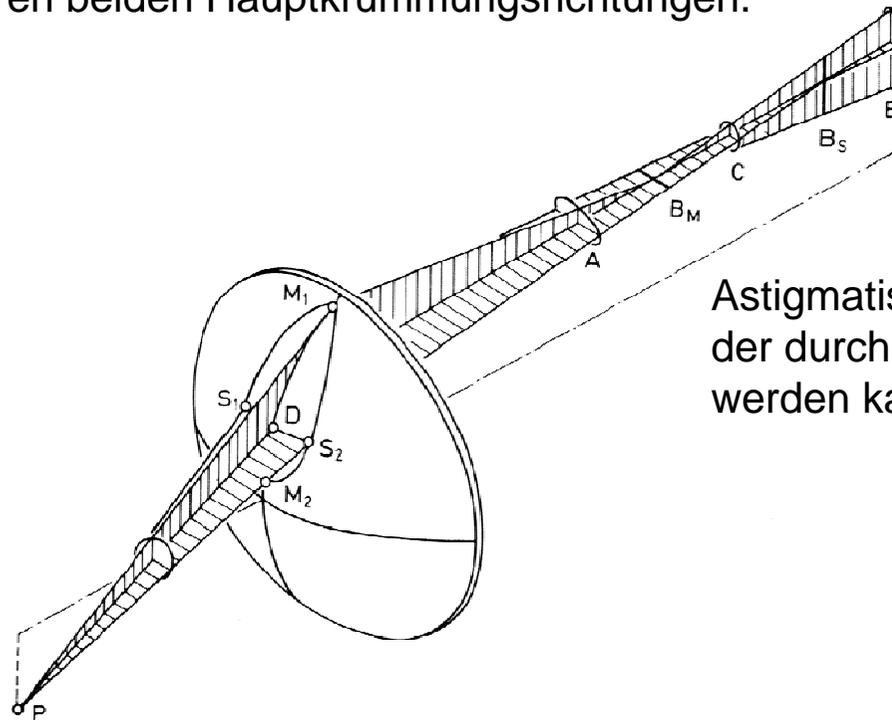
Links und Mitte: Verdeutlichung der Koma-Aberration; rechts: Abbildungsfehler aufgrund von Koma



Abbildungsfehler bei zunehmender (von links nach rechts) Aberration aufgrund von Koma

### 3 Astigmatismus

Eine astigmatische Linse hat keinen Brennpunkt, sondern zwei Brennlinien, entsprechend ihren beiden Hauptkrümmungsrichtungen.



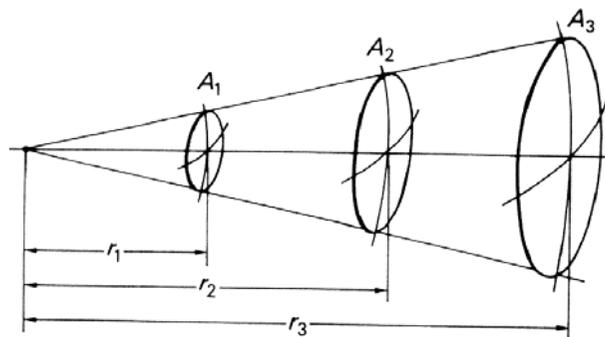
Astigmatismus ist ein häufiger Sehfehler, der durch entsprechende Brillen korrigiert werden kann.

## 4 Bildfeldwölbung

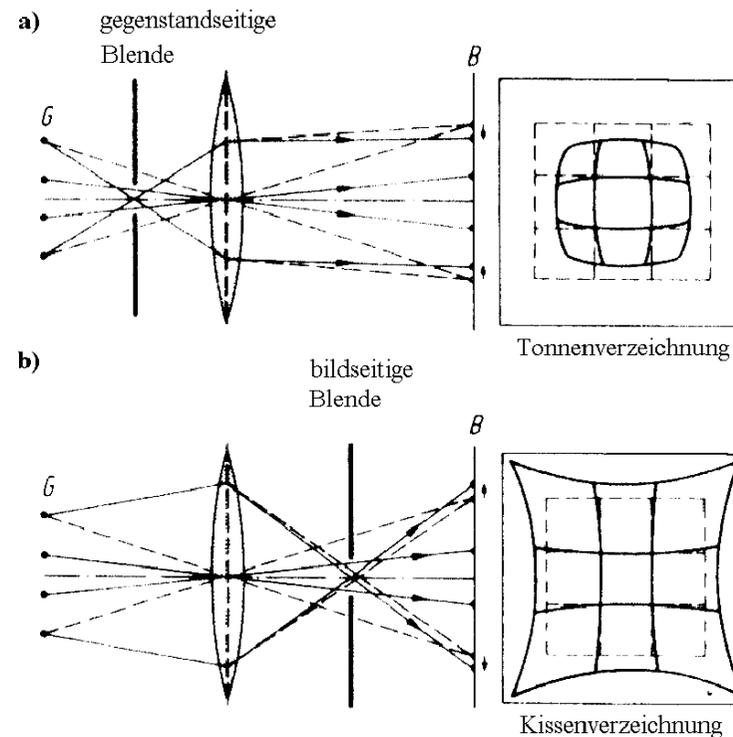
Hier gibt es bei Abwesenheit aller anderen Linsenfehler eine eindeutige Korrespondenz zwischen Objekt- und Bildpunkt. Eine Objektebene wird jedoch nicht in eine Ebene, sondern in eine gekrümmte Fläche abgebildet.

## 5 Verzerrung

Auch hier gibt es eine eindeutige Korrespondenz zwischen Objekt- und Bildpunkt. Die Vergrößerung der Abbildung hängt jedoch von der Entfernung von der optischen Achse ab.

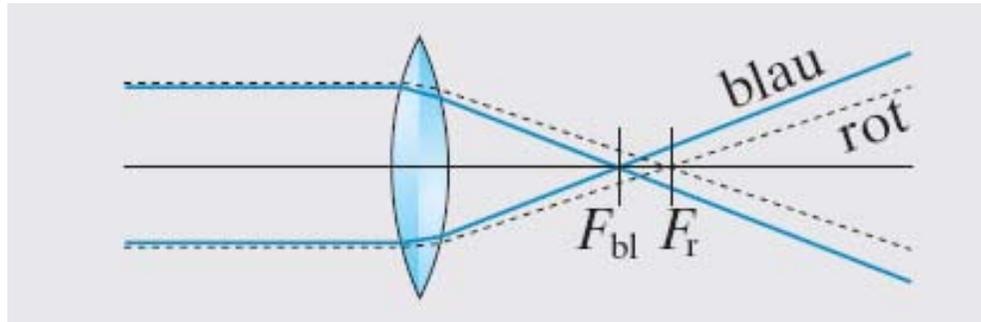


Verdeutlichung von Bildfeldwölbung (oben) und Verzerrung (rechts). Eine Abhilfe kann durch Blenden (Aperturen) erreicht werden.

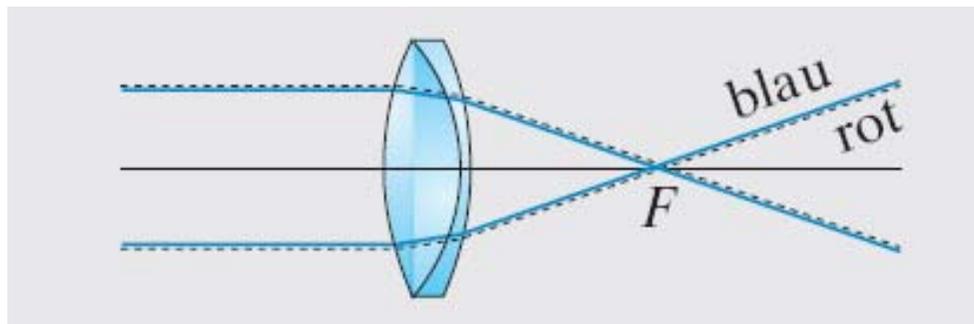


## Chromatische Aberration

Der Brechungsindex  $n$  hängt von der Wellenlänge  $\lambda$  ab. Dies führt zu wellenlängenabhängigen Brennpunkten bei Abbildungen mit nicht monochromatischem Licht.



Verdeutlichung der unterschiedlichen Brennpunkte für blaues, bzw. rotes Licht



Die chromatische Aberration kann durch eine Kombination einer Sammell- und einer Zerstreuungslinse aus Gläsern mit unterschiedlicher Dispersion beseitigt werden. Derartige Linsen heißen **Achromate**.