

## **2. Teil Wellenoptik**

# 0. Kurze Einleitung

## Geschichtliches zur Wellenoptik



**Thomas Young (1773-1829)**

Doppelspaltversuch



**Augustin-Jean Fresnel (1788-1827)**

Beugungstheorie (Poisson-Fleck)



**David Brewster (1781-1868)**

Untersuchung von Polarisierung, Reflexion, Brechung



**Armand-Hippolyte-Louis Fizeau (1819-1896)**

Erste terrestrische Messung der Lichtgeschwindigkeit



**Johann Christian Doppler (1803 - 1853)**

Untersuchung der Frequenzverschiebung bewegter Quellen



**James Clerk Maxwell (1831 - 1879)**

Maxwellsche Gleichungen, Voraussage elektromagnetischer Wellen.



**Joseph von Fraunhofer (1787 - 1826)**

Untersuchung von Beugungsphänomenen und Spektroskopie



**Michael Faraday (1791 - 1867)**

Untersuchung der Polarisationsdrehung im Magnetfeld



**Ernst Abbe (1840 - 1905)**

Theorie der Abbildung



**Albert A. Michelson (1852 - 1931)**

Michelson Interferometer



**Heinrich Rudolf Hertz (1847 - 1894)**

Erzeugung und Detektion von elektromagnetischer Strahlung



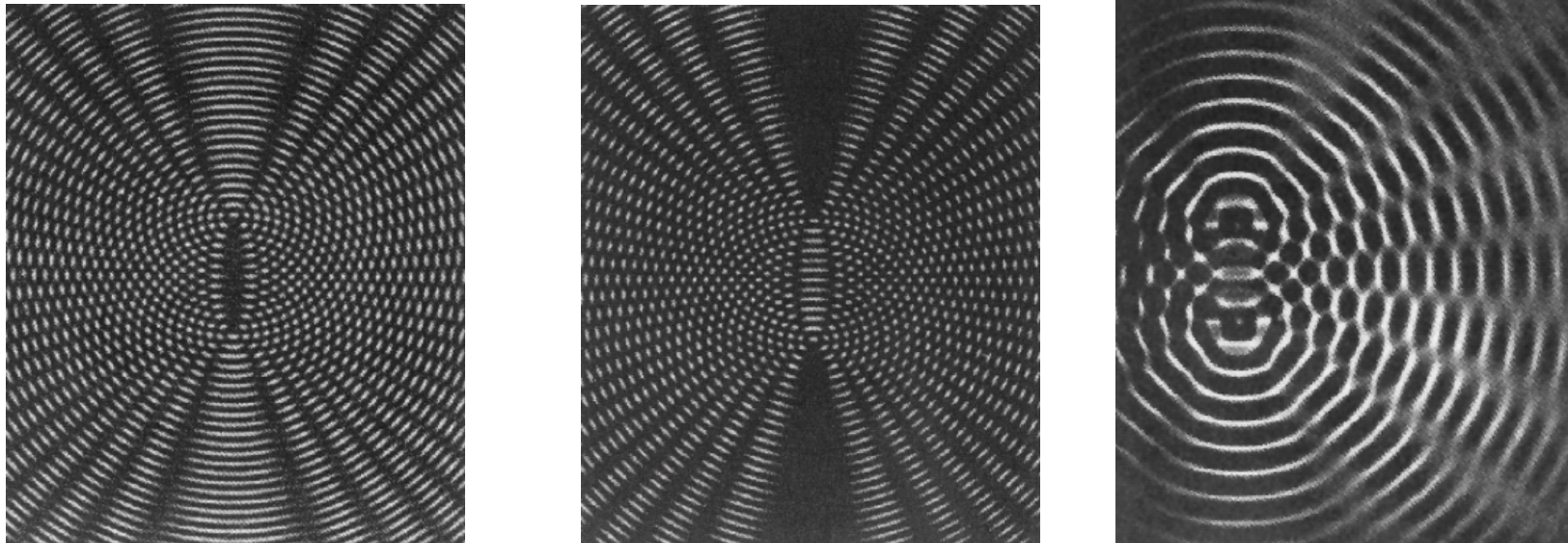
**Lord Rayleigh (John William Strutt) (1842 - 1919)**

Untersuchungen zur Lichtstreuung (blaue Himmelsfarbe)

# 1. Interferenz

## 1.1. Zeitliche und räumliche Kohärenz

Das Phänomen der Interferenz tritt bei der Überlagerung von Wellen auf. Die Beobachtung von Interferenz beweist daher den Wellencharakter (Young 1801).



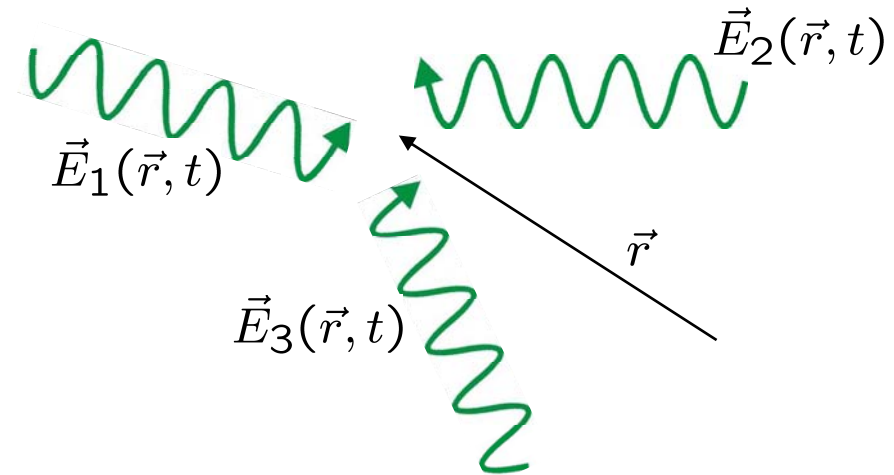
Verschiedene Moiremuster bei der Interferenz zweier Kugelwellen  
(z.B. Wasserwellen)

Mathematisch gesehen ergibt sich die Interferenz durch phasengerechte Aufsummation der komplexen Amplituden der verschiedenen interferierenden Wellenzüge.

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_i \vec{E}_i(\vec{r}, t)$$

Somit für die Intensität:

$$I(\vec{r}, t) = \left| \sum_i \vec{E}_i(\vec{r}, t) \right|^2$$



Im Spezialfall der Überlagerung zweier monochromatischer, ebener Wellen gleicher Frequenz:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_{01} \hat{\epsilon}_1 e^{i(\omega t - \vec{k}_1 \vec{r})} + E_{02} \hat{\epsilon}_2 e^{i(\omega t - \vec{k}_2 \vec{r} + \phi)}$$

Somit:

$$I(\vec{r}, t) = \underbrace{|E_{01}|^2 + |E_{02}|^2}_{\text{konstant}} + \underbrace{\hat{\epsilon}_1 \hat{\epsilon}_2 E_{01} E_{02} e^{i[(\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \vec{r} - \phi]} + c.c.}_{\text{Interferenzterm}}$$

Den phasenabhängigen Term bezeichnet man als **Interferenzterm**.

$$I_{12} = \hat{\epsilon}_1 \hat{\epsilon}_2 E_{01} E_{02} 2 \cos \delta$$

$$\delta = (\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \vec{r} - \phi \quad \text{Phasendifferenz}$$

Man kann auch schreiben:

$$I(\vec{r}, t) = I_1 + I_2 + \hat{\epsilon}_1 \hat{\epsilon}_2 2 \sqrt{I_1 I_2} \cos \delta$$

Sind die beiden Vektoren  $\hat{\epsilon}_1$ ,  $\hat{\epsilon}_2$  orthogonal, so tritt keine Interferenz auf.

Man unterscheidet (für den Fall  $I_1=I_2$ ):

$$\delta = 2m\pi \quad \Rightarrow \quad I = 4I_1 \quad \text{konstruktive Interferenz}$$

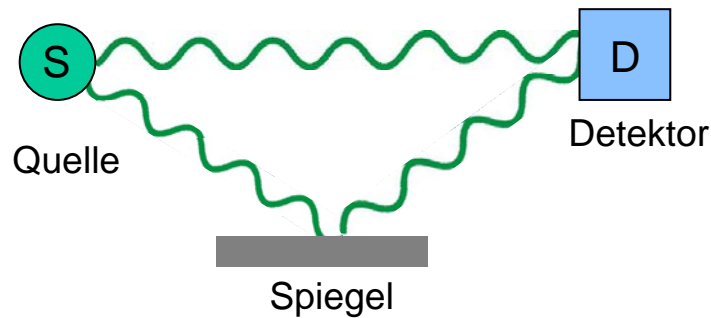
$$\delta = (2m + 1)\pi \quad \Rightarrow \quad I = 0 \quad \text{destruktive Interferenz}$$

$m$  ist eine ganze Zahl

Eine Welle hat im Allgemeinen nur eine beschränkte räumliche und zeitliche Interferenzfähigkeit, d.h. Kohärenz.

**Kohärenz = Interferenzfähigkeit**

### Zeitliche Kohärenz



$$E(r, t) = E_1(r, t) + E_2(r, t + \underbrace{\Delta L/c}_{\Delta \tau})$$

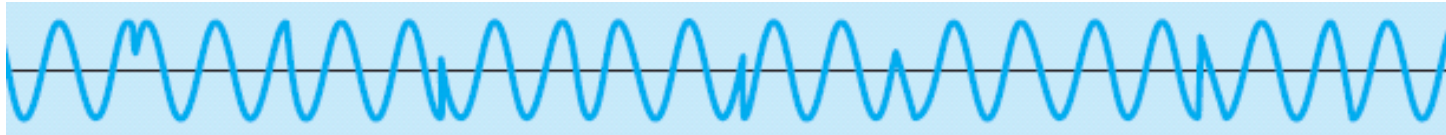
Die **Kohärenzzeit**  $\Delta \tau_c$  gibt an, über welche Zeit eine Welle als perfekte Sinuswelle angenommen werden kann.

Während der Kohärenzzeit  $\Delta \tau_c$  erfährt die Welle eine Phasenverschiebung von  $2\pi$ .

Mit der Kohärenzzeit definiert sich über die Lichtgeschwindigkeit  $c$  eine Kohärenzlänge:

$$\Delta l_c = c \Delta \tau_c$$

Cartoon-Darstellung einer endlichen Kohärenzlänge:



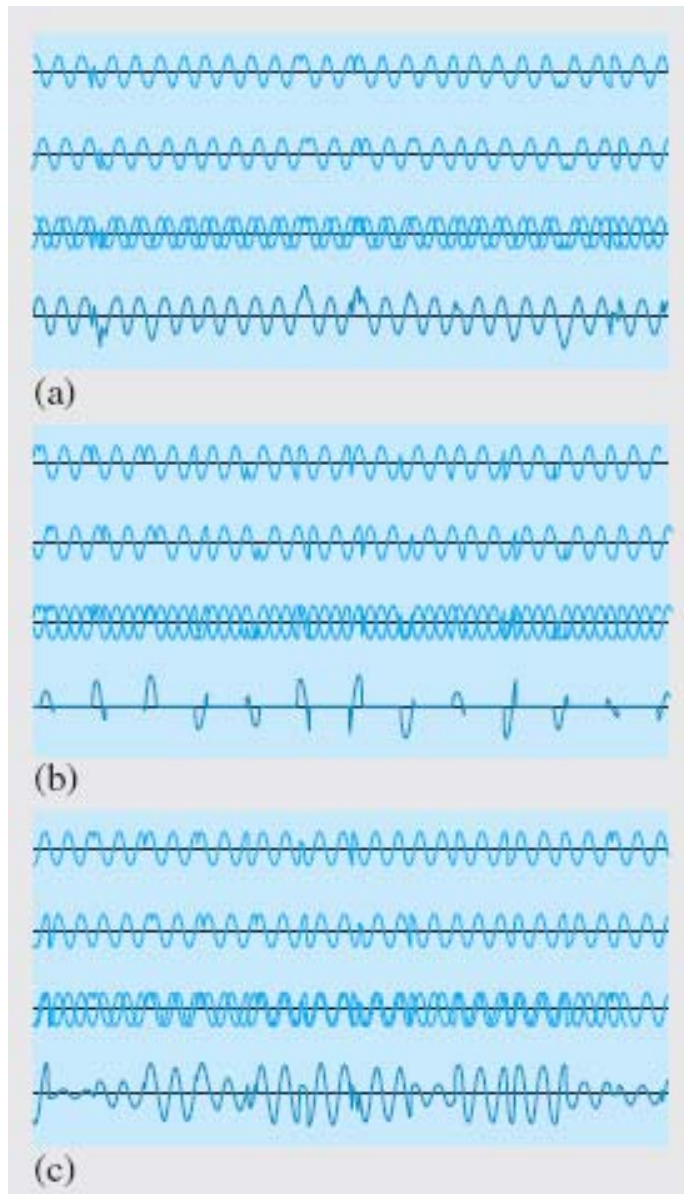
In einer perfekten Sinuswelle treten zu zufälligen Zeitpunkten **Phasensprünge** auf.

Ein physikalisches System, das diesem Modell nahe kommt, ist die Emission von Licht eines einzelnen Gasatoms in einem thermischen Gas (thermische Stöße).

Kohärenzlängen verschiedener Lichtquellen:

1)	Weisses Licht (Glühbirne)	$l_c \approx 1 \mu m$
2)	Spektrallinie einer Quecksilberdampf Lampe	$l_c \approx 1 cm$
3)	Laser	$l_c \approx 10 km$





Konstruktive Interferenz zweier Wellenzüge mit endlicher Kohärenzlänge (Auftreten von Phasensprüngen)

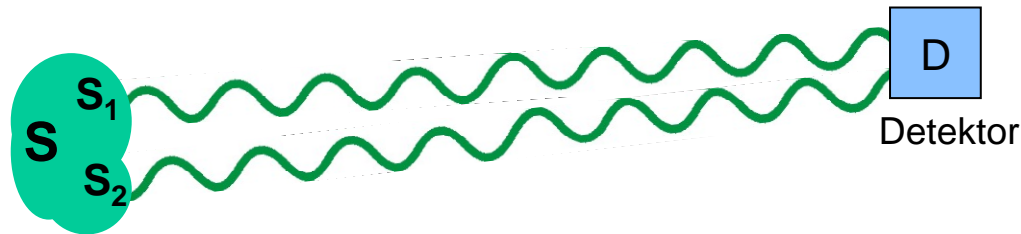
Destruktive Interferenz zweier Wellenzüge mit endlicher Kohärenzlänge (Auftreten von Phasensprüngen)

Destruktive Interferenz zweier Wellenzüge mit kurzer Kohärenzlänge (grossen Phasensprüngen)

Der Interferenzeffekt verschwindet, es addieren sich die mittleren Intensitäten.

## Räumliche Kohärenz

Das Problem der räumlichen Kohärenz stellt sich bei ausgedehnten Lichtquellen.



Die beiden Punkte  $S_1$  und  $S_2$  der ausgedehnten Lichtquelle  $S$  emittieren Wellenzüge, die keine feste Phasenbeziehung zueinander aufweisen.

$$E(r, t) = E_1(r, t) + E_2(r, t)e^{i\Delta\phi} \leftarrow \text{zufällige Phase!}$$

Eine punktförmige Lichtquelle ist räumlich kohärent.

Der Grad der Kohärenz kann durch ein Interferenzexperiment bestimmt werden. Dabei gibt die **Visibility**  $V$  ein Maß für den Kontrast des Interferenzmusters an:

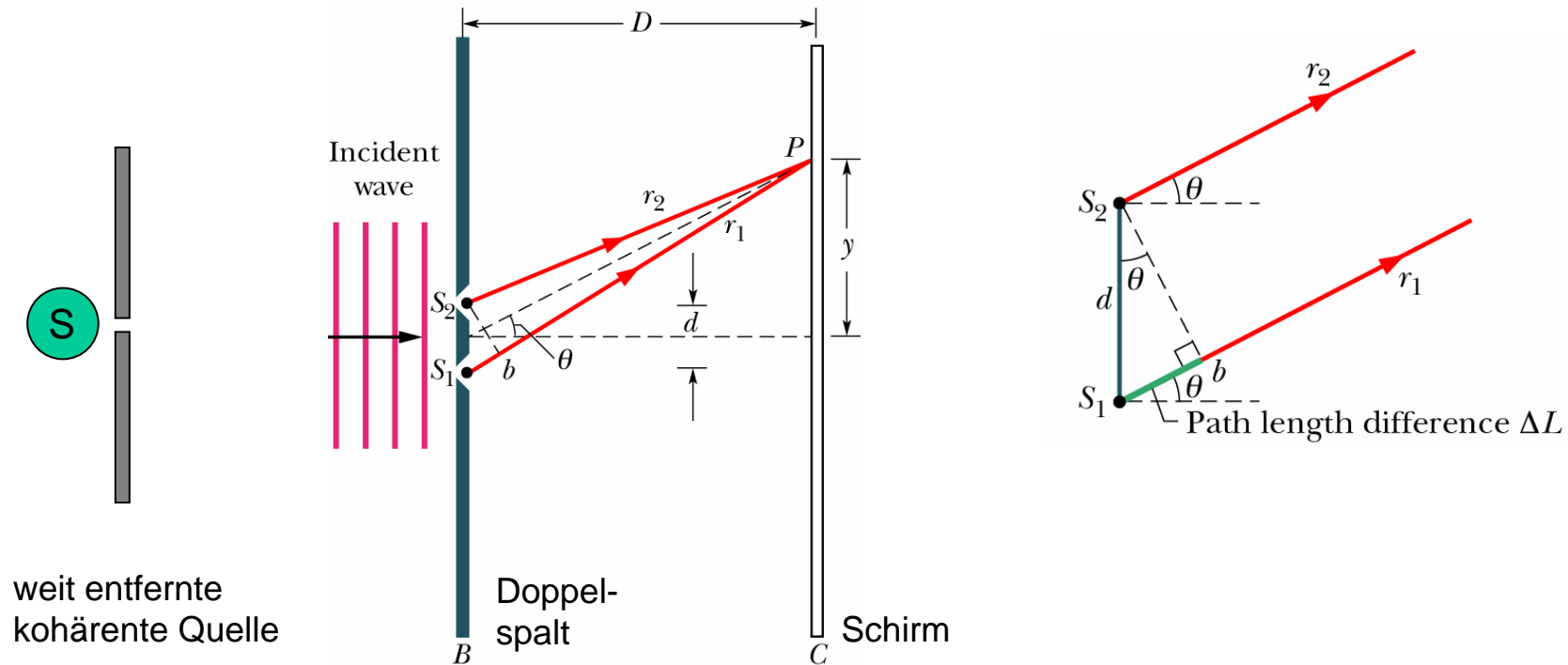
$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$$

Für vollständig kohärentes Licht ist  $V=1$ .

## 1.2. Der Youngsche Doppelspalt

Die von Young 1801 durchgeführten Experimente bewiesen den Wellencharakter von Licht.

Ein Doppelspalt erzeugt aus einer ebenen Welle zwei Kugelwellen.



Der **Gangunterschied**  $\Delta r$  am Punkt  $P$  ist:

$$\Delta r = r_1 - r_2 = d \sin \theta$$

Weit entfernt vom Spalt ist:

$$\sin \theta \approx y/D$$

**Konstruktive** Interferenz erhält man für einen Gangunterschied von

$$\Delta r = m\lambda$$

ganze Zahl  $\nearrow$   $m$   $\nwarrow$  Wellenlänge

Somit:

$$\sin \theta_m^c = m\lambda/d \quad \text{Winkel zum } m\text{-ten Maximum am Schirm}$$

**Destruktive** Interferenz erhält man für einen Gangunterschied von

$$\Delta r = (2m + 1)\lambda/2$$

Somit:

$$\sin \theta_m^d = (2m + 1)\lambda/(2d) \quad \text{Winkel zum } m\text{-ten Minimum am Schirm}$$

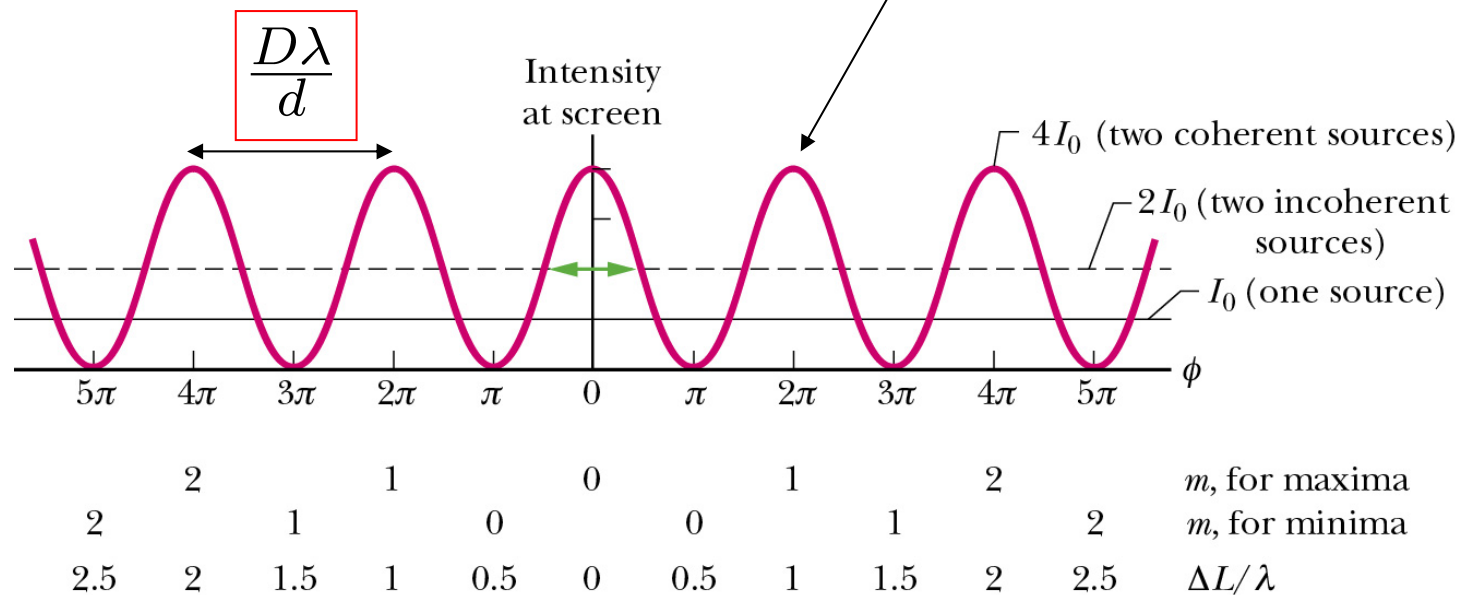
Die Intensität auf dem Schirm hinter dem Doppelspalt ergibt sich also zu:

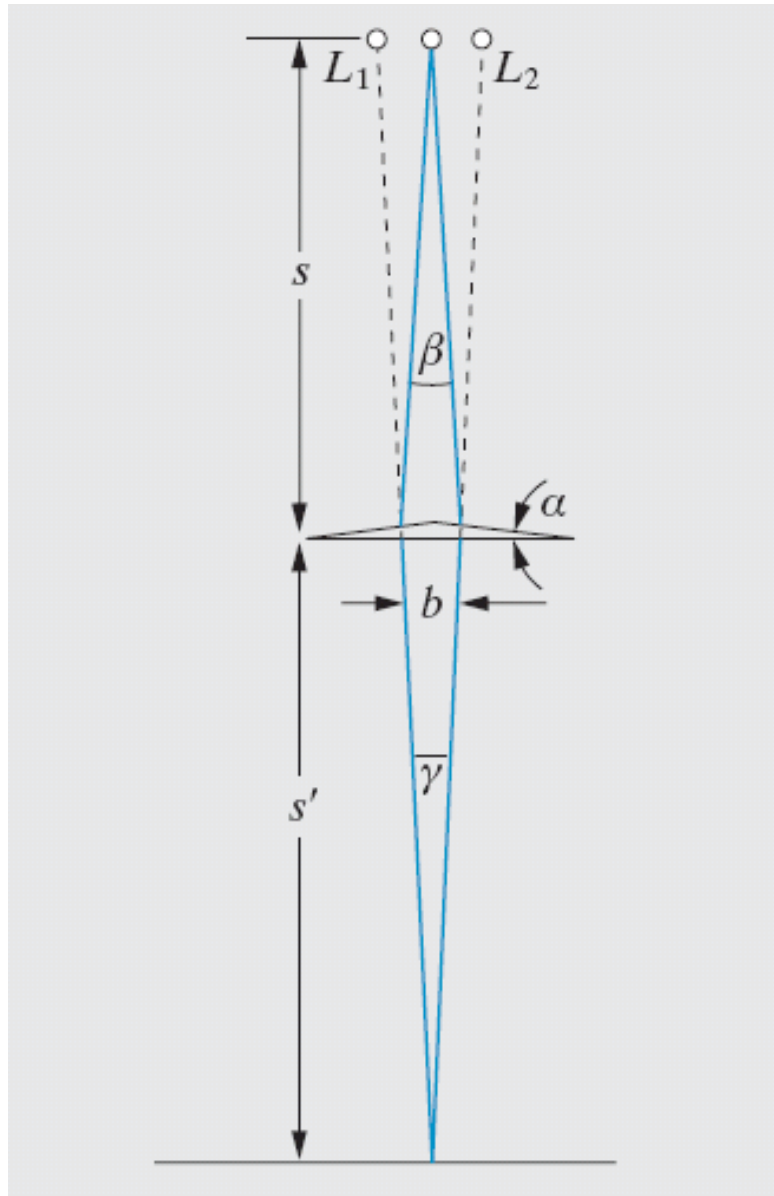
$$I(y) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(k\Delta r)$$

$$I(y) = \underset{I_1=I_2=I_0}{2I_0} (1 + \cos(k\Delta r)) = 4I_0 \cos^2 \frac{k\Delta r}{2}$$

mit  $\Delta r = d \sin \theta \approx dy/D$

$$I(y) = 4I_0 \cos^2 \frac{yd\pi}{D\lambda}$$



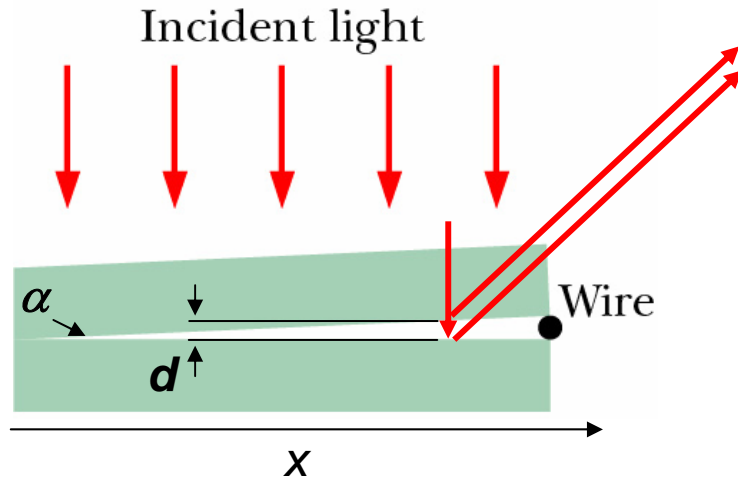


Eine dem Doppelspalt verwandte Interferenzanordnung ist das **Fresnelsche Biprisma**.

Das Biprisma entspricht dem Doppelspalt mit zwei virtuellen Spalten an den Stellen  $L_1$  und  $L_2$ .

### 1.3. Interferenz an Schichten

An Grenzflächen kommt es meist zu einer Strahlaufspaltung.  
Die entstehenden Teilstrahlen können interferieren.



Interferenz an einer Keilschicht

Betrachtet man nur die Interferenz von zwei Teilstrahlen (Reflexion an der ersten Oberfläche vernachlässigt) so folgt für den Phasenunterschied der beiden Strahlen:

$$\Delta\phi = k2d_m - \pi = m2\pi$$

Phasensprung bei Reflexion  
am optisch dichteren Medium

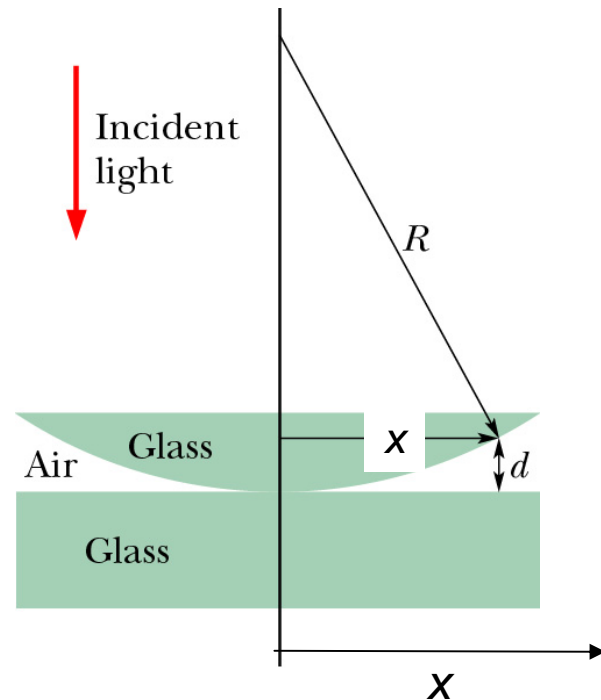
Bedingung für  
konstruktive Interferenz

Insgesamt also:  $d_m = (m + \frac{1}{2})\lambda/2 = (2m + 1)\lambda/4$

Der Abstand in x-Richtung zwischen den Maxima ist  $\Delta X = \lambda/(2\alpha)$

Die auftretenden Streifen nennt man auch **Fizeau-Streifen**.

Ein spezieller Fall ist die Interferenzerscheinung beim Kontakt einer sphärischen mit einer ebenen Fläche:



Es ist:

$$x^2 = R^2 - (R - d)^2$$

$$x^2 = 2Rd - d^2 \approx 2Rd$$

$R \gg d$

Mit

$$d_m = (m + \frac{1}{2})\lambda/2$$

folgt für den Abstand zweier Interferenzringe:

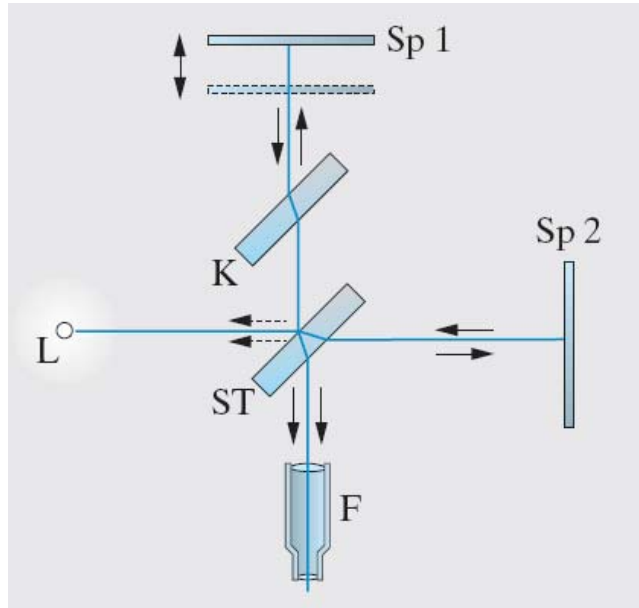
$$x_m = \sqrt{(m + \frac{1}{2})\lambda R}$$

Die auftretenden Interferenzringe nennt man auch **Newton-Ringe**.



## 1.4. Interferometer

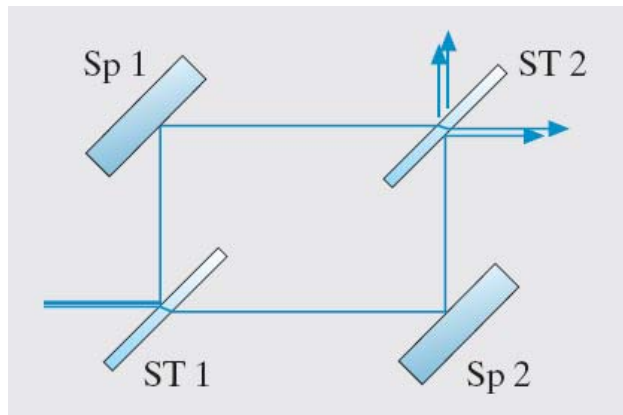
Interferometer stellen eine Beziehung zwischen dem Interferenzmuster und der Wellenlänge her. Sie können also für die Messung von Wellenlängen benutzt werden.



### Das Michelson-Interferometer

An  $F$  beobachtet man Ringe, die sich bei Bewegung vom Spiegel Sp1 bewegen.

Der Kompensator kompensiert den dreifachen Durchgang des transmittierten Strahls durch den Strahlteiler  $ST$ .



### Das Mach Zehnder-Interferometer

Im Mach-Zehnder werden die beiden Ein- und Ausgänge getrennt.

Auch ist die Verwendung von streifendem Einfall auf die Spiegel möglich (z.B. bei Neutronenstrahlen).

## 1.4. Interferometer

### 1.4.1 Mehrstrahlinterferenz

Die Interferenz von mehreren Strahlen ist ein typisches Problem beim Lichteinfall auf eine dielektrische Platte.

Mit der einfallenden Welle

$$E_0 e^{i\omega t}$$

Und den **Amplituden-Reflexions-** bzw. **Transmissions-Koeffizienten**  $r$ ,  $t$  gilt ohne Absorption:

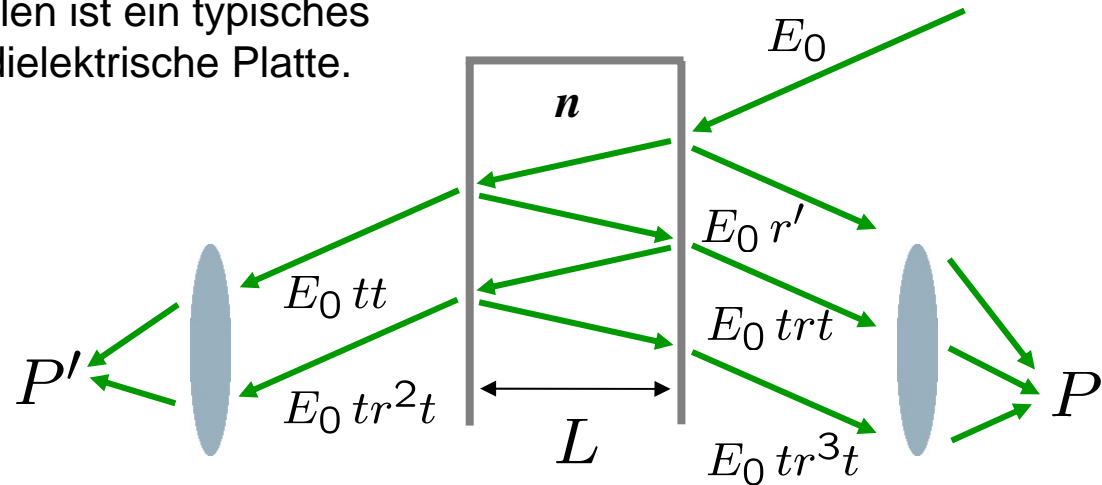
$$E_{1r} = E_0 r' e^{i\omega t}$$

$$E_{2r} = E_0 trt e^{i(\omega t - \delta)}$$

$$E_{3r} = E_0 tr^3 t e^{i(\omega t - 2\delta)}$$

$\vdots$

$$E_{Nr} = E_0 tr^{(2N-3)} t e^{i(\omega t - (N-1)\delta)}$$



$\delta = 2k_0 L$  ist bei senkrechtem Einfall die beim einmaligen Durchlaufen der Platte aufgesammelte Phase.

Die Summe aller Teilstrahlen in **P** lässt sich schreiben als:

$$E_r = E_0 e^{i\omega t} \left[ r' + r t^2 e^{-i\delta} \left[ 1 + r^2 e^{-i\delta} + (r^2 e^{-i\delta})^2 \right] \right. \\ \left. \dots + (r^2 e^{-i\delta})^{N-2} \right]$$

$$\begin{aligned} &\xrightarrow{\text{geometrische Reihe!}} E_0 e^{i\omega t} \left[ r' + \frac{r t^2 e^{-i\delta}}{1 - r^2 e^{-i\delta}} \right] \xrightarrow{\text{ohne Absorption mit } r' = -r; \quad r'r + t^2 = 1} E_0 e^{i\omega t} \left[ \frac{-r(1 - e^{-i\delta})}{1 - r^2 e^{-i\delta}} \right] \end{aligned}$$

Die Intensität der reflektierten Welle ist dann:

$$I_r = I_0 \frac{2r^2(1 - \cos \delta)}{(1 + r^4) - 2r^2 \cos \delta} = I_0 \frac{[2r/(1 - r^2)]^2 \sin^2(\delta/2)}{1 + [2r/(1 - r^2)]^2 \sin^2(\delta/2)}$$

↑  
 $\cos \delta = 1 - 2 \sin^2(\delta/2)$

Analog folgt für die transmittierte Leistung:

$$I_t = I_0 \frac{1}{1 + [2r/(1-r^2)]^2 \sin^2(\delta/2)}$$

offensichtlich ist:

$$I_0 = I_t + I_r$$

Ein Maximum für die transmittierte Leistung existiert für:  $\delta = 2\pi m$

ganze Zahl

$$I_{t,max} = I_0$$

$$I_{r,min} = 0$$

Ein Maximum für die reflektierte Leistung existiert für:  $\delta = (2m + 1)\pi$

ganze Zahl

$$I_{t,min} = I_0 \frac{(1-r^2)^2}{(1+r^2)^2}$$

$$I_{r,max} = I_0 \frac{4r^2}{(1+r^2)^2}$$

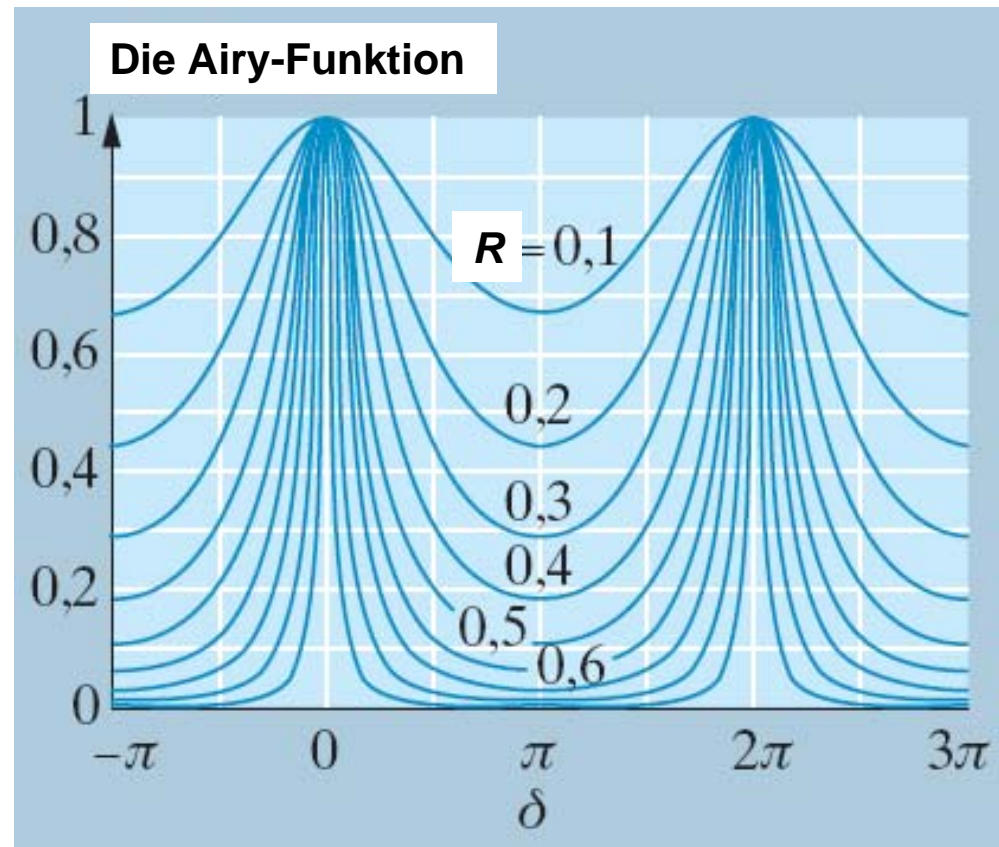
Die Gleichungen für die transmittierte und reflektierte Leistung lassen sich mit dem **Finesse-Faktor**  $F$  schreiben als:

$$\frac{I_t}{I_0} = 1 - \frac{I_r}{I_0} = \frac{1}{1 + F \sin^2(\delta/2)} = A(\delta) \quad \text{Airy-Funktion}$$

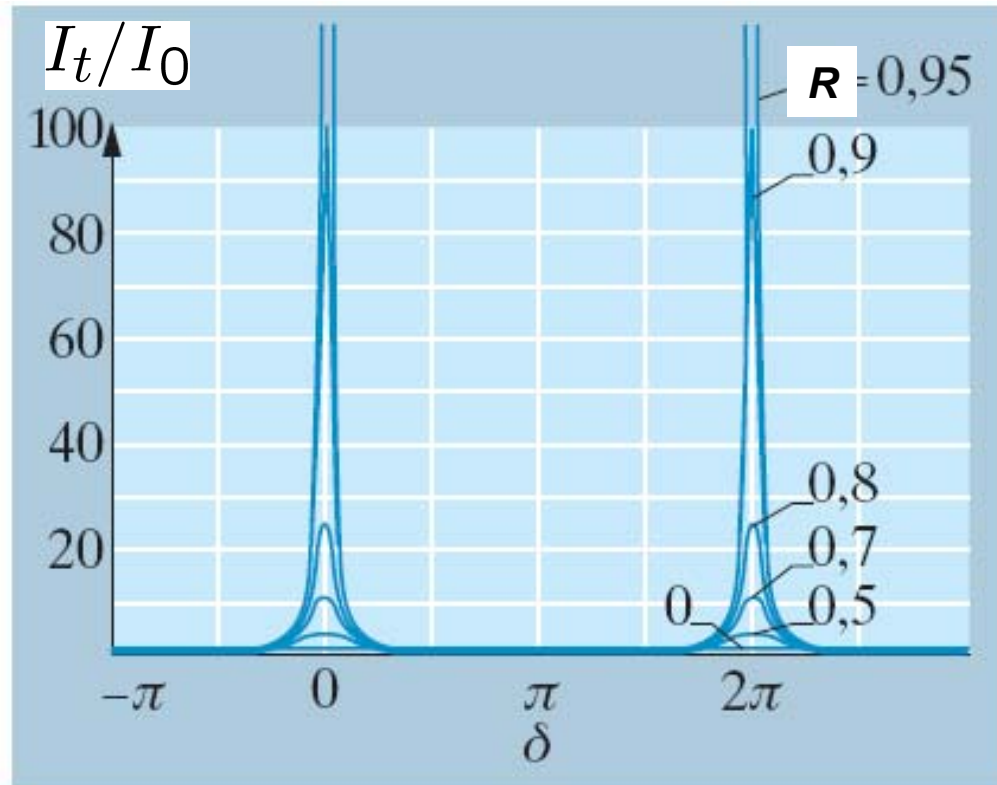
mit:

$$F = \left( \frac{2r}{1-r^2} \right)^2 = \frac{4R}{(1-R)^2}$$

$R = r^2$  ist hierbei der **Reflexionskoeffizient** (der Intensität)

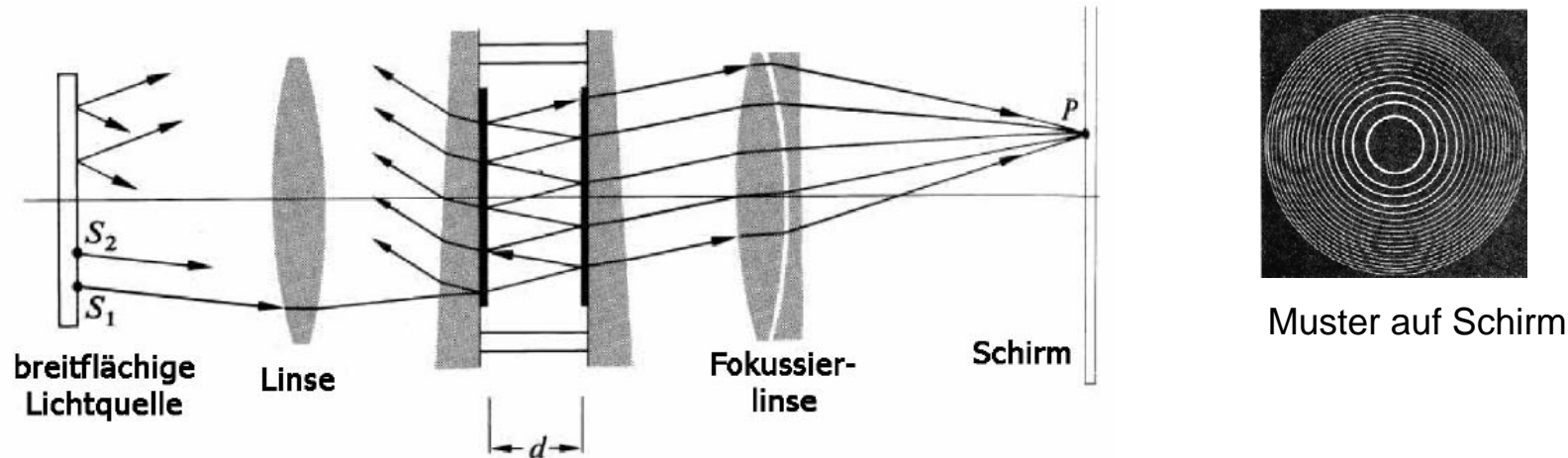


Im folgenden Diagramm ist die Airy-Funktion so definiert, dass die einfallende Intensität bei allen Kurven gleich ist.



### 1.4.2 Spektroskopie mit dem Fabry-Perot-Interferometer

Mehrstrahlinterferenz an einer Platte (**Etalon**) oder zwei planparallelen, teilverspiegelten (z.B. durch Metallisierung) Flächen wird im **Fabry-Perot-Interferometer** genutzt.



Am Schirm  $S$  beobachtet man konzentrische Ringe.

Ein Maß für die Schärfe der **Airy-Ringe** (oder den Kontrast des Interferenzmusters) ist ihre Halbwertsbreite  $\Delta$ . Die Breite bezeichnet man auch als **Finesse  $F$** .

Aus der Airy-Funktion leitet man ab:

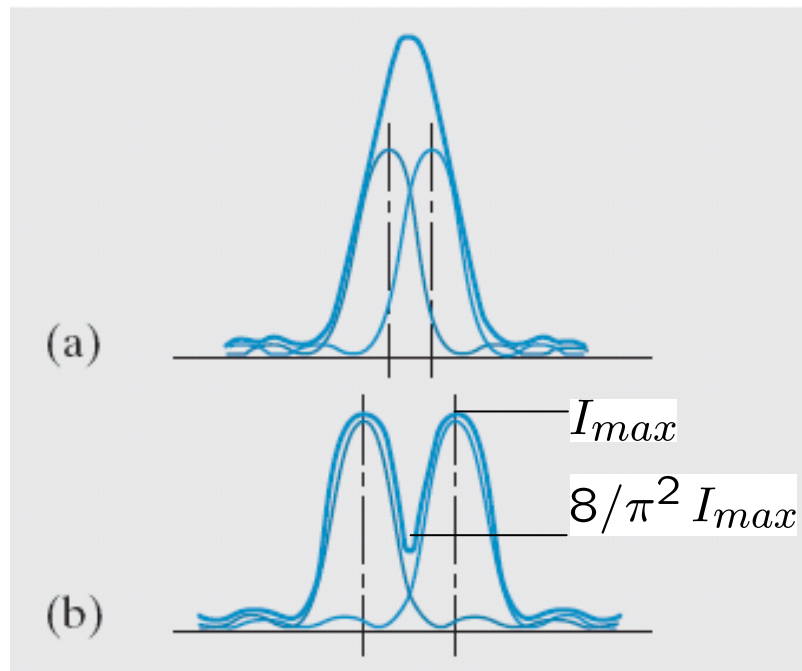
$$F = \frac{2\pi}{\Delta} = \frac{\pi\sqrt{F}}{2}$$

Zusammenhang zwischen Finesse und Finesse-Faktor

Fabry-Perot-Etalons mit Finessen von 1000 sind leicht erhältlich. Die besten Fabry-Perot-Interferometer haben Finessen  $>10^6$ .

Das Fabry-Perot-Interferometer kann zur Vermessung von Spektrallinien = **Spektroskopie** eingesetzt werden.

Zwei benachbarte Spektrallinien  $\lambda_0$  und  $\lambda_0 + \Delta\lambda_0$  führen zu zwei benachbarten Airy-Ringen.



Zwei benachbarte Spektrallinien heißen gerade noch **auflösbar**, wenn der Sattelpunkt zwischen den beiden Maxima das  $8/\pi^2$ -fache der Maxima ist.

In diesem Fall ist:

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda_{min}} = F \frac{2nd}{\lambda}$$

$$\Delta\nu_{min} = \frac{c}{F2nd}$$

Bei  $\lambda$  und  $c$  handelt es sich um die Wellenlänge im Medium.  $n$  ist der Brechungsindex des Mediums

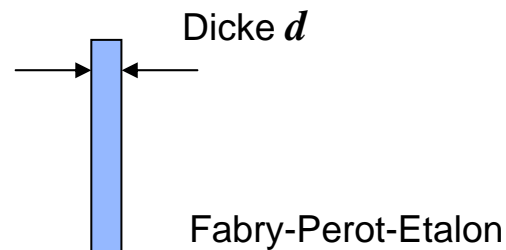


Wächst die Differenz benachbarter Spektrallinien  $\lambda_0$  und  $\lambda_0 + \Delta\lambda_0$  weiter an, so überlappt irgendwann der Beugungsring (m+1)-ter Ordnung (von  $\lambda_0$ ) mit dem Beugungsring m-ter Ordnung (von  $\lambda_0 + \Delta\lambda_0$ ).

Dieser Unterschied  $(\Delta\lambda)_{FSR}$  heißt **freier Spektralbereich** oder **FSR**.

Offensichtlich ist:

$$(\Delta\lambda)_{FSR} = \frac{\lambda^2}{2nd}$$



Für ein gutes Auflösungsvermögen eines Fabry-Perot-Interferometers muss  $(\Delta\lambda)_{min}$  klein und  $(\Delta\lambda)_{FSR}$  groß sein, also muss

$$\frac{(\Delta\lambda)_{FSR}}{(\Delta\lambda)_{min}} = F$$

so groß wie möglich sein.

## 1.5. Anwendung von Vielstrahlinterferenz

Eine spezielle Anwendung von Vielstrahlinterferenz an dünnen Schichten ist die Entspiegelung von Oberflächen.

Bei senkrechtem Einfall reflektiert eine Glasschicht etwa 4% des einfallenden Lichts.

Beschichtet man die Oberfläche bei Einfall von Licht der Wellenlänge  $\lambda_0$  mit einer dielektrischen Schicht der Dicke

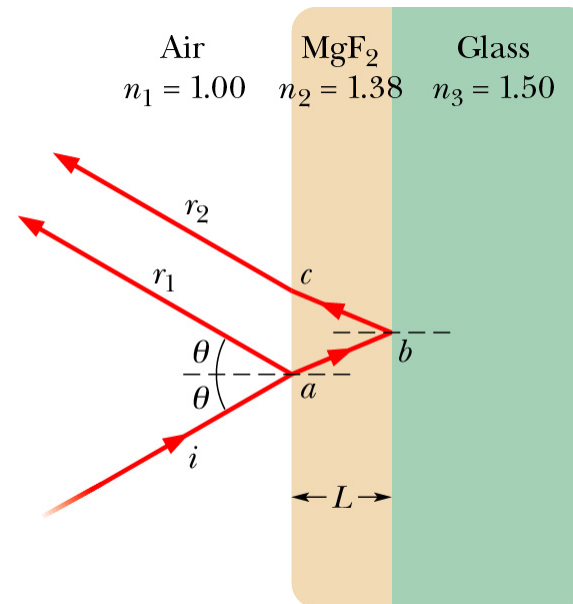
$$L = (1/4) (\lambda/n_2) = 1/4 \lambda_2$$

so folgt für den senkrechten Einfall (ohne Beweis):

$$R = \frac{(n_1 n_3 - n_2^2)^2}{(n_1 n_3 + n_2^2)^2}$$

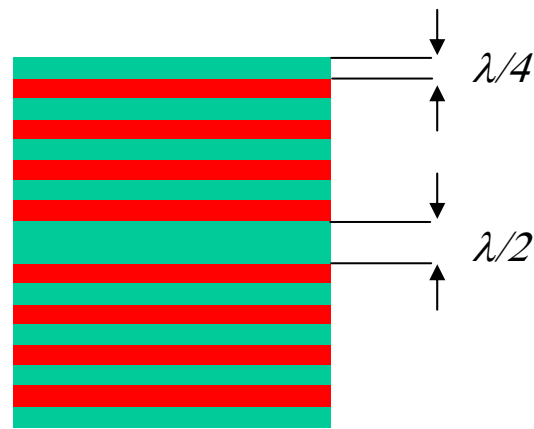
Somit  $R = 0$  falls  $n_2 \stackrel{\text{geometrisches Mittel!}}{=} \sqrt{n_1 n_3}$

Bei Glas lässt sich aus diesem Grund z.B. eine  $\text{MgF}_2$ -Schicht der Dicke  $\lambda/4$  aufbringen.

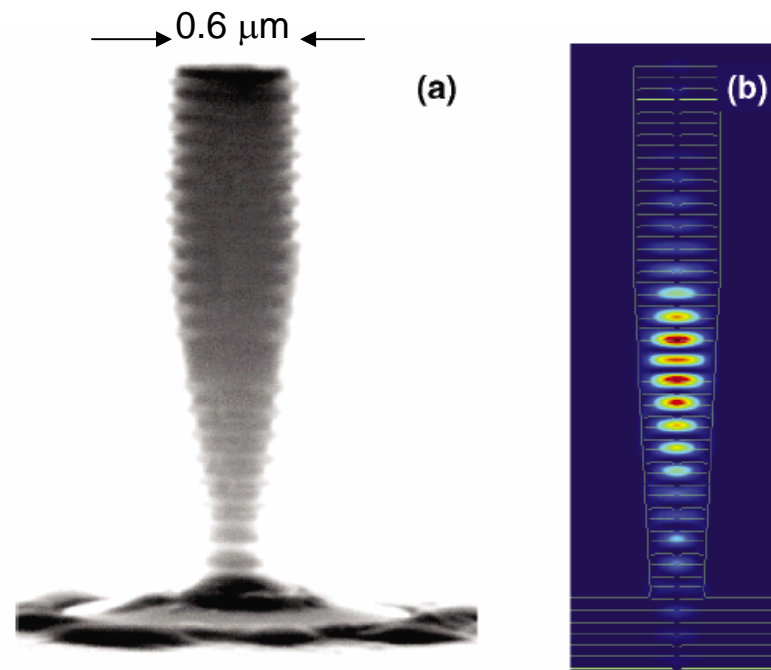


Mit Hilfe von dielektrischen Schichten lassen sich dielektrische Spiegel mit sehr hohem Reflexionsgrad herstellen.

Bragg-Spiegel bestehen aus einer alternierenden Folge von Schichten mit unterschiedlichem Brechungsindex der Dicke  $\lambda/4$ .



Ein Bragg-Resonator aus zwei hochreflektierenden Bragg-Spiegeln



SEM-Bild und Simulation der Feldverteilung in einem Bragg-Mikroresonator [M. Pelton et al., PRL (2002)]

Bragg-Spiegel werden z.B. in VCSELn (vertical cavity surface emitting laser) eingesetzt.

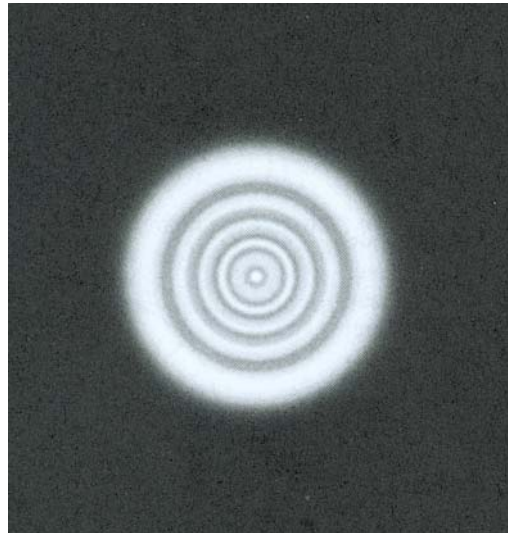
## 2. Beugung

### 2.1. Phänomenologie

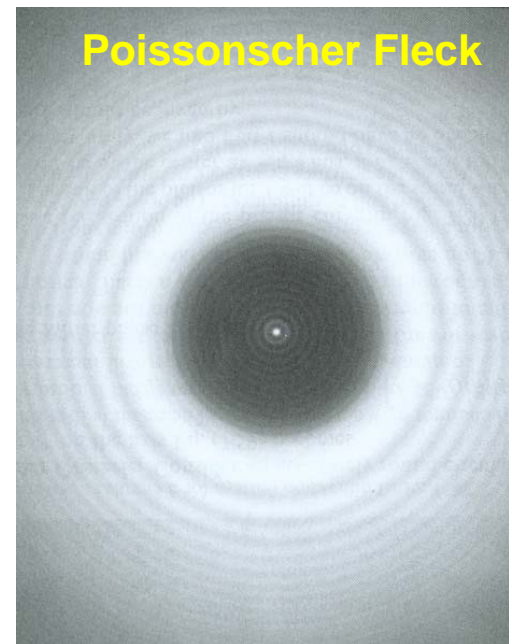
Bei Interferenzerscheinungen mit vielen Einzelstrahlen spricht man von Beugung:

Interferenz = Interferenz weniger Wellen  
Beugung = Interferenz vieler Wellen

Einige Beispiele:

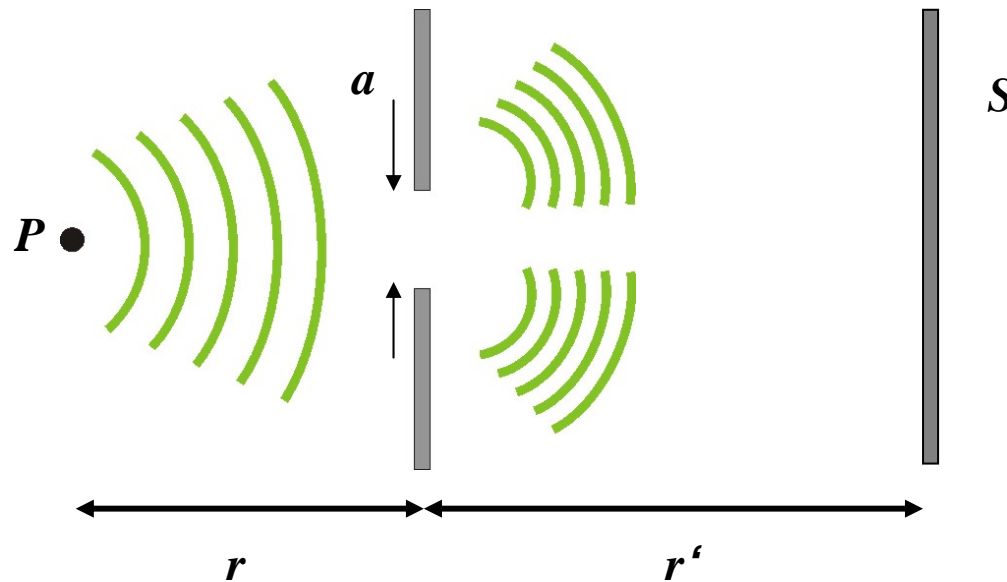


Beugungerscheinung an einer kreisförmigen Apertur



Beugungerscheinung an einer kreisförmigen Scheibe

Man unterscheidet bei der Beugung zwei Bereiche:

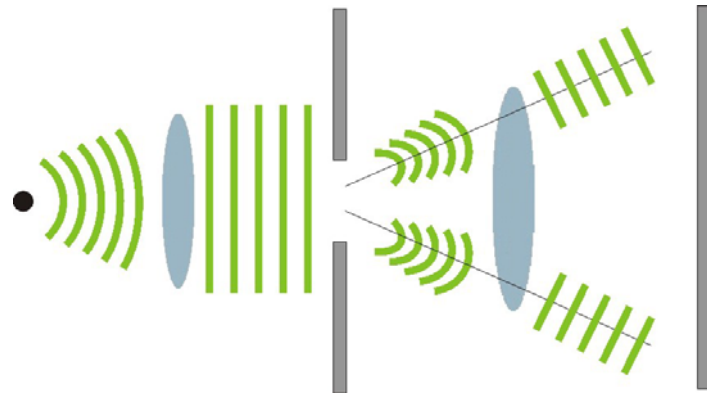


Punktquelle  $P$ , Schirm  $S$   
und Hindernis  $a$   
bei einem allgemeinen  
Beugungsproblem

1) **Fraunhofer-Beugung** oder Fernfeldbeugung

$$\min(r', r) > a^2/\lambda \quad (a \text{ sei eine typische Dimension des beugenden Objekts})$$

- Die Blende wird von ebenen Wellen ausgeleuchtet.
- Am Schirm interferieren ebene Wellen.
- Linearer Zusammenhang zwischen Weglängendifferenzen und Ausmaßen der Blende.



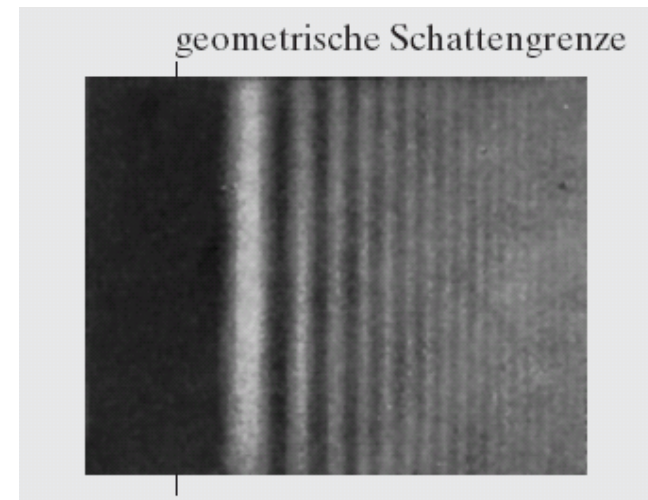
Realisierung der Fraunhofer-Beugung durch geeignete Linsenanordnung:

Punktquelle unendlich weit vom Hindernis entfernt, Beleuchtung des Schirms mit ebenen Wellen.

## 2) Fresnel-Beugung oder Nahfeldbeugung

$$\min(r', r) \leq a^2/\lambda$$

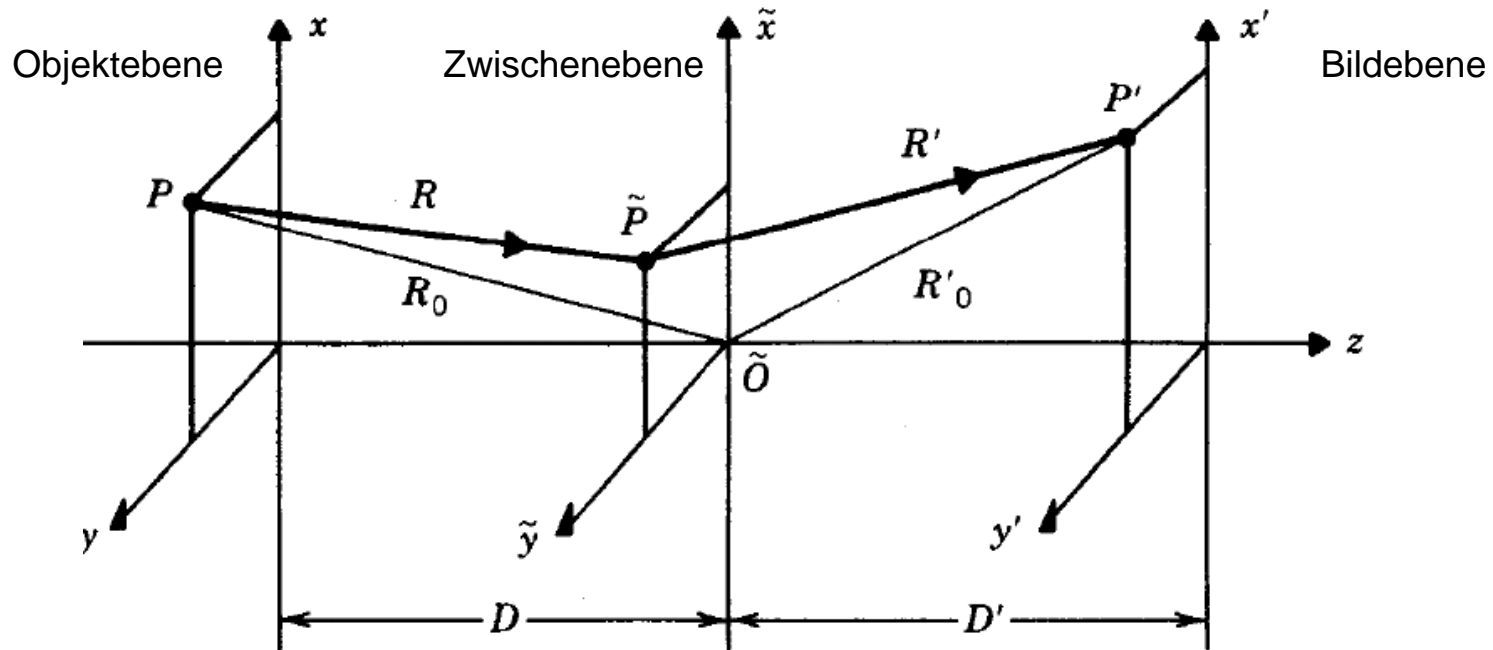
- Die Krümmung der Wellenfronten spielt eine Rolle.
- Typisches Regime bei der Beugung an einer Kante.
- Die Fresnel-Beugung erfordert bei der theoretischen Beschreibung eine bessere Näherung als die Fraunhofer-Beugung.



Typische Beugung im Nahfeldbereich: Beugung an einer Kante

## 2.2. Das Kirchhoffsche Beugungsintegral

Geometrie eines Beugungsproblems:



Problemstellung: Es existieren Punktquellen in der Objektebene. Wie ist nun die elektrische Feldstärke (oder die Intensität) in der Bildebene (z.B. am Punkt  $P'$ ), wenn sich ein Hindernis, eine Apertur, eine Linse, ... in der Zwischenebene befindet?

Die Lösung dieses allgemeinen Problems kann allgemein aus den Maxwell-Gleichungen abgeleitet werden.

Die Lösung ist die Fresnel-Kirchhoffsche Beugungsformel.

Sei nun in einem speziellen Fall am Punkt  $P$  eine Punktquelle vorhanden und in der Zwischenebene eine Apertur aufgestellt. Nach der Fresnel-Kirchhoffschen Theorie ergibt sich dann für die Feldstärke an einem Punkt  $P'$ :

$$E' = \underbrace{E_0 e^{i\omega t}}_{\text{Amplitude der Punktquelle}} \int \underbrace{\tau}_{\text{Transmissionsfunktion}} \underbrace{\frac{e^{-ikR}}{R}}_{\text{Amplitude der von } P \text{ ausgehenden Kugelwelle in Zwischenebene an } \tilde{P}} \underbrace{\frac{e^{-ikR'}}{R'}}_{\text{Amplitude der von } \tilde{P} \text{ ausgehenden Kugelwelle in Bildebene am Punkt } P'} d\tilde{r}^2$$

Integral über geschlossene Fläche um  $P'$

Gesucht wird nun eine Näherungsformel für:

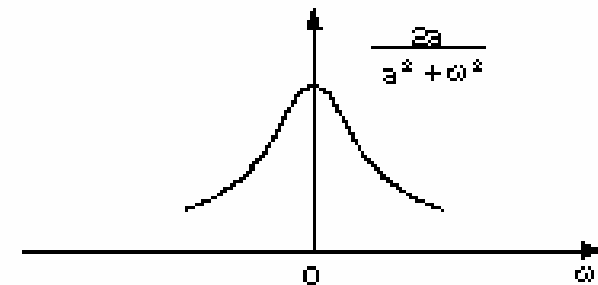
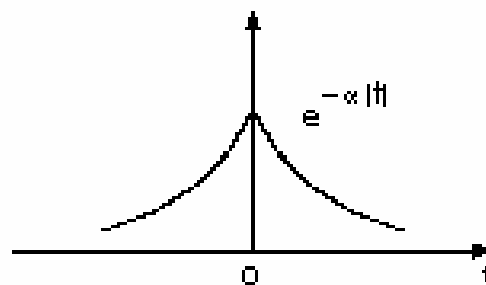
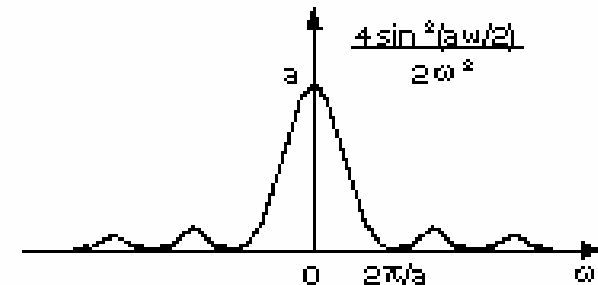
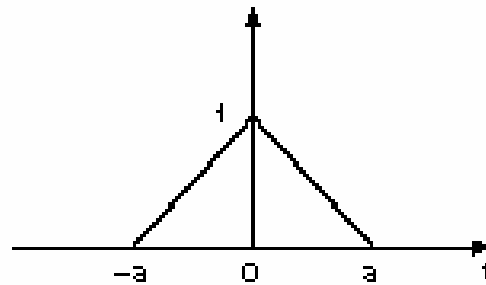
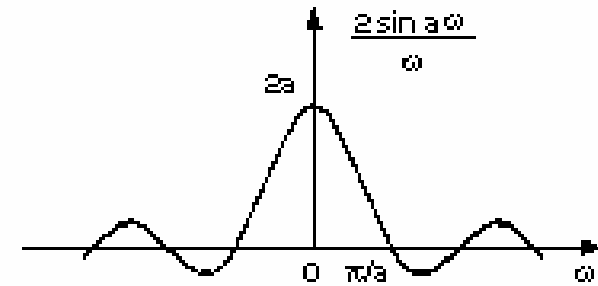
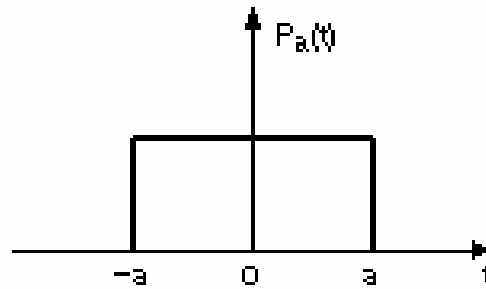
$$E' = E_0 e^{i\omega t} \int \tau \frac{e^{-ik(R+R')}}{RR'} d\tilde{r}^2$$



## 2.2.a Einschub: Beispiele von Fourier- Transformationen

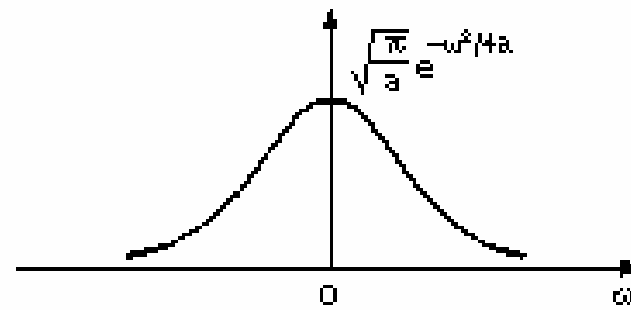
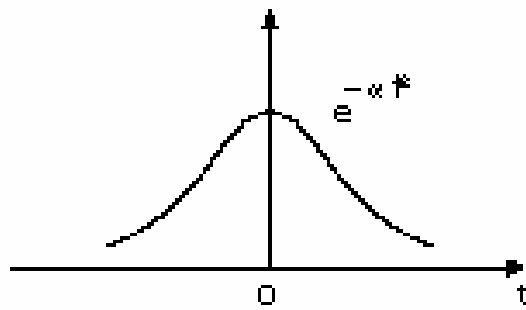
$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$



$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$



## 2.3. Fraunhofer-Beugung

In der Fraunhofer-Theorie wird nun eine lineare Näherung gesucht:

Lineare Näherung für  $(R + R')$  und  $1/(RR')$  durch die Aperturkoordinaten  $\tilde{x}$  und  $\tilde{y}$  :

Nach kurzer Rechnung folgt mit der Bedingung

$$|\tilde{x}| \ll \sqrt{R_0 \lambda}, \quad |\tilde{x}| \ll \sqrt{R'_0 \lambda}$$

$$|\tilde{y}| \ll \sqrt{R_0 \lambda}, \quad |\tilde{y}| \ll \sqrt{R'_0 \lambda}$$

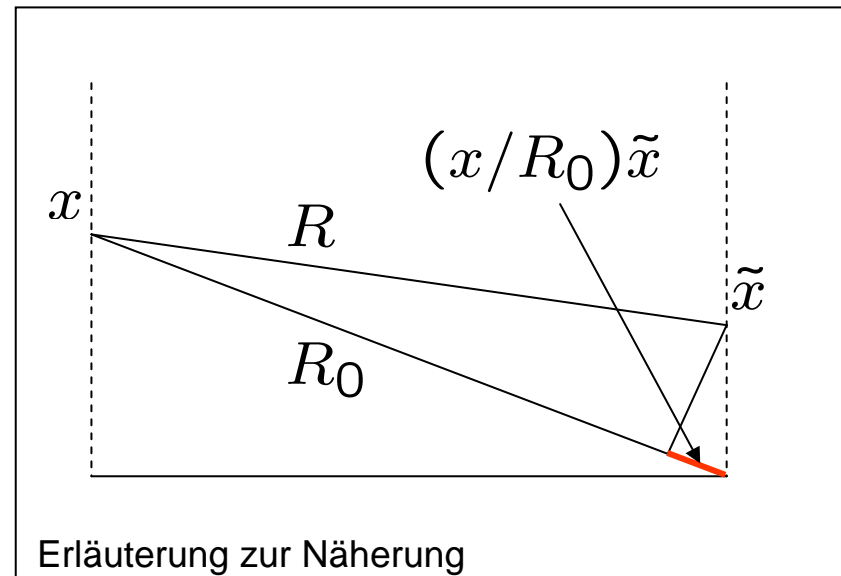
$$R \simeq R_0 - \left(\frac{x}{R_0}\right) \tilde{x} - \left(\frac{y}{R_0}\right) \tilde{y}$$

$$R' \simeq R'_0 - \left(\frac{x'}{R'_0}\right) \tilde{x} - \left(\frac{y'}{R'_0}\right) \tilde{y}$$

und

$$1/(RR') \simeq (1/R_0 R'_0)$$

(Erinnerung  $k = 2\pi/\lambda$ )



Zur Vereinfachung kann man neue Parameter einführen:

$$u = - \left( \frac{x}{R_0} + \frac{x'}{R'_0} \right) \frac{1}{\lambda} \quad v = - \left( \frac{y}{R_0} + \frac{y'}{R'_0} \right) \frac{1}{\lambda}$$

Somit:  $R + R' = (R_0 + R'_0) + (u\tilde{x} + v\tilde{y})\lambda$

und  $e^{-ik(R+R')} = e^{\Phi_0} e^{-i2\pi(u\tilde{x}+v\tilde{y})} \quad \Phi_0 = -ik(R_0 + R'_0)$

Schließlich gelangt man zum Resultat für die Fraunhofer-Beugung:

$$E'(u, v) = E_0 e^{i\omega t} \frac{e^{\Phi_0}}{R_0 R'_0} \int \tau(\tilde{x}, \tilde{y}) e^{-i2\pi(u\tilde{x}+v\tilde{y})} d\tilde{x} d\tilde{y}$$

Das Beugungsbild in der Fraunhofer-Beugung ist die Fouriertransformierte der Transmissionsfunktion!

## 2.4. Beugung an Aperturen/Auflösungsvermögen

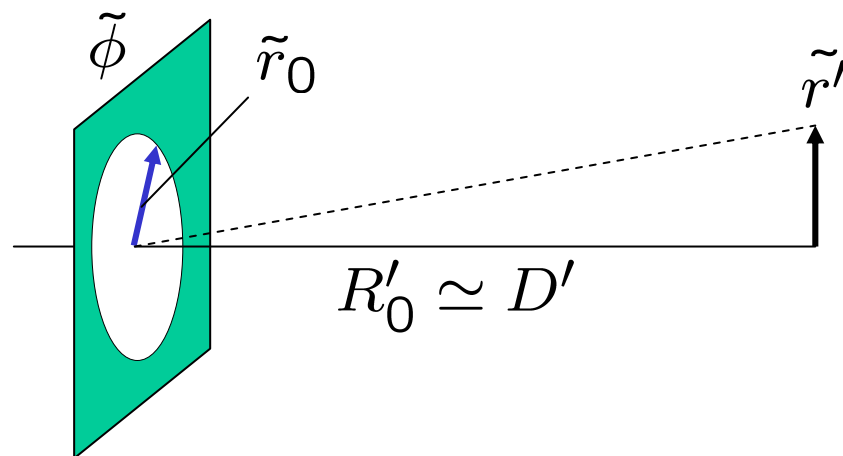
Die Beugungsfiguren in der Fraunhofer-Beugung können nun sehr einfach durch Fouriertransformation berechnet werden.

### Beispiel: Beugung an einer kreisförmigen Öffnung (Apertur)

Die kreisförmige Öffnung hat die Transmissionsfunktion:

$$\begin{aligned} \tau(\tilde{r}, \tilde{\phi}) &= 1 && \text{für } \tilde{r} < \tilde{r}_0 \\ \tau(\tilde{r}, \tilde{\phi}) &= 0 && \text{sonst} \end{aligned}$$

Transmissionsfunktion einer kreisförmigen Apertur



Geometrie zur Beugung an einer kreisförmigen Öffnung

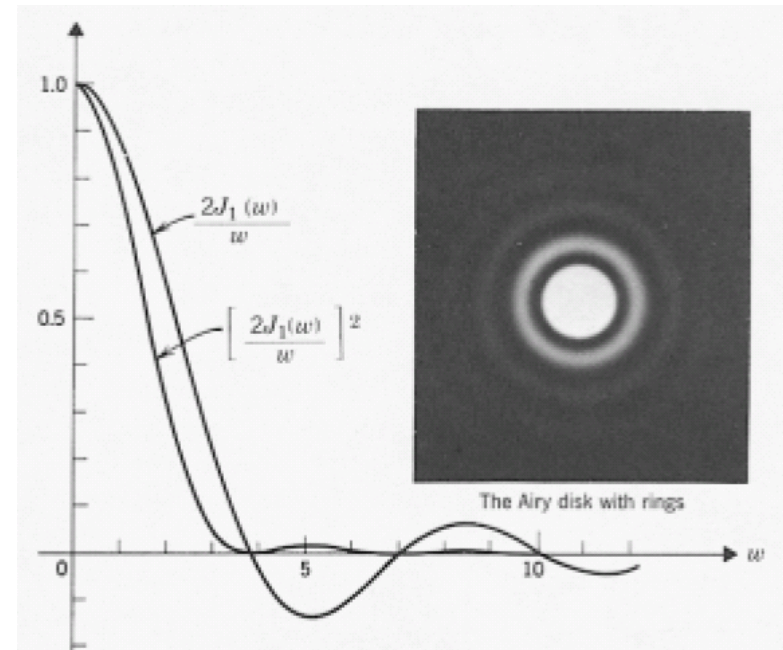
Es sei hier das Ergebnis der Fouriertransformation angegeben. Für das elektrische Feld in der Bildebene ergibt sich:

$$E'(\rho) = E'(0) \left[ \frac{2J_1(2\pi\rho\tilde{r}_0)}{2\pi\rho\tilde{r}_0} \right]$$

dabei ist  $J_1(w)$

die Besselfunktion 1. Ordnung und

$$\rho = \frac{r'}{R'_0\lambda}$$



[aus Klein/Furtak „Optics“]

Entsprechend ist die Intensitätsverteilung:

$$I'(\rho) = I'(0) \left[ \frac{2J_1(2\pi\rho\tilde{r}_0)}{2\pi\rho\tilde{r}_0} \right]^2$$

Beugungsscheibchen oder  
Airy-Scheibchen

## Auflösungsvermögen

Aus der Beugung ergibt sich eine wichtige Konsequenz: Ein optisches System bildet einen Objektpunkt stets auf eine ausgedehnte Intensitätsverteilung (Beugungsscheibchen) ab.

Dies steht im Gegensatz zur geometrischen Optik und führt zu einem begrenzten **Auflösungsvermögen!**

Wann können zwei nahe nebeneinander liegende Objektpunkte noch aufgelöst werden?

**Rayleigh-Kriterium:** Zwei Punkte werden dann noch aufgelöst, wenn das Maximum des einen Beugungsscheibchens mit dem ersten Minimum des anderen Beugungsscheibchens zusammenfällt.

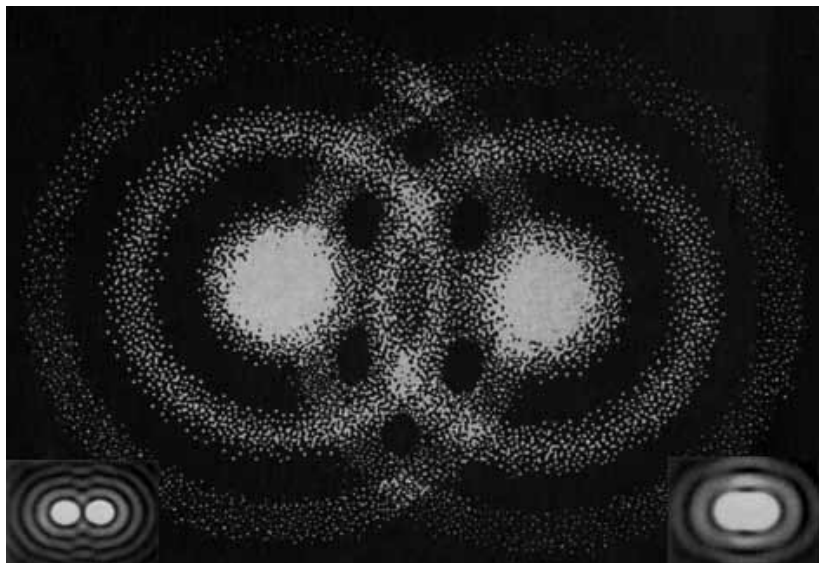


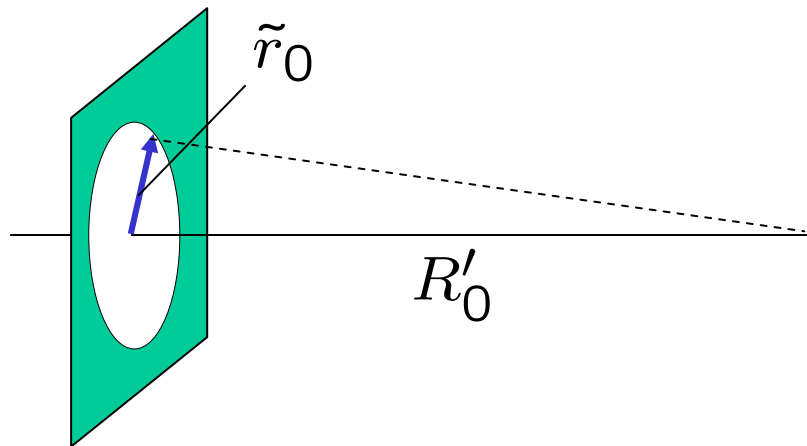
Abbildung zweier nahe beieinander liegender Punkte. Man erkennt die beiden Beugungsmuster (Airy-Scheibchen) in der Bildebene.

[<http://www.greier-greiner.at/hc/index.php>]

Der Abstand zum ersten Minimum im Airy-Scheibchen ist:

$$r_{Airy} = \Delta r = 1,22 \frac{\lambda R'_0}{2 \tilde{r}_0} = 1,22 \frac{\lambda}{2NA}$$

Auflösungsvermögen nach Rayleigh



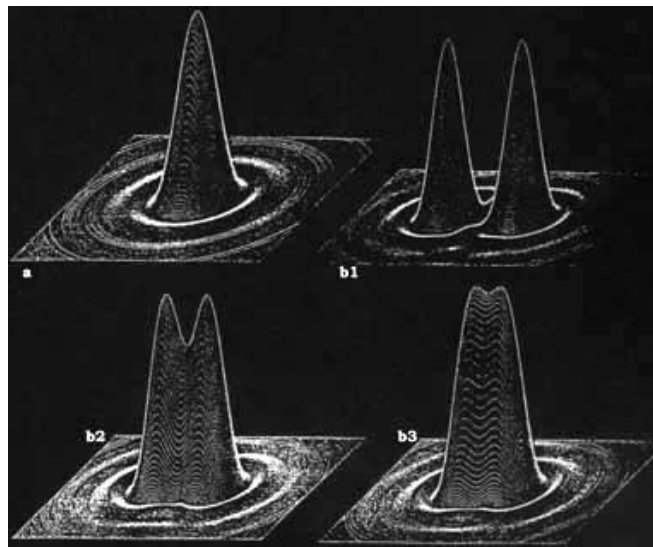
Die **numerische Apertur NA** ist der halbe Öffnungswinkel des optischen Systems.

Eine Abschätzung für das Auflösungsvermögen ist also:

$$\Delta r = \frac{\lambda/2}{NA}$$

rechts: Zusammenlaufen der Airy-Scheibchen bei Verringerung des Abstands zwischen zwei nahe beieinander liegenden Punkten.

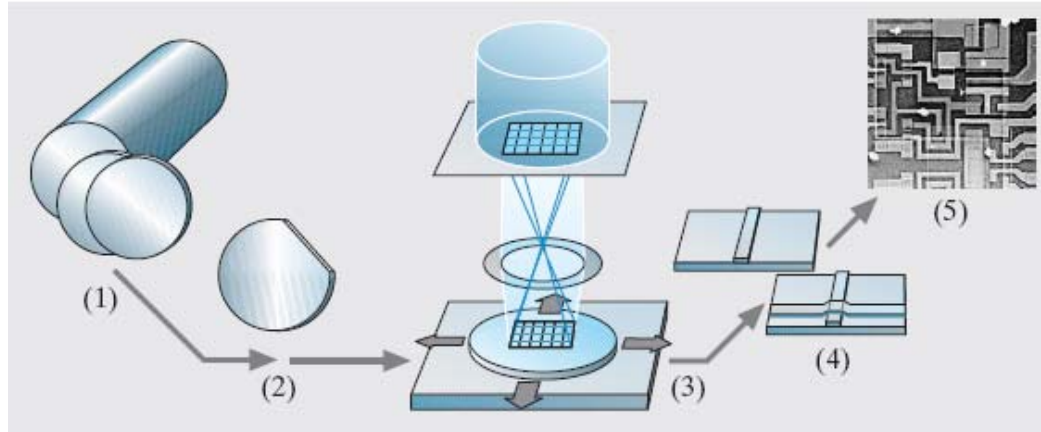
[<http://www.greier-greiner.at/hc/index.php>]



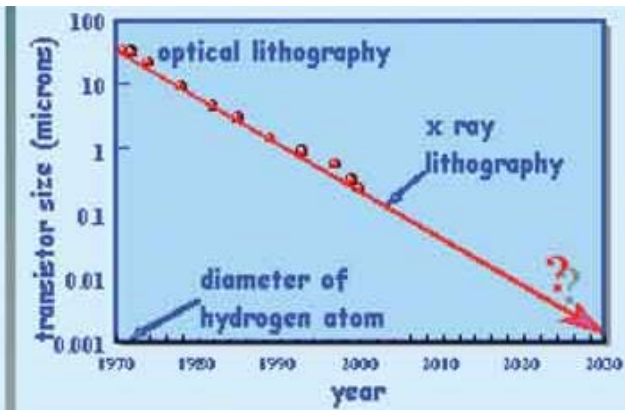
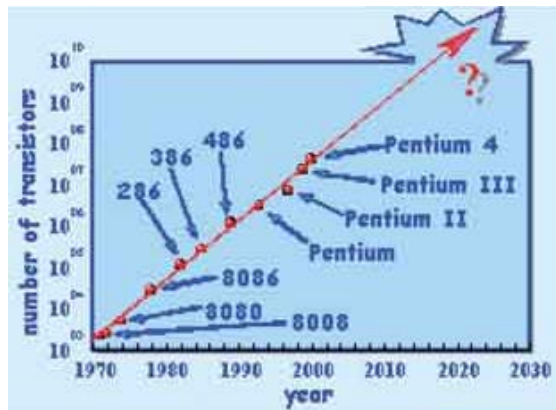


## Konsequenzen des begrenzten Auflösungsvermögens

Heutige Halbleiterchips werden lithographisch hergestellt.



Prinzip der Wafer-Herstellung: Schaltkreise werden durch Belichtung (Lithographie) auf Halbleiterwafern aufgebracht. Die kleinste Strukturgröße ist durch die Beugungsgrenze festgelegt.



G. Moore (Intel)

Die Entwicklung der Transistordichte und damit die Strukturgröße folgt dem empirisch gefundenen Moorschen Gesetz. Immer kleinere Strukturen erfordern immer kürzere Wellenlängen bei der Lithographie (derzeit  $<193$  nm).

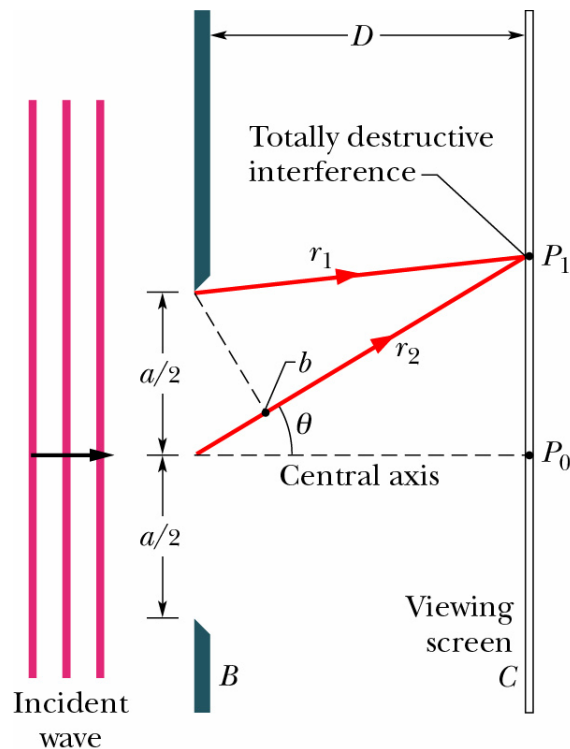
## 2.5. Beugung am Einzelspalt

Ähnlich wie bei der Beugung an einer kreisförmigen Blende kann man nach der Fraunhofer-Theorie auch die Beugung an einem Einzelspalt über die Fouriertransformation berechnen.

$$\tau(y) = 1 \quad \text{für } -\frac{a}{2} \leq y \leq \frac{a}{2}$$

$$\tau(y) = 0 \quad \text{sonst}$$

Transmissionsfunktion eines Einzelspalts

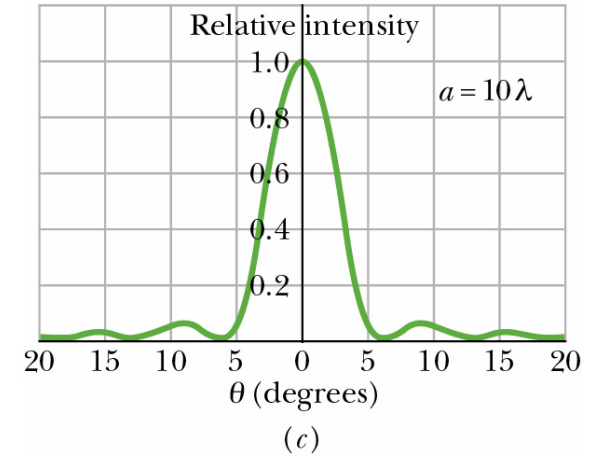
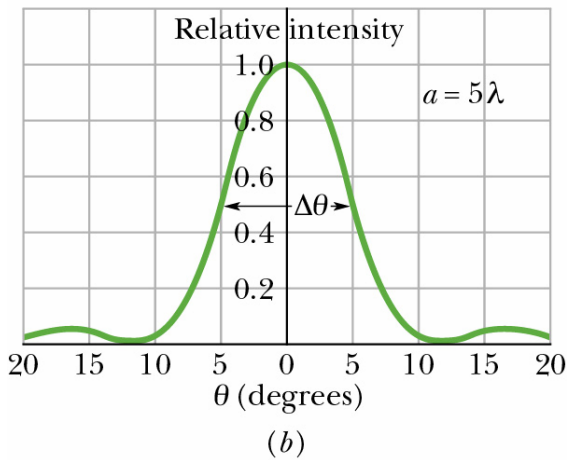
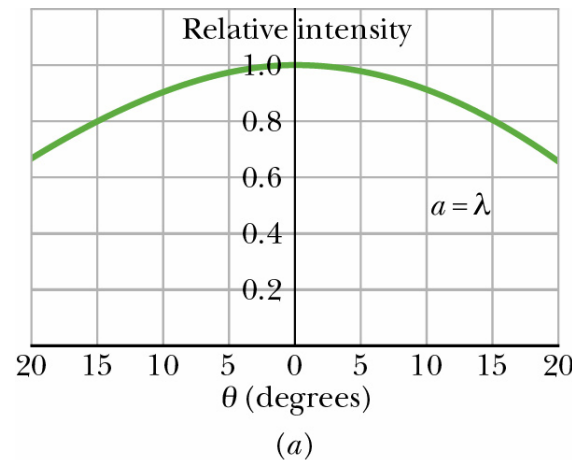


Die Fouriertransformation ergibt für die Intensitätsverteilung am Schirm:

$$I(\theta) = I_0 \left[ \frac{\sin\left(\frac{ka}{2} \sin \theta\right)}{\frac{ka}{2} \sin \theta} \right]^2$$

$$I(\theta) = I_0 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{ka}{2} \sin \theta\right)$$

Beugungsmuster hinter einem Einzelspalt

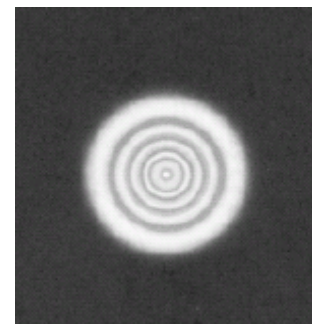


Intensitätsverteilung bei der Beugung an einem Einzelspalt für verschiedene Größen des Spalts.

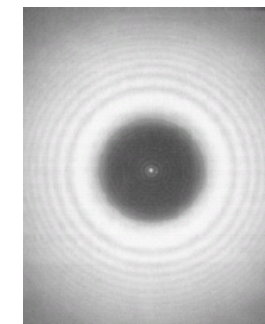
Erst bei  $a > \lambda$  werden Nebenmaxima sichtbar.

Für sehr große Spaltbreiten nähert sich die Intensitätsverteilung der Erwartung der geometrischen Optik (Schatten) an.

Die Beugungsfiguren von komplementären Strukturen (z.B. kreisförmige Öffnung und Scheibe, oder Spalt und rechteckiges Plättchen) sind ebenfalls komplementär. Dies wird auch als **Babinetsches Prinzip** bezeichnet.



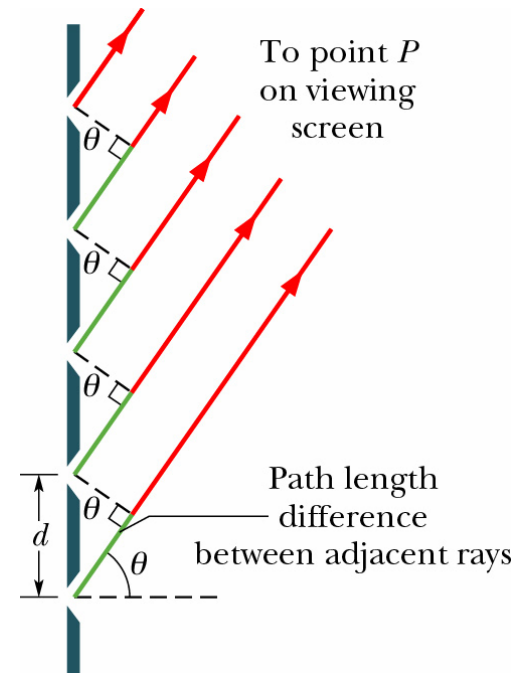
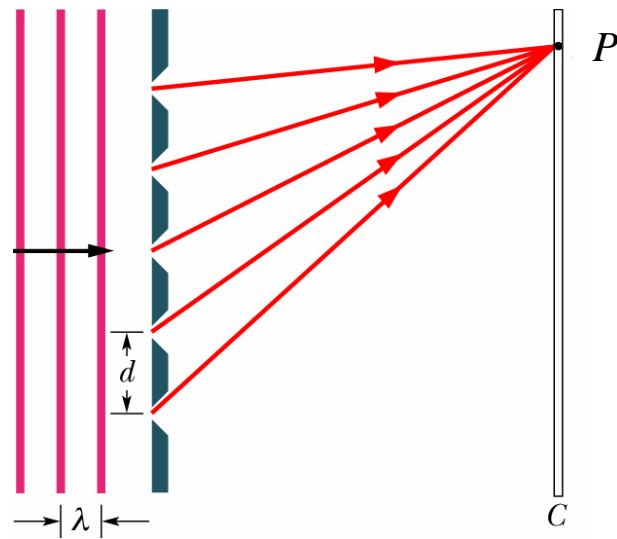
Apertur



Scheibchen

## 2.6. Das Optische Gitter

Ein optisches Gitter kann als periodische Anordnung von Einzelspalten angesehen werden.



Strahlen von allen Spalten interferieren im Punkt  $P$ .

Der Phasenunterschied zwischen Teilstrahlen von einzelnen Spalten ist:

$$\delta = k \sin \theta d \approx k \theta d$$

Um das elektrische Feld an  $\mathbf{P}$  zu erhalten, kann man nun die Felder  $\mathbf{E}_s$ , die sich aufgrund der Beugung an den Einzelspalten ergeben, mit der entsprechende Phase aufsummieren.

Es ergibt sich:

$$E(\theta) = \sum_{n=0}^N E_{s,n} e^{i\delta_n} = E_{s,0} \sum_{n=0}^N e^{in\delta} = E_{s,0} \frac{1 - e^{iN\delta}}{1 - e^{i\delta}}$$

Geometrische  
Reihe

Das elektrische Feld nach Beugung an einem Einzelspalt  $E_{s,0}$  wurde im vorigen Kapitel bereits berechnet. Einsetzen und Bilden des Betragsquadrats ergibt:

$$I(\theta, \tilde{\theta}) = I_0 \underbrace{\text{sinc}^2 \left[ \frac{ka}{2} \sin \tilde{\theta} \right]}_{\text{Einzelspalt}} \underbrace{\left[ \frac{\sin(\frac{1}{2}Nkd \sin \theta)}{N \sin(\frac{1}{2}kd \sin \theta)} \right]^2}_{\text{Mehrfachspalt}} \quad \text{Beugung am Gitter}$$

Bem.: auf jeden einzelnen Spalt fällt nur  $1/N$  der einfallenden Feldstärke!

Die Intensitätsverteilung weist Hauptmaxima und  $N-2$  Nebenmaxima auf.

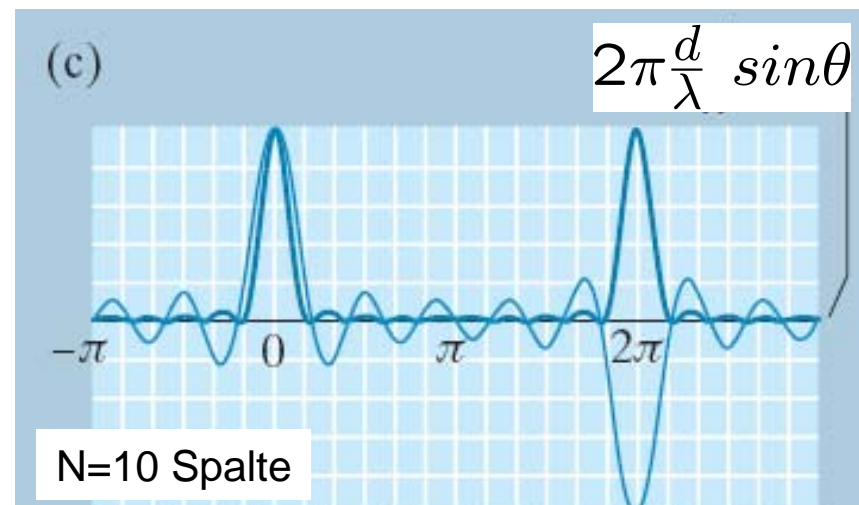
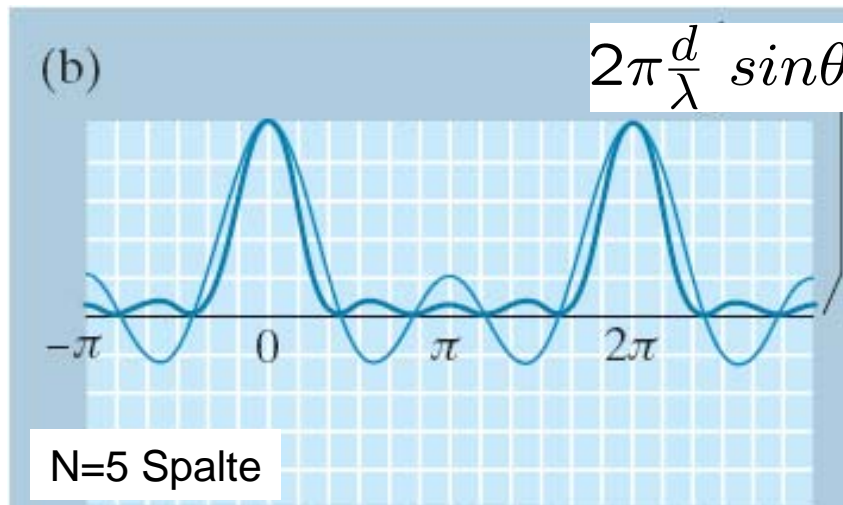
Die gesamte Verteilung ist mit dem Beugungsmuster des Einfachspaltes moduliert.

Der Winkel zum  $m$ -ten Hauptmaximum entspricht einem Minimum des Nenners (im 2. Term):

$$kd \sin\theta_m / 2 = m \pi \quad \text{oder}$$

↑  
ganze Zahl

$$\sin\theta_m = m \lambda / d$$

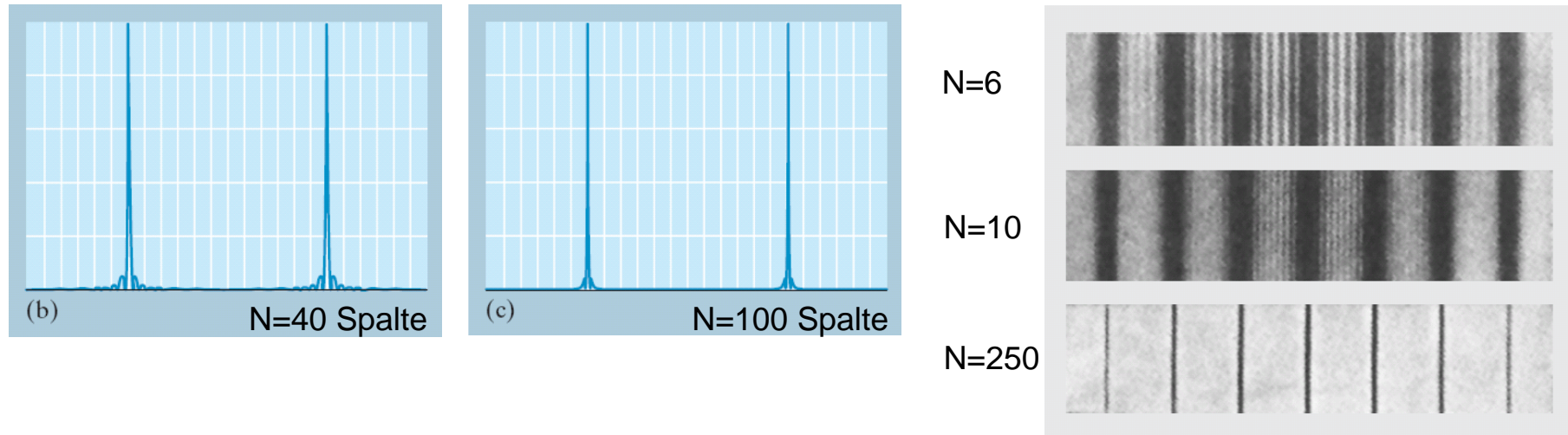


Nebenmaxima existieren bei Maxima des Zählers (im 2. Term)

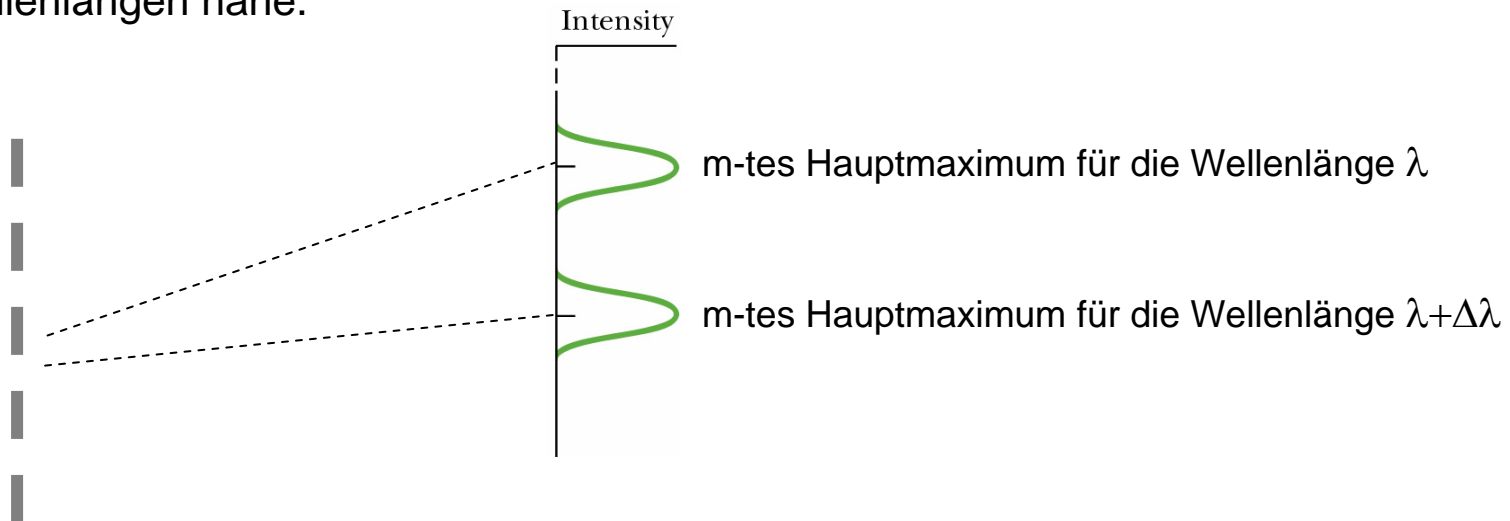
$$Nkd \sin\theta_\mu / 2 = (2\mu + 1) \pi / 2$$

↑  
ganze Zahl

Die Breite der Hauptmaxima nimmt mit der Anzahl der beteiligten Spalte ab.



Die geringe Breite der Beugungsmaxima legt eine Anwendung von Beugungsgittern für die Messung von Wellenlängen nahe.

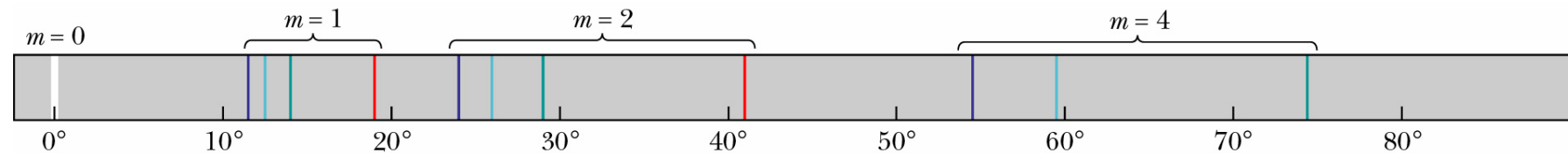


Zwei Spektrallinien können noch aufgelöst werden, wenn sie in etwa um den Winkelabstand  $\Delta\theta$  der Nebenmaxima nebeneinander liegen:

$$\Delta\theta \approx \lambda/(Nd) = m\lambda/d - m\lambda'/d = m\Delta\lambda/d$$

Somit ergibt sich für das **Auflösungsvermögen des Gitters**:

$$\lambda/\Delta\lambda = mN$$

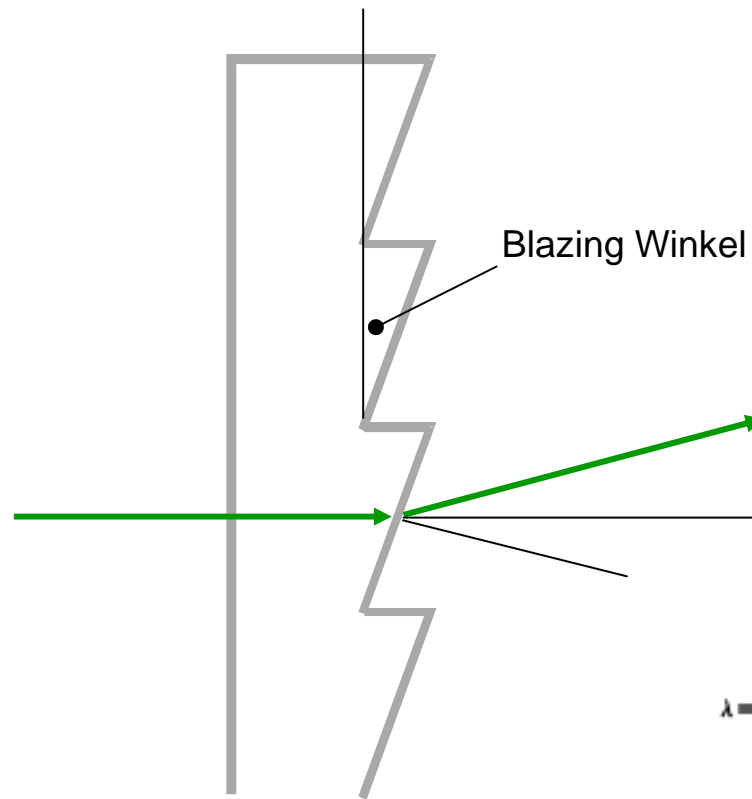


In der obigen Skizze erkennt man die Abhängigkeit des Auflösungsvermögens von der Beugungsordnung  $m$ .

Das 0-te Maximum ist überhaupt nicht wellenlängenselektiv.

Ein Problem ist die Modulation der Intensität des gesamten Beugungsmusters mit dem Beugungsmuster des Einzelspaltes ( $\text{sinc}^2$ -Term), d.h. die meiste Intensität fällt auf das 0-te, nicht selektive Maximum. Eine Abhilfe schafft das **Blazing** des Gitters.

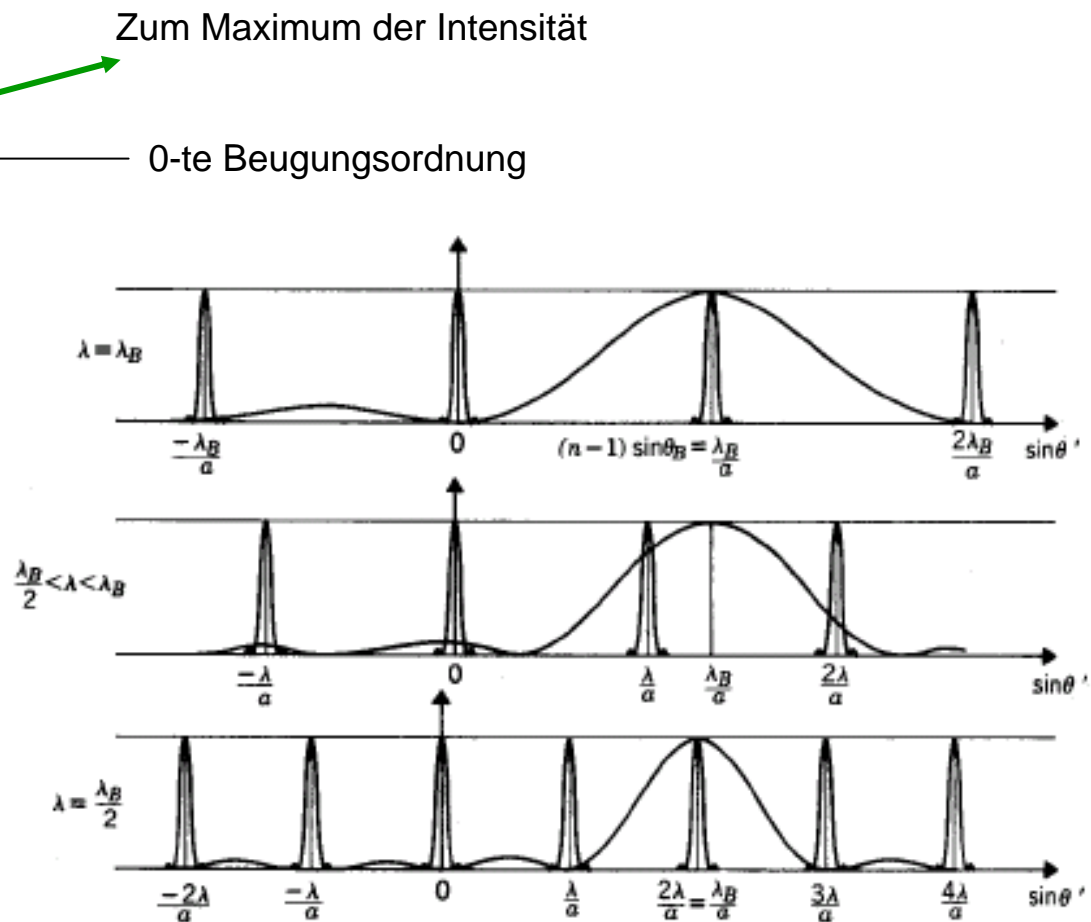




Ein geblaztes Gitter besteht aus einer Anzahl von  $N$  geneigte Facetten.  
 Dielektrikum = Transmissionsgitter  
 Metall = Reflexionsgitter

rechts: Je nach Blazing-Winkel kann das Intensitätsmaximum der Beugungsfigur auf unterschiedliche Beugungsordnungen gelenkt werden.

[aus Klein/Furtak „Optics“]



## Prinzipieller Aufbau eines Gitterspektrographen:

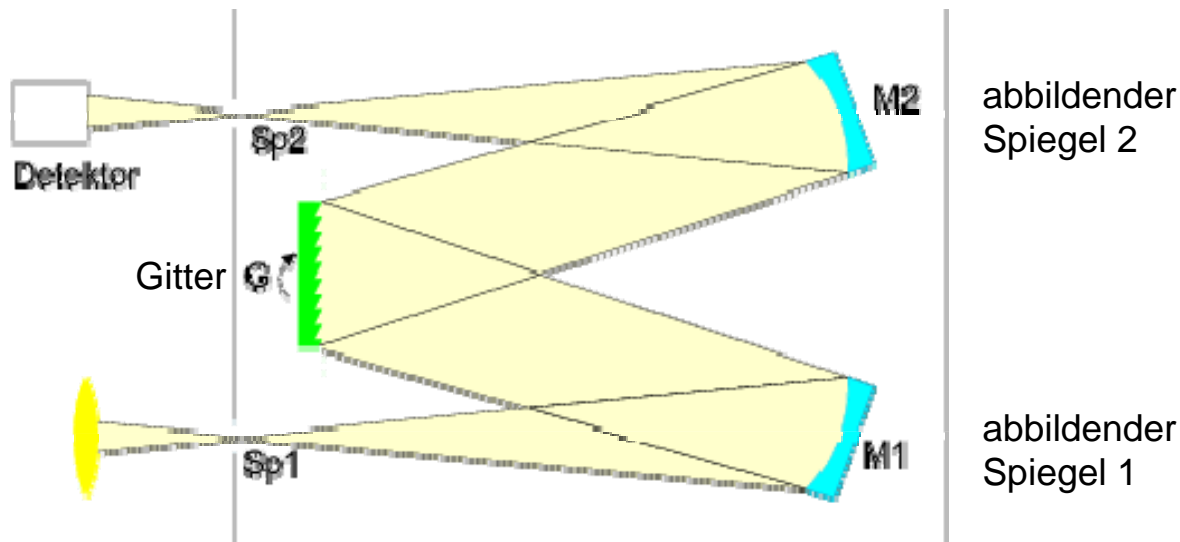
Einfallendes Licht wird auf einen schmalen Einfallsspalt abgebildet.

Ein Hohlspiegel bildet den Spalt auf unendlich ab, d.h. er erzeugt parallele Strahlen und leuchtet damit ein optisches Gitter aus.

Schließlich wird das gebeugte Licht auf einen Detektor abgebildet.

Ist der Detektor eine Kamera (z.B. CCD), so beobachtet man verschiedene Spektrallinien (Betrieb als **Spektrometer**).

Man kann auch über einen schmalen Spalt eine einzelne Linie herausfiltern. (Betrieb als **Monochromator**)

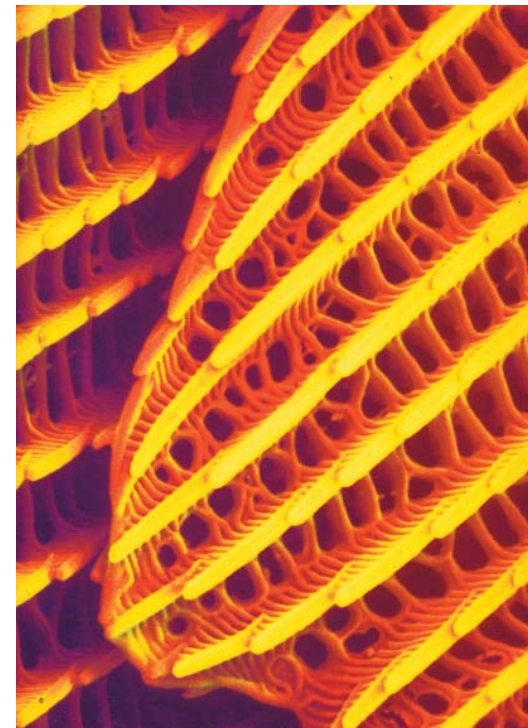


[from Othmar Marti and Alfred Plettli, 2007-08-14 ]

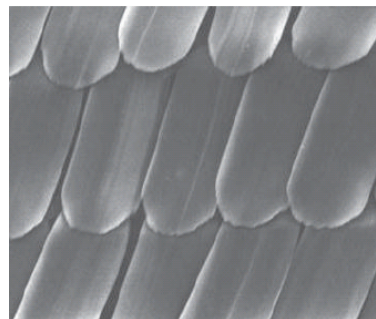
## Natürliche Beugungsgitter:

In der Natur kommen Beugungsgitter zur Erzeugung von Farben vor, z.B. bei Insekten, speziell Schmetterlingen.

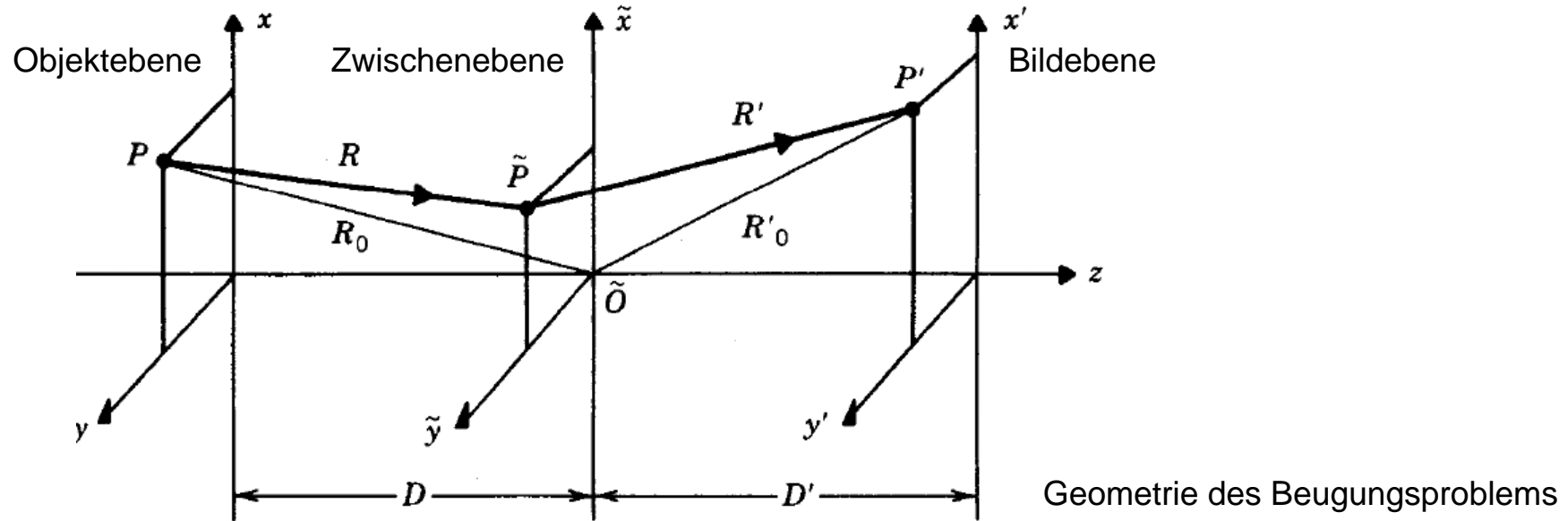
Beugungsgitter aus Chinin können beim Einfall von weißem Licht ein Farbspiel erzeugen.



Farbige Schmetterlings-  
Flügel und unterschiedliche  
Vergrößerungen der Chinin-  
Schuppen (Beugungsgitter)



## 2.7. Fresnel-Beugung



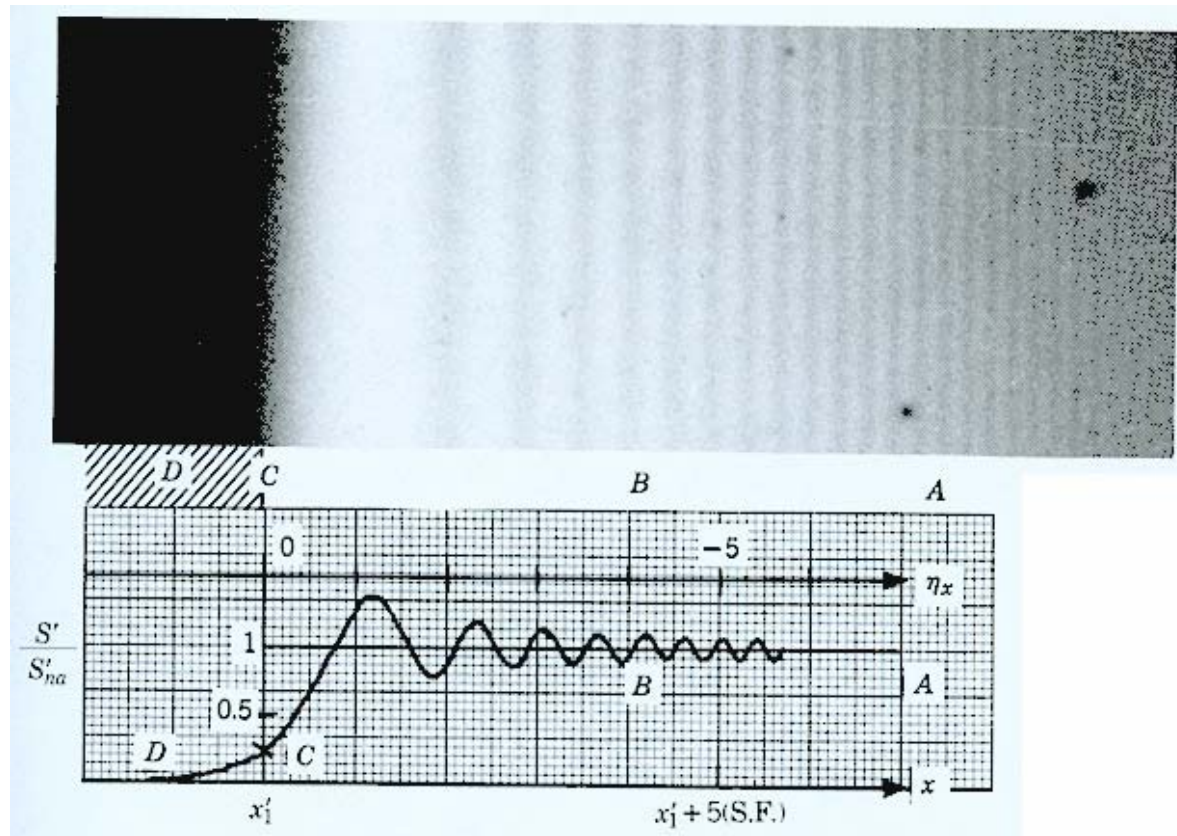
Nach Fresnel-Kirchhoff ist: 
$$E' = E_0 e^{i\omega t} \int \tau \frac{e^{-ikR}}{R} \frac{e^{-ikR'}}{R'} d\tilde{r}^2$$

In der Fresnel-Theorie wird obiges Integral quadratisch genähert. Nach längerer Rechnung (siehe z.B. Klein/Furtak „Optics“) findet man:

$$E' \sim \frac{e^{-ik(D+D')}}{DD'} \int \tau(\tilde{P}) \exp \left( -ik \left[ \frac{(\tilde{x}-x)^2 + (\tilde{y}-y)^2}{2D} + \frac{(\tilde{x}-x')^2 + (\tilde{y}-y')^2}{2D'} \right] \right) d\tilde{x}d\tilde{y}$$

Die Fresnelsche Theorie ist eine bessere Näherung als die Fraunhofersche Beugungstheorie. Sie kann daher für die Beschreibung allgemeinerer Beugungsphänomene herangezogen werden.

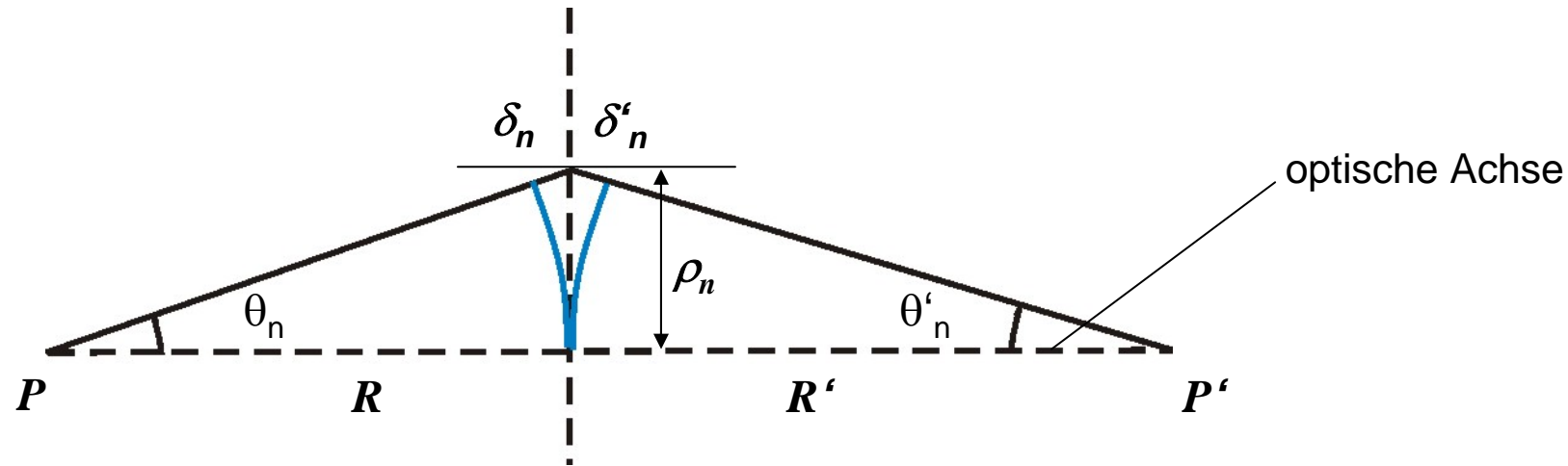
Ein Beispiel ist die Beschreibung der Beugung an einer Kante, auf die hier aber nicht weiter eingegangen werden soll.



Beobachtetes Beugungsphänomen an einer Kante (oben) und gemessener Intensitätsverlauf (unten).

## 2.8. Fresnelsche Zonen

Manche Aspekte der komplizierteren Fresnelschen Beugung können anschaulich interpretiert werden. ein Beispiel sind die Fresnelschen Zonen.



Eine Fresnelsche Zone ist der Ring ( $\theta_n$  bis  $\theta_{n+1}$ ), für den die Strahlen bei  $\theta_n$  und  $\theta'_n$  gerade den Gangunterschied  $n\lambda/2$  besitzen, d.h.  $\delta_n + \delta'_n = n\lambda/2$

$$\text{mit } R^2 + \rho_n^2 = (R + \delta_n)^2 \approx R^2 + 2R\delta_n$$

$$R'^2 + \rho_n^2 = (R' + \delta'_n)^2 \approx R'^2 + 2R'\delta'_n$$

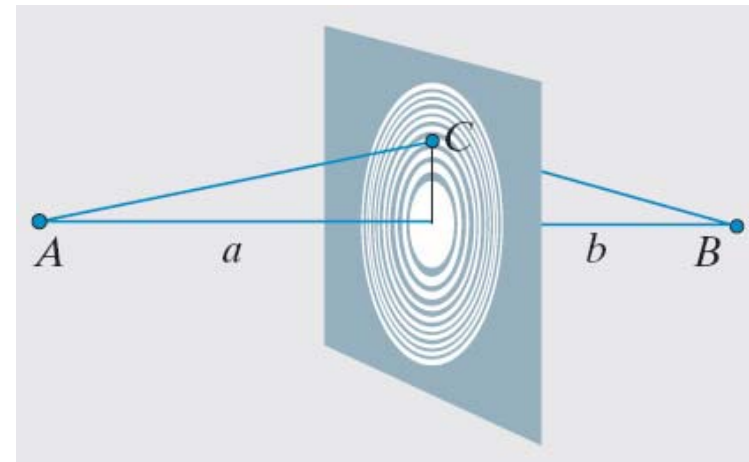
$$\text{folgt } n\lambda/2 = \frac{\rho_n^2}{2} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right)$$

Der Radius der n-ten Fresnelschen Zone ist also

$$\rho_n = \sqrt{n} \sqrt{\frac{R'R}{R'+R}} \sqrt{\lambda}$$

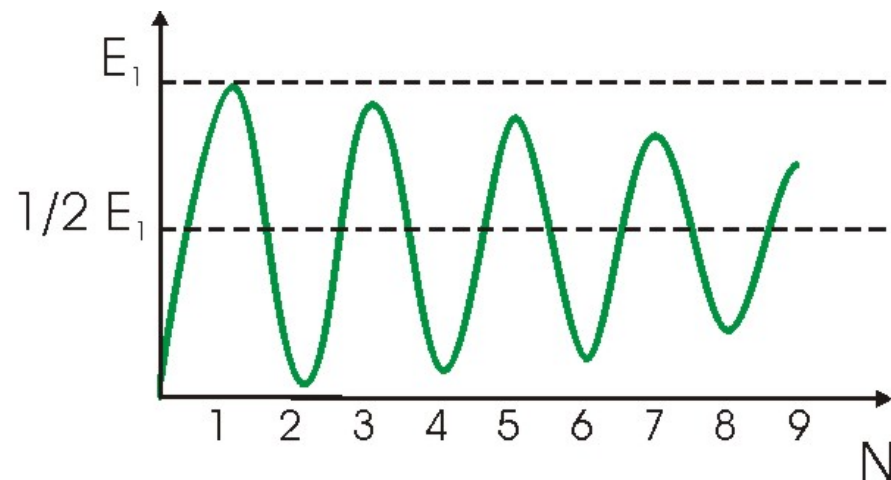
Die Fläche der n-ten Fresnelschen Zone ist dann:

$$A_n = \pi (\rho_{n+1}^2 - \rho_n^2) \approx \pi \frac{R'R}{R'+R} \lambda$$



Fresnelsche Zonenplatte

Die folgende Abbildung skizziert für einen bestimmten Punkt auf der optischen Achse die Abhängigkeit der Feldstärke vom Radius einer Aperturöffnung.



x-Achse = Aperturradius (in Einheiten des Fresnelring-Radius  $\rho_n$ )

Offensichtlich tragen die Fresnelschen Zonen mit unterschiedlichem Vorzeichen zur Intensität bei!

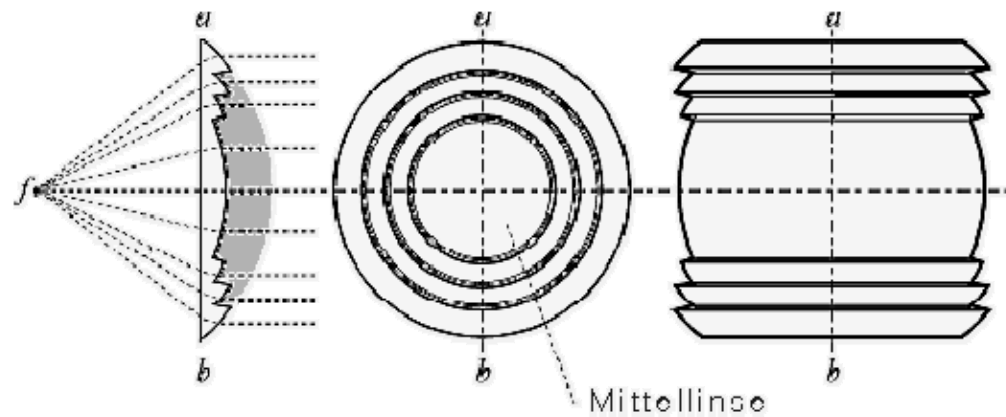
<u>beitragende Zonen</u>	<u>Intensität auf optischer Achse</u>
volle Apertur	$I=1/4 I_1$
nur die 1. F.Z.	$I=I_1$
nur die 1. und 2. F.Z.	$I=0$
alles außer 1. F.Z.	$I=1/4 I_1$

Mit einer Fresnelschen Zonenplatte werden alle geraden Fresnelschen Zonen abgedeckt (oder um  $\pi$  phasenverschoben).

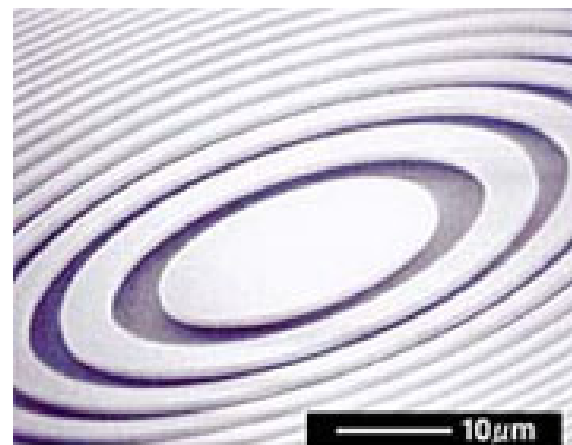
Auf diese Weise wird eine deutlich höhere Intensität auf der optischen Achse erreicht.

Derartige Platten finden Anwendung z.B. in Scheinwerfern oder auch in der Röntgenoptik.





Design (oben) von Fresneloptiken für ein Leuchtturmlicht (rechts)



Fresnel Zone Plate

Mikrostrukturierte Fresnelsche Zonenplatte für die Röntgenoptik



Fresnelsche Zonenplatte vor einem Scheinwerfer

# 3. Polarisation

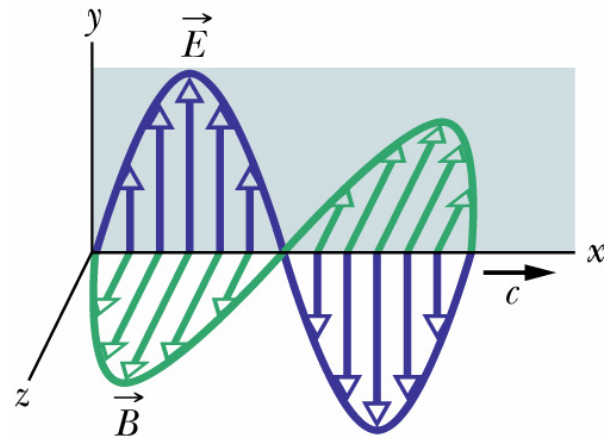
## 3.1. Beschreibung der Polarisation

Licht ist eine **transversale** elektromagnetische Welle. Beispiel: Die ebene Welle:

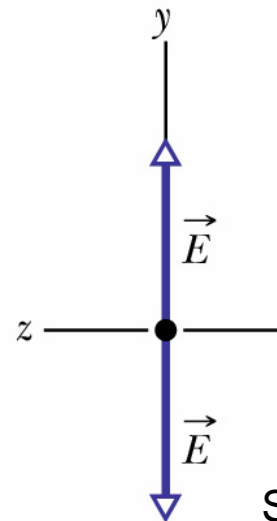
$$\vec{E}(r, t) = E_0 \hat{\epsilon} e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$$

Amplitude      Polarisationsvektor      Phase

$\hat{\epsilon}$  ist der (normierte) **Polarisationsvektor**



ebene transversale Welle mit definierter Schwingungsrichtung



Schwingungsrichtung des E-Feldes

Man unterscheidet bei der Polarisierung folgende Spezialfälle:

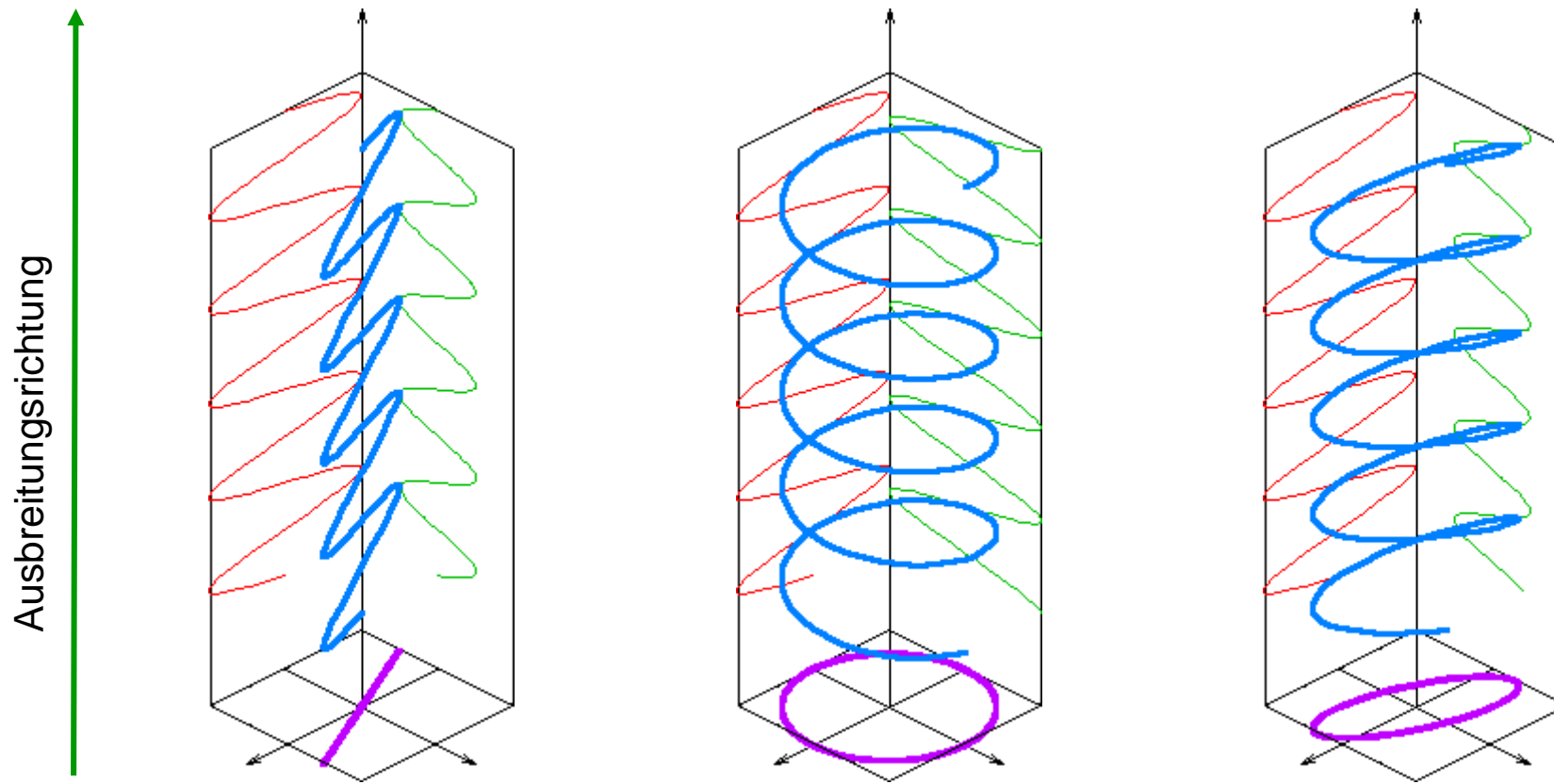
$\hat{\epsilon}_V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ vertikal} \\ \text{linear polarisiert}$	$\hat{\epsilon}_H = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ horizontal} \\ \text{linear polarisiert}$
$\hat{\epsilon}_{\sigma+} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \text{ rechts zirkular} \\ \text{polarisiert}$	$\hat{\epsilon}_{\sigma-} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \text{ links zirkular} \\ \text{polarisiert}$

In allen anderen Fällen heisst das Licht gemischt oder **elliptisch polarisiert**.

Die beiden Polarisationsvektoren für lineare, bzw. zirkuläre Polarisation bilden eine Basis, d.h. jeder beliebige Polarisationsvektor kann durch sie dargestellt werden.

$$\hat{\epsilon}_V = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\epsilon}_{\sigma+} + \hat{\epsilon}_{\sigma-}) \quad \text{Darstellung von linear polarisiertem Licht}$$

$$\hat{\epsilon}_{\sigma+} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\epsilon}_V - i\hat{\epsilon}_H) \quad \text{Darstellung von zirkular polarisiertem Licht}$$



Darstellung von linear (links), zirkular (mitte) und elliptisch (rechts) polarisiertem Licht.  
[Wikipedia]

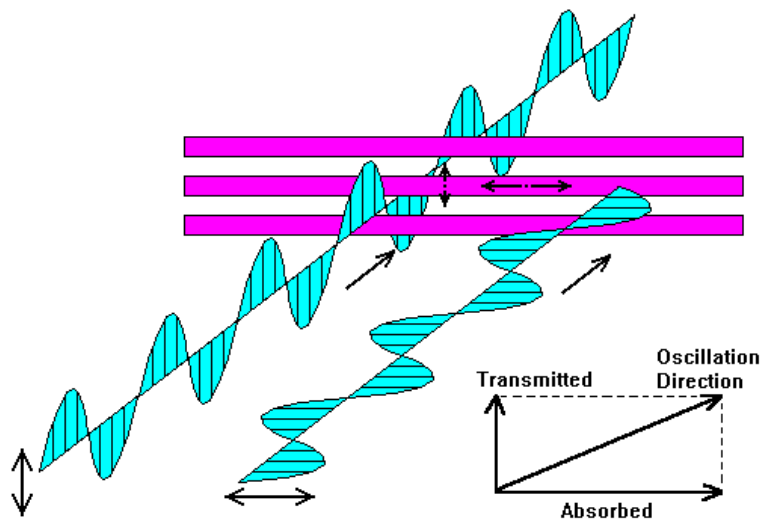
## 3.2. Erzeugung von polarisiertem Licht

Polarisiertes Licht kann auf verschiedene Arten erzeugt werden.

### 1) Polarisationsfilter

Polarisationsfilter haben eine von der Polarisationsrichtung abhängige Absorption.

Beispiel: Metallgitter, geordnete Polymer- oder Molekülketten



#### Beispiel a):

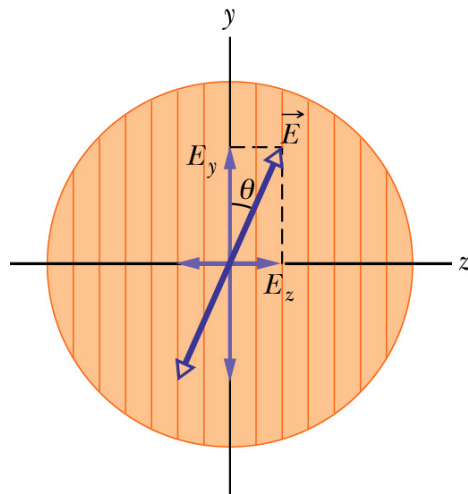
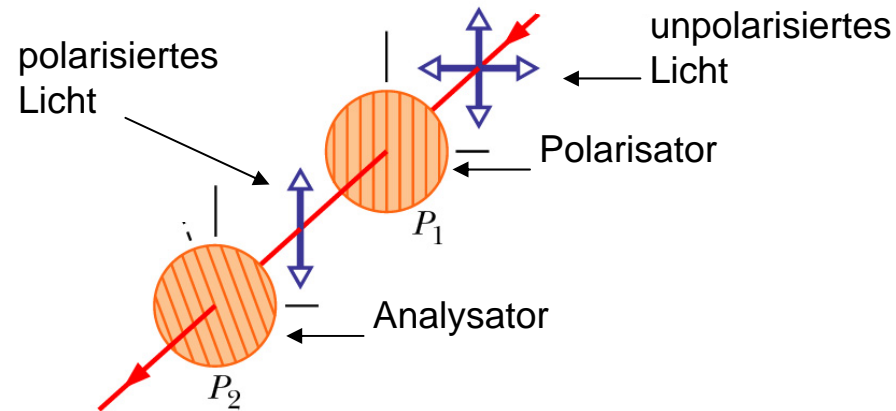
Das Metallgitter absorbiert eine elektromagnetische Welle stärker, wenn die Schwingungsrichtung entlang der Gitterachse liegt.

Das transmittierte Licht ist somit linear polarisiert.

#### Beispiel b):

Eine gestreckte Plastikfolie wirkt oft als Polarisationsfilter.

Ein Polarisationsfilter kann zur Analyse von polarisiertem Licht eingesetzt werden.



Die Feldstärke des transmittierten Lichtes (in y-Richtung) ist:

$$E_y(\theta) = E_0 \cos \theta$$

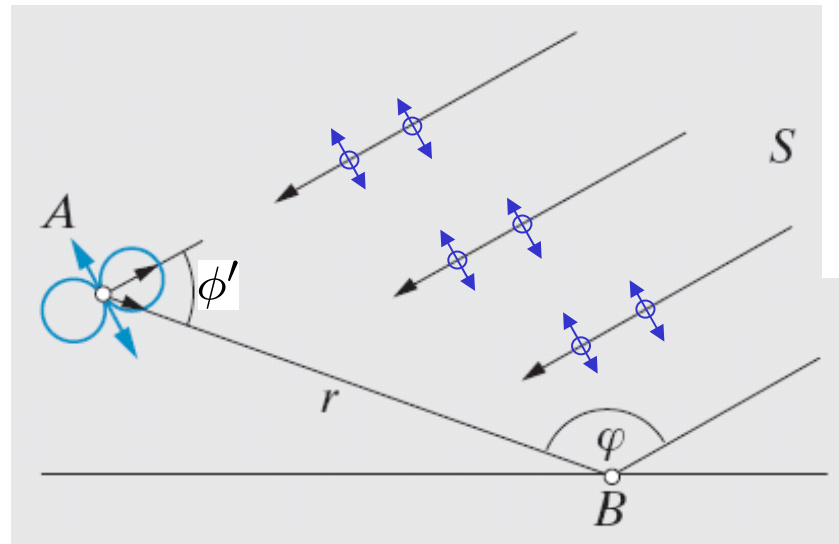
Für die transmittierte Intensität gilt somit das **Gesetz von Malus**:

$$I_y(\theta) = I_0 \cos^2 \theta$$

## 2) Polarisation durch Lichtstreuung

Polarisiertes Licht kann durch Streuung erzeugt werden.

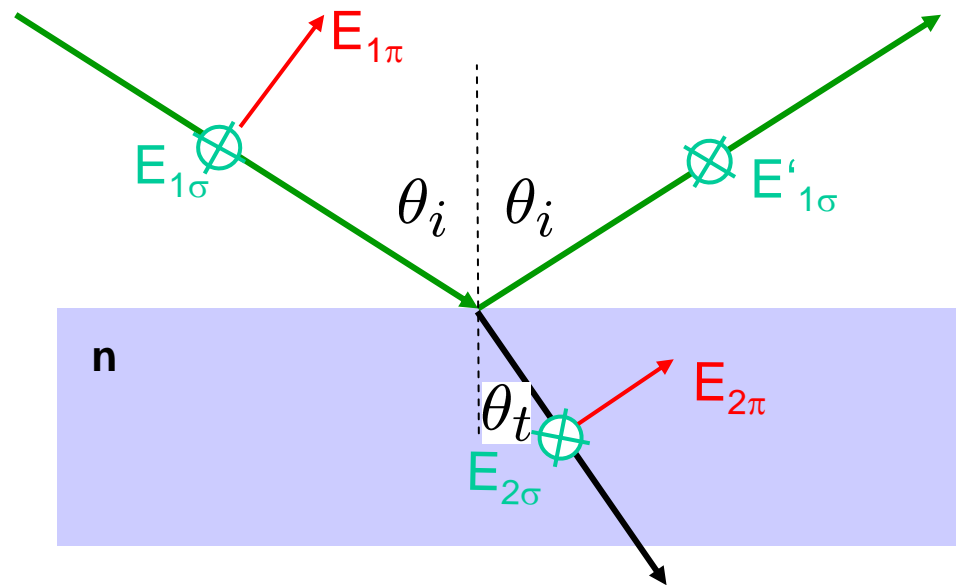
Der induzierte Dipol in einem Streuteilchen kann nicht entlang seiner Schwingungsachse emittieren



einfallendes unpolarisiertes Licht (transversale Welle)  
Schwingungsrichtung unbestimmt, aber senkrecht zur Ausbreitungsrichtung

Ein Beobachter im Punkt **B** stellt eine Polarisation senkrecht zur Ebene SAB fest.  
Maximale Polarisation beobachtet man in Richtung  $\phi = 90^\circ$

### 3) Polarisation durch Reflexion an einer Grenzfläche



Das einfallende Licht ist in eine Polarisationsrichtung in der Einfallsebene  $E_{1\pi}$  und eine Richtung senkrecht dazu  $E_{1\sigma}$  zerlegt.

Liegt die Schwingungsrichtung des reflektierten Strahls parallel zu  $E_{2\pi}$ , so kann keine  $\pi$ -Komponente reflektiert werden.

Das reflektierte Licht ist dann vollständig in  $\sigma$ -Richtung polarisiert.

Dies ist der Fall, wenn

$$\sin \theta_i = n \sin \theta_t = n \sin(180^\circ - 90^\circ - \theta_i) = n \cos \theta_i$$

oder  $\tan \theta_B = n$  Brewster-Winkel

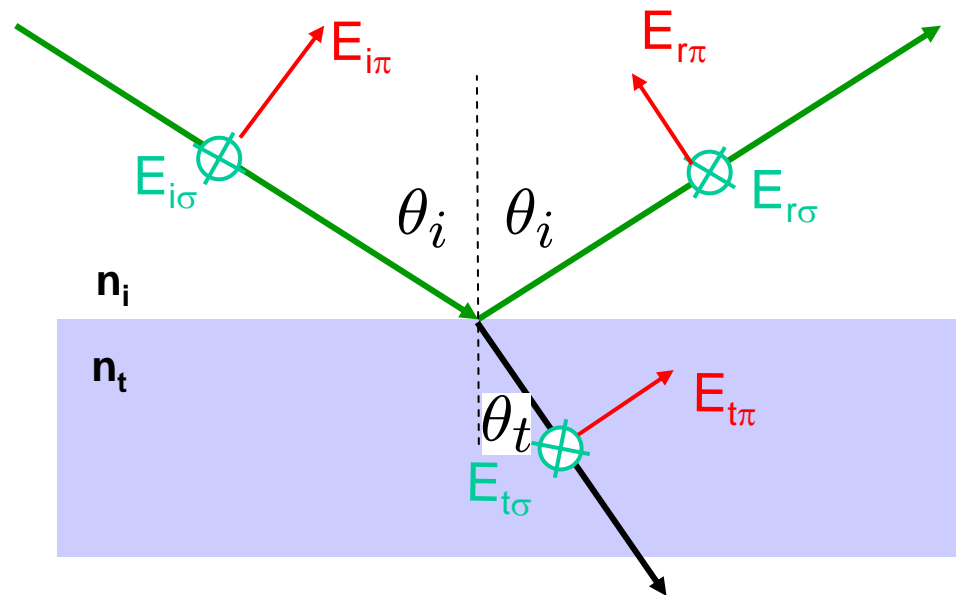
Fällt in der Einfallsebene polarisiertes Licht im Brewster-Winkel auf eine Grenzfläche, so wird es vollständig transmittiert.



### 3.3. Fresnel-Koeffizienten

Bei der Reflexion/Transmission verändert Licht i.A. seine Polarisations-eigenschaften.

Definition:       $\pi$ -Polarisation      Schwingungsrichtung parallel zur Einfallsebene  
                       $\sigma$ -Polarisation      Schwingungsrichtung senkrecht zur Einfallsebene



An der Grenzfläche gilt die Stetigkeit der Tangential-Komponente des elektrischen Feldes und der dazu senkrechten Komponente des magnetischen Feldes (siehe Elektrostatik)

Aus dieser Forderung lassen sich die **Amplituden**reflexions-, bzw. Amplitudentransmissionskoeffizienten oder die **Fresnel-Koeffizienten** herleiten.

Die Betragsquadrate der Fresnel-Koeffizienten, d.h. die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten (der **Intensitäten**) seien ohne Herleitung angegeben:

$$R_{\sigma} = \left| \frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)} \right|^2 \quad T_{\sigma} = \left| \frac{2 \sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t)} \right|^2 \frac{\sin \theta_i \cos \theta_t}{\sin \theta_t \cos \theta_i}$$

$$R_{\pi} = \left| \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)} \right|^2 \quad T_{\pi} = \left| \frac{2 \sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t) \cos(\theta_i - \theta_t)} \right|^2 \frac{\sin \theta_i \cos \theta_t}{\sin \theta_t \cos \theta_i}$$

Es gilt:

$$R_{\sigma} + T_{\sigma} = 1$$

$$R_{\pi} + T_{\pi} = 1$$

Erhaltung der Gesamtintensität

Spezialfall für senkrechten Einfall ( $\theta_i=0$ )

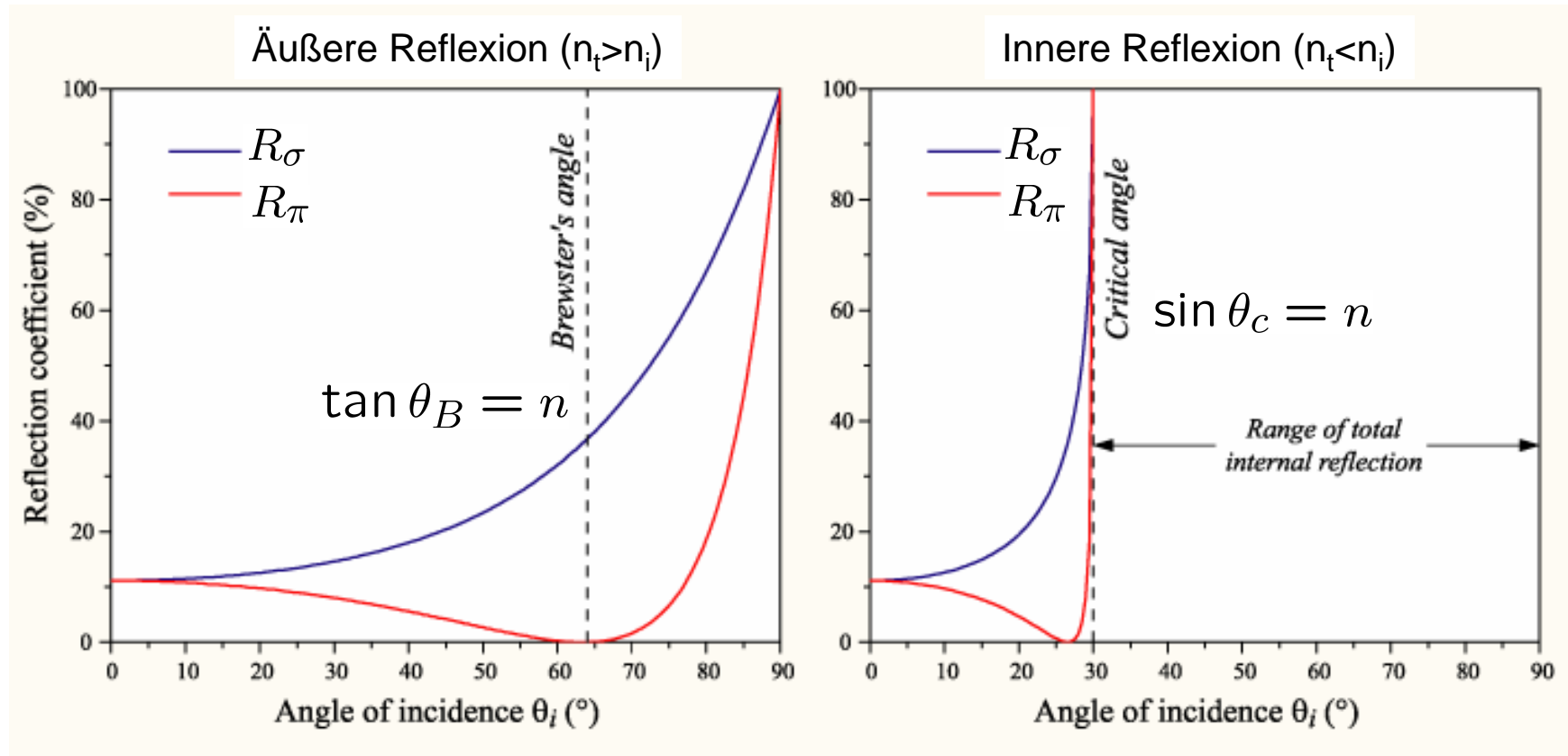
$$R_{\sigma} = R_{\pi} = \left( \frac{n_t - n_i}{n_t + n_i} \right)^2$$

$$T_{\sigma} = T_{\pi} = \frac{4n_t n_i}{(n_t + n_i)^2}$$

Für Reflexion an Glas ( $n=1,4$ ) ist  $R=4\%$

Vielfachschichten (z.B. aufgewickelte Folie) zeigen daher oft einen metallischen Glanz.

Abhängigkeit der Reflexion vom Einfallswinkel [Wikipedia]



**Bemerkungen:**

$R_{\pi}$  fällt beim Brewsterwinkel auf Null ab.

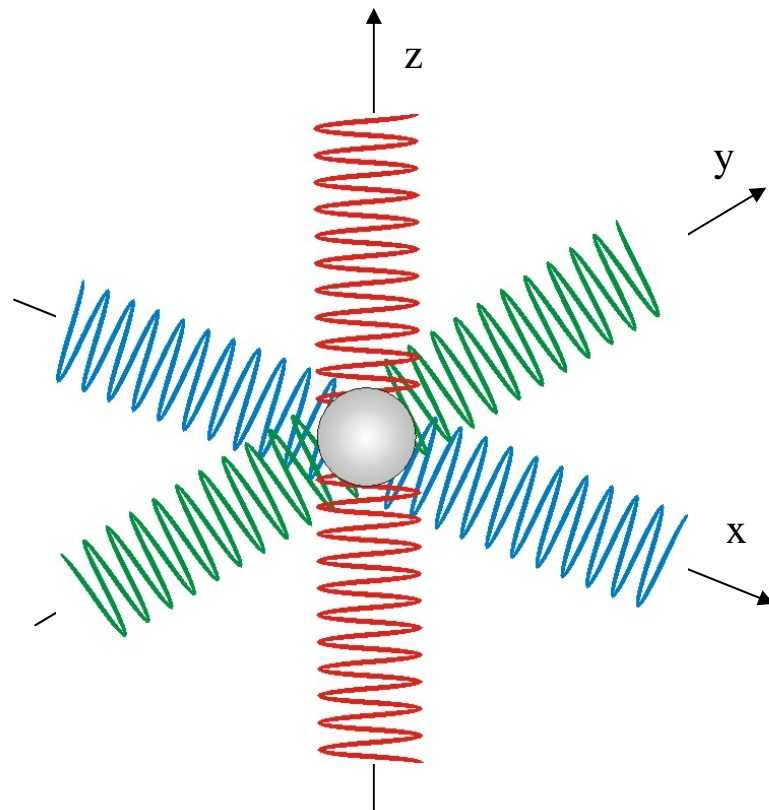
Im streifenden Einfall wird die Reflexion immer 100%

## 3.4. Doppelbrechung

### Doppelbrechung

Die Doppelbrechung tritt bei Materialien (z.B. Kristallen) auf, bei denen der Brechungsindex eine Funktion der linearen Polarisationsrichtung ist.

Eine Erklärung liefert ein mechanisches Oszillatormodell:

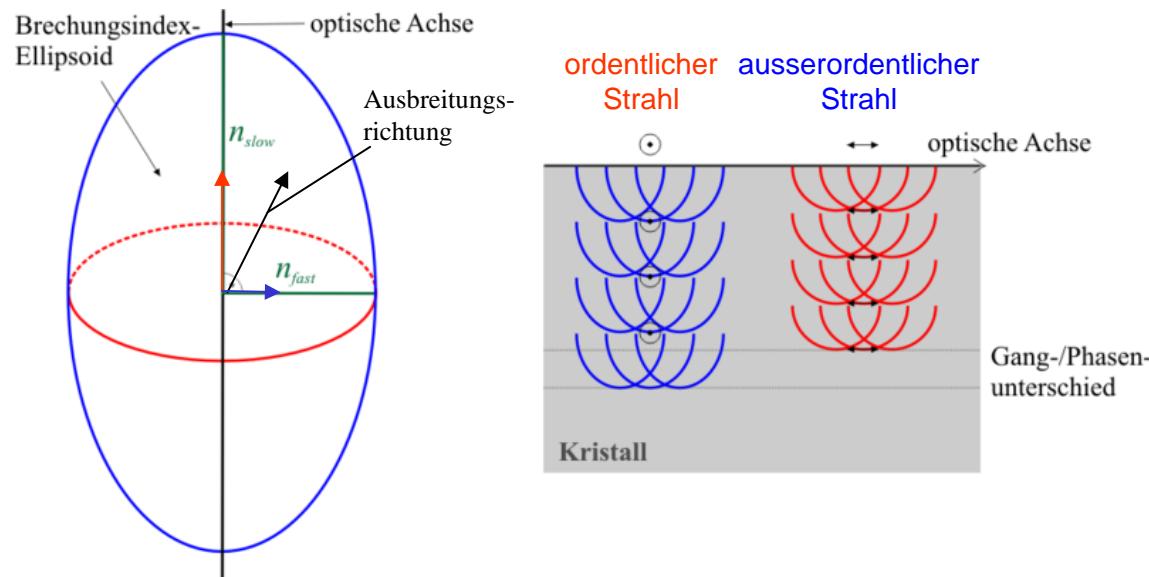


unterschiedliche Federkonstanten  
entlang x, y und z

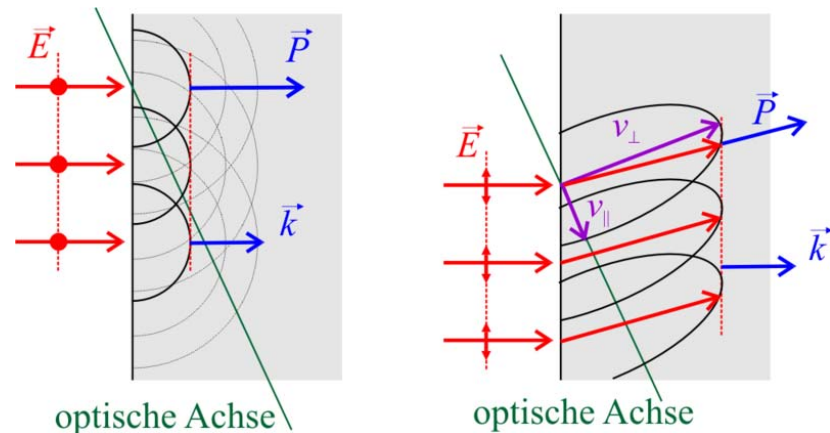
unterschiedliche Ausbreitungsgeschwindigkeiten von Wellen  
entlang  $v_x$ ,  $v_y$  und  $v_z$

Kristalle mit  $v_x=v_y$  heißen **optisch einachsig**. Die z-Achse ist dann die **optische Achse**.

Im optisch einachsigen Kristall existiert also für einen Einfall schräg zur optischen Achse eine Schwingungsrichtung senkrecht zur optischen Achse (**ordentlicher Strahl**, Brechungsindex  $n_o$ ) und eine parallel dazu (**ausserordentlicher Strahl**, Brechungsindex  $n_e$ ). Für  $n_o < n_e$  heisst der Kristall **positiv**, für  $n_o > n_e$  heisst der Kristall **negativ**.

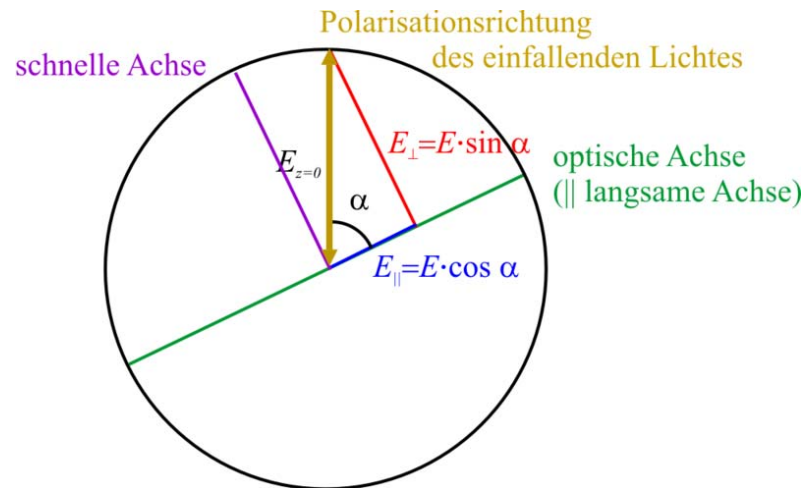


Verdeutlichung von langsamer Achse (großes  $n$ ) und schneller Achse (kleines  $n$ ) sowie von ordentlichem und außerordentlichem Strahl für einen positiven Kristall (z.B. Quarz)



Im rechten Bild der Skizze wird bei vertikaler Polarisation eine Schwingung entlang der optischen Achse angeregt, die sich langsamer ausbreitet. Der Strahl erfährt im Vergleich zur horizontalen Polarisation (Schwingung immer senkrecht zur opt. Achse) einen Versatz. [Wikipedia]

Fällt also unpolarisiertes Licht auf einen doppelbrechenden Kristall schräg zur optischen Achse so wird das Licht in zwei senkrecht zueinander polarisierte Strahlen aufgeteilt.

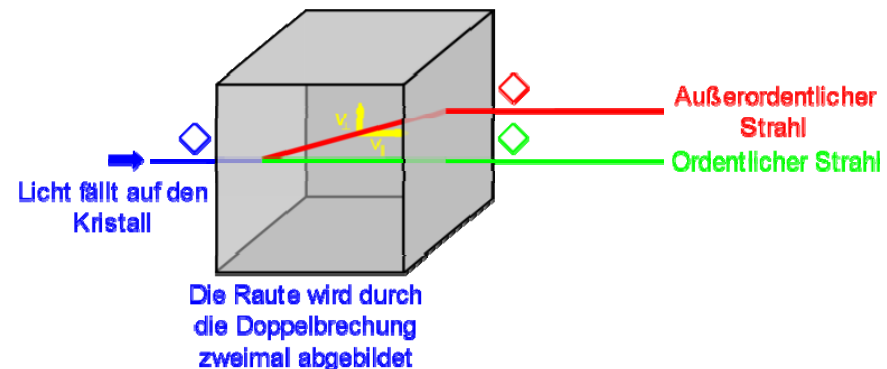


links: Zerlegung einer beliebigen Polarisationsrichtung in Richtungen parallel und senkrecht zur optischen Achse.

unten links: Blick durch einen doppelbrechenden Kristall

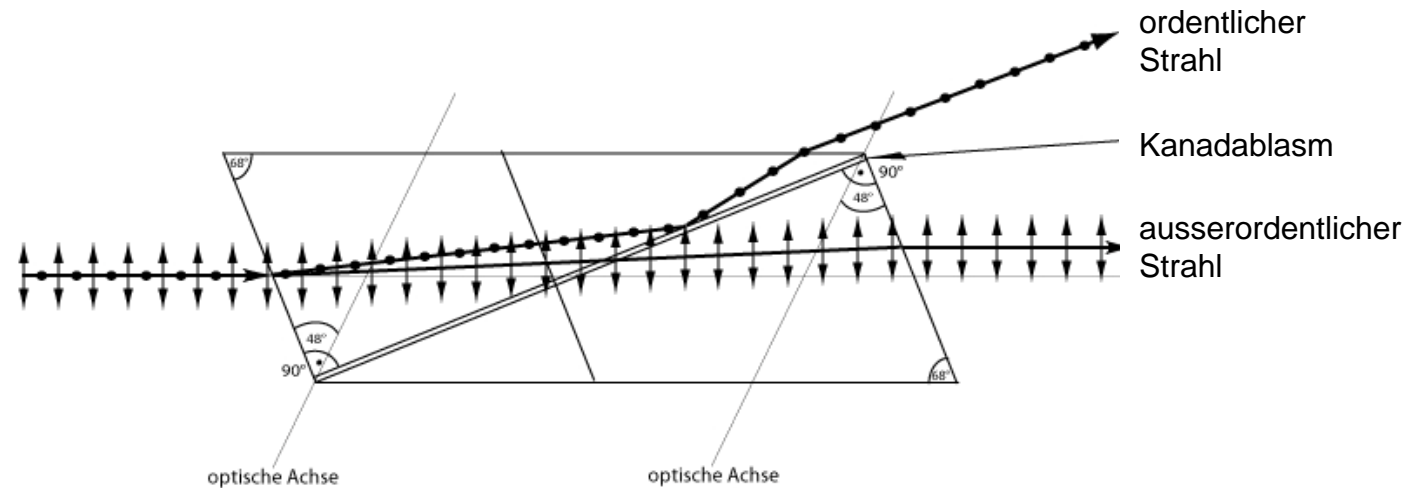
unten rechts: Erläuterung des Strahlverlaufs bei einem doppelbrechenden Kristall

[Wikipedia]



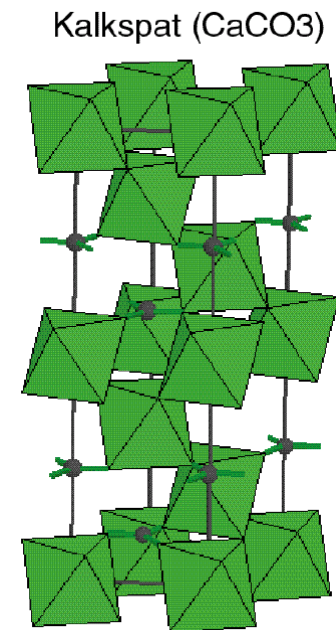
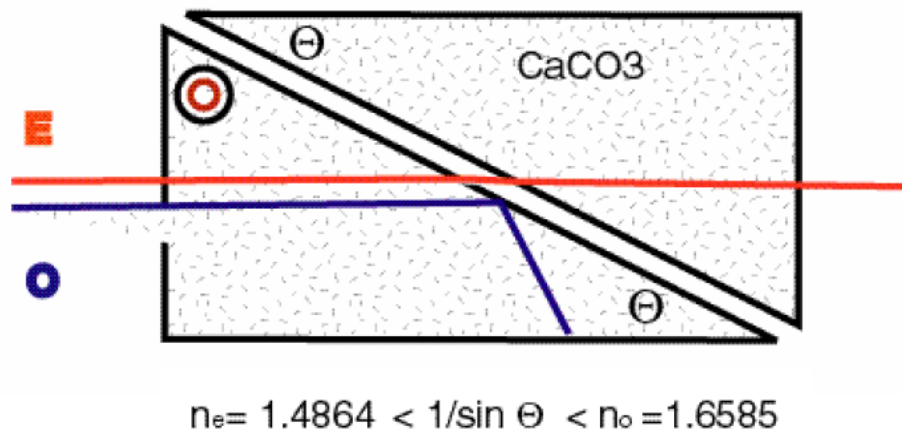
## Polarisationsstrahlteiler

Die Doppelbrechung findet vielfältige praktische Anwendungen. Ein Beispiel sind **Polarisationsstrahlteiler**.



Ein **Nicolprisma** besteht aus zwei verkitteten Prismen (Zwischenschicht aus Kanadabalsam) aus doppelbrechendem Material (Kalkspat). Dabei wird der horizontal polarisierte (ordentliche) Strahl, an der Grenzfläche totalreflektiert (er „sieht“ einen höheren Brechungsindex, negativer Kristall!). Der vertikal polarisierte (ausserordentliche) Strahl wird dagegen transmittiert.

Das Nicolprisma wird meist zur Polarisationsfilterung eingesetzt.



Das **Glan-Thompson-Prisma** besteht ebenfalls aus zwei verkitteten Prismen (oft aus Kalkspat). Der ordentliche und ausserordentliche Strahl fallen senkrecht ein und verlaufen im ersten Prisma parallel. Meist wird der Gesamtablenkungswinkel des ordentlichen Strahls zu 90° gewählt.

Das Glan-Thompson-Prisma wird als Polarisationsstrahlteiler (PBS) eingesetzt.

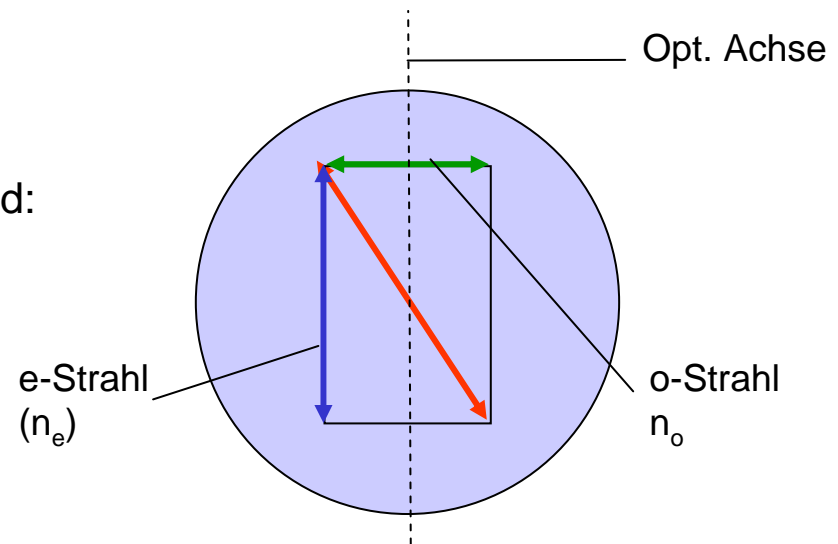


## Phasenplatten

Trifft ein Strahl genau senkrecht zur optischen Achse auf einen doppelbrechenden Kristall, so kommt es beim Durchlaufen wegen der unterschiedlichen Ausbreitungsgeschwindigkeiten der Komponente senkrecht, bzw. parallel zur optischen Achse zu einer **Phasenverschiebung** zwischen den beiden Komponenten.

Nach Durchlaufen eines doppelbrechenden Plättchens der Dicke  $d$  ist der Phasenunterschied:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}d(n_o - n_e)$$



Wichtige Spezialfälle:

$$d(n_o - n_e) = (2m + 1)\lambda/2$$

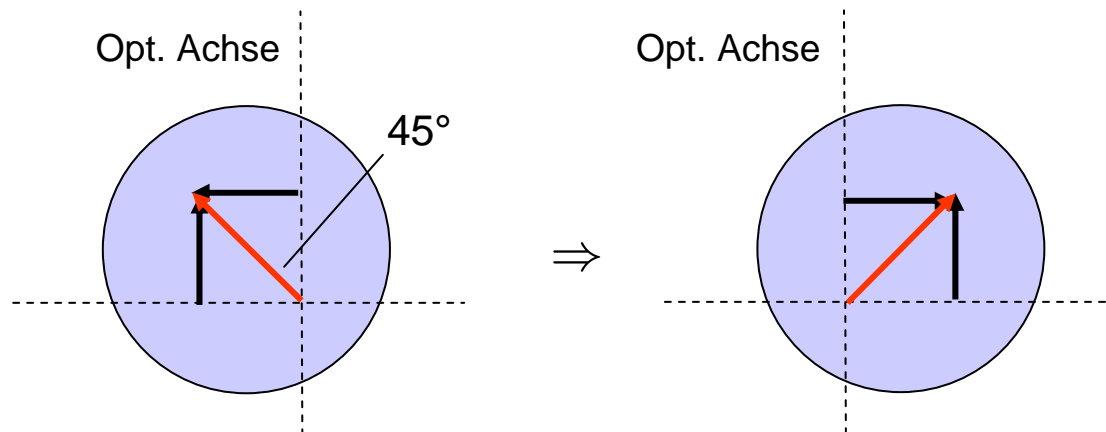
**$\lambda/2$ -Plättchen**

$$\Delta\phi = (2m + 1)\pi$$

$$d(n_o - n_e) = (4m + 1)\lambda/4$$

**$\lambda/4$ -Plättchen**

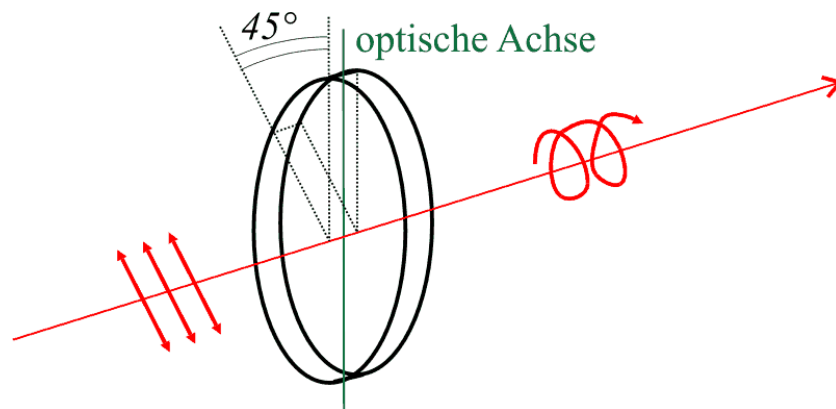
$$\Delta\phi = (4m + 1)\pi/2$$



$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Mit einem  $\lambda/2$ -Plättchen lässt sich die Polarisationsrichtung von linear polarisiertem Licht drehen.

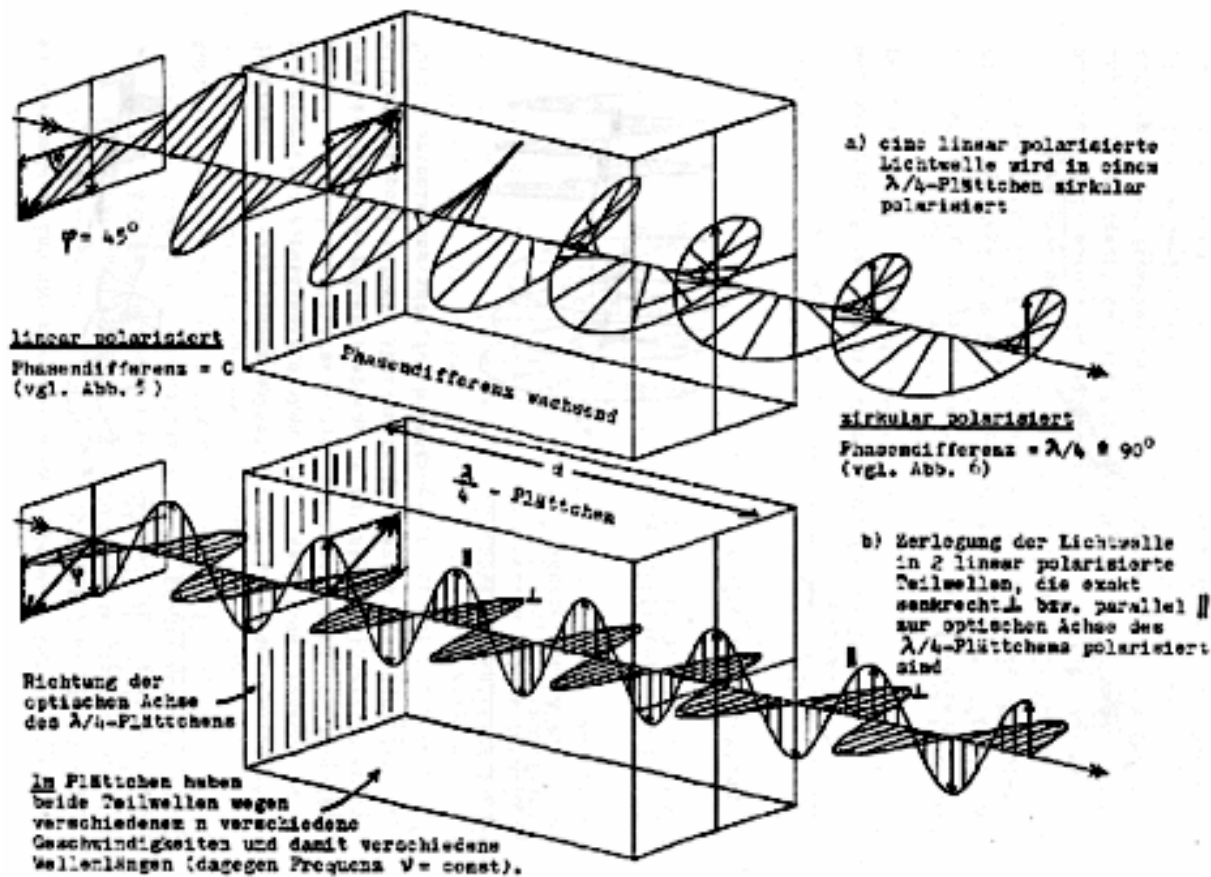
Der Spezialfall einer  $90^\circ$  Drehung ist auch in Matrixform geschrieben.



$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Mit einem  $\lambda/4$ -Plättchen lässt sich aus linear polarisiertem Licht zirkular polarisiertes Licht erzeugen (und umgekehrt).

Ein solcher Fall ist in Matrixform geschrieben.

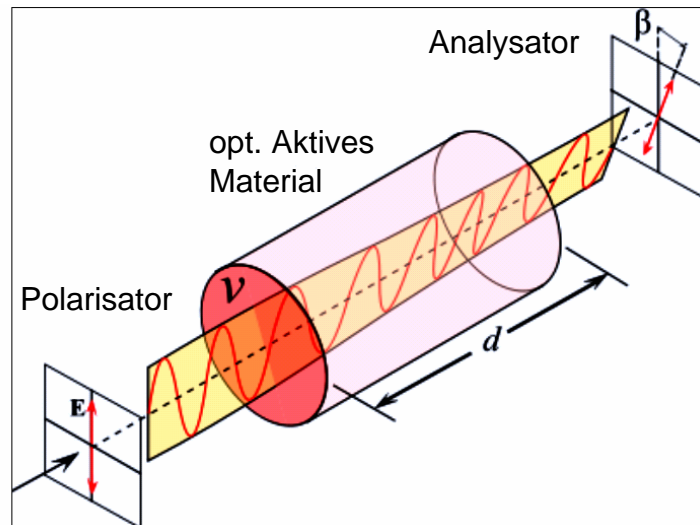


Verdeutlichung der Umwandlung von linearem in zirkular polarisiertes Licht durch ein  $\lambda/4$ -Plättchen.

Mit Hilfe von  $\lambda/4$ - und  $\lambda/2$ -Plättchen lassen sich beliebige Polarisierungen einstellen.

### 3.5. Optische Aktivität

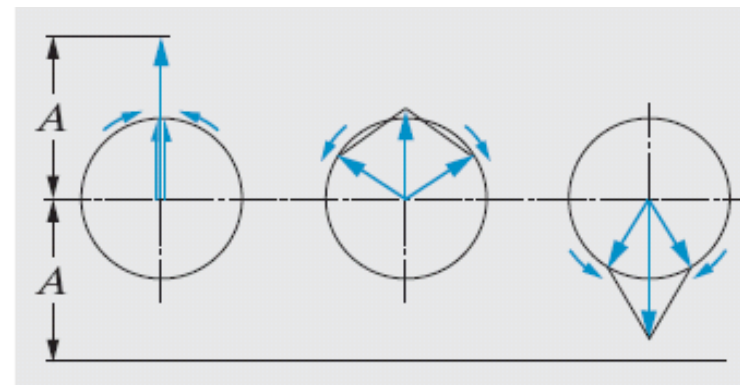
Phänomen: Die Polarisationsrichtung von linear polarisiertem Licht wird beim Durchgang durch ein **optisch aktives Material** gedreht.



Die Drehrichtung ist unabhängig von der Durchlaufrichtung des Lichtes. Sie ist oft durch eine Chiralität der Konstituenten (z.B. Molekülketten) des Materials bedingt.

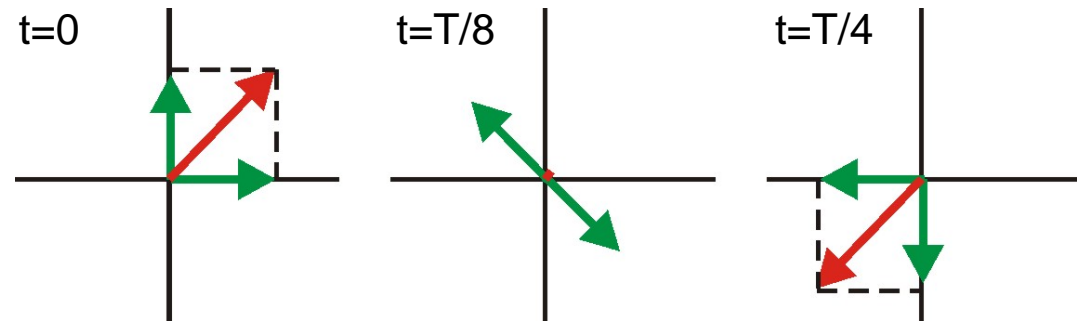
Das Phänomen kann als unterschiedliche Ausbreitungsgeschwindigkeit für rechts- bzw. links zirkular polarisiertes Licht interpretiert werden

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}}_{\text{links zirkular}} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}}_{\text{rechts zirkular}} \right]$$

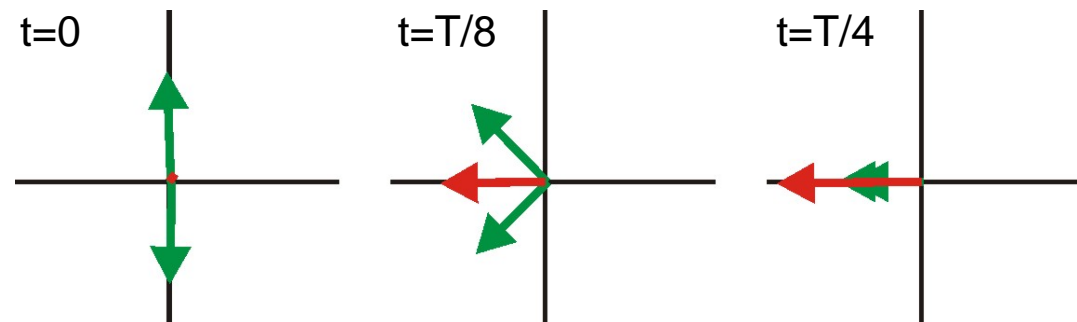


Überlagerung zirkularer Schwingungen zu einer linearen Schwingung

Addition von rechts- und links zirkularer Komponente zur linearen Schwingung:



Addition von rechts- und links zirkularer Komponente zur linearen Schwingung nach einer Phasenverschiebung der einen Komponente um  $\pi/2$ . Die Schwingungsrichtung ist jetzt um  $45^\circ$  gedreht:



Quantifiziert wird die optische Aktivität durch das spezifische Drehvermögen  $\beta/d$

$$[\beta/d] = \text{Grad/mm}$$

## 3.6. Elektrooptische Effekte

### Faraday-Effekt und optische Aktivität

Faraday entdeckte 1845, daß das Anlegen eines magnetisches Feld eine ähnliche Wirkung in einem Material erzeugt wie die optische Aktivität.

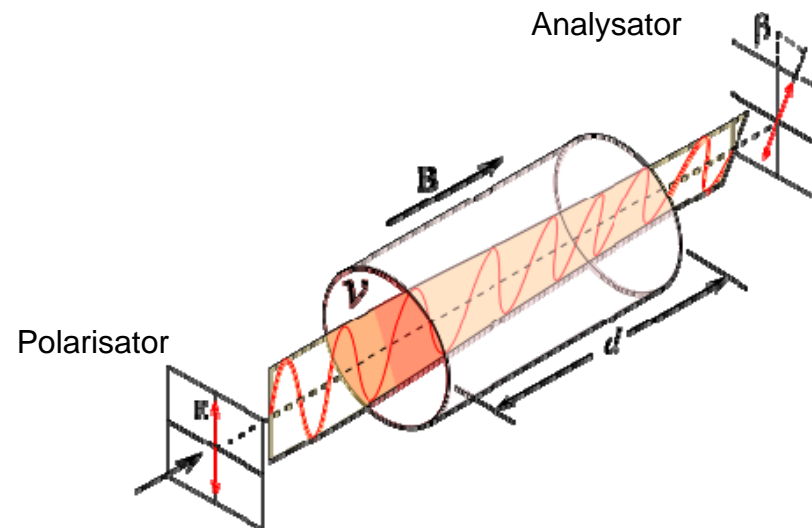
→ Drehung der Polarisationsachse

Die Größe des Effektes ist klein und wird durch die Verdet-Konstante  $V$  angegeben:

$$V = 10^{-2} \frac{\text{min}}{\text{Gcm}} \quad (\text{Wasser, Flintglas, NaCl})$$

$$\text{Es ist: } \beta/d = VB$$

$$V = 10^{-6} \frac{\text{min}}{\text{Gcm}} \quad (\text{Luft})$$



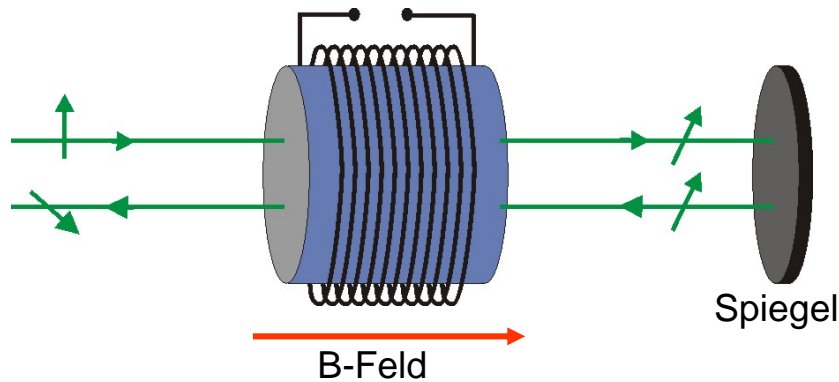
rechts: Anordnung zur Messung des Farady-Effekts

Unterschied zwischen optischer Aktivität und Faraday-Effekt:

**Faraday-Effekt**

linksdrehend, falls B-Feld parallel zum Wellenvektor  $k$ .

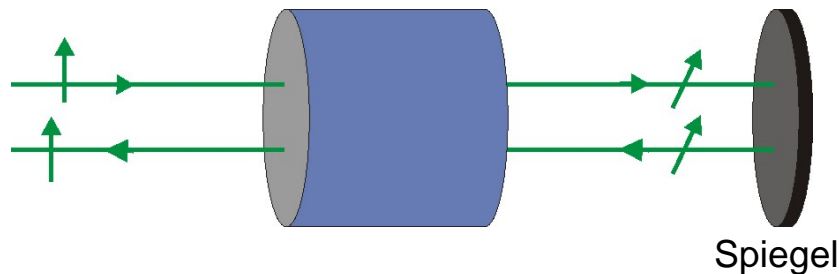
rechtsdrehend, falls B-Feld anti-parallel zum Wellenvektor  $k$ .



Nach einer Reflexion an einem Spiegel wird die Schwingungsachse bei erneutem Durchgang durch das Material weiter gedreht.

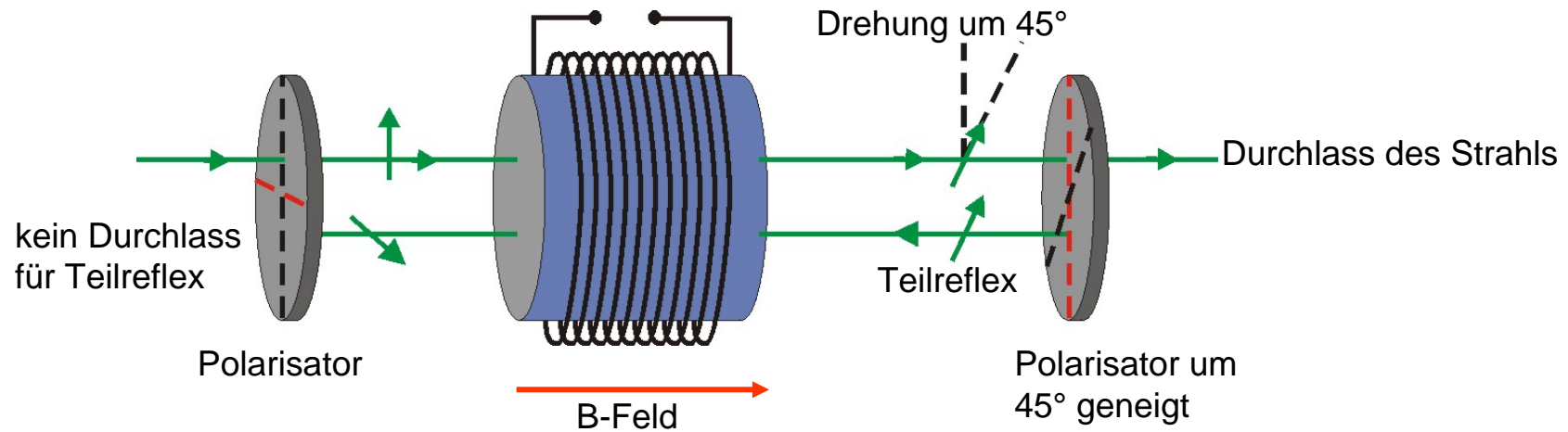
**Optische Aktivität**

immer links-(bzw. rechts-)drehend, unabhängig vom Wellenvektor  $k$ .



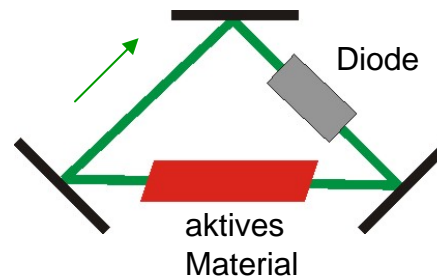
Nach einer Reflexion an einem Spiegel wird bei erneutem Durchgang durch das Material die Rotation rückgängig gemacht.

Mit Hilfe des Faraday-Effekts lässt sich eine **optische Diode** konstruieren:



Wichtige Anwendungen der Unterdrückung von Rückreflexen:

- Selektion nur einer umlaufenden Mode in Ringlasern



- Unterdrückung von Rückreflexen zu Diodenlasern



## Kerr- und Pockels-Effekt

Das Anlegen einer Spannung kann in einem Kristall oder in einer Flüssigkeit eine Anisotropie erzeugen, die zur Doppelbrechung führt. Die optische Achse liegt dann z.B. in Richtung des angelegten Feldes.



Der Unterschied im Brechungsindex für den ordentlichen und außerordentlichen Strahl ist:

$$\Delta n = \lambda K E^2$$

Quadratischer elektrooptischer oder Kerr-Effekt

Kerr-Koeffizient      Elektrisches Feld

$$[K] = \text{m/V}^2$$

Eine Flüssigkeit mit einem besonders großen Kerr-Koeffizient ist Nitrobenzol

$$K_{\text{Nitrobenzol}} = 220 \frac{10^{-7} \text{ cm}}{300 \text{ V}^2}$$

Der **Pockels-Effekt** tritt nur in Kristallen auf, die keine Inversionssymmetrie besitzen, wie Lithiumniobat, KD\*P (Kaliumdideuteriumphosphat) oder Galliumarsenid.

Der Phasenunterschied zwischen zwei Komponenten unterschiedlicher Polarisation ist beim Pockels-Effekt:

$$\Delta\phi = 2\pi n_0^3 P U / \lambda$$

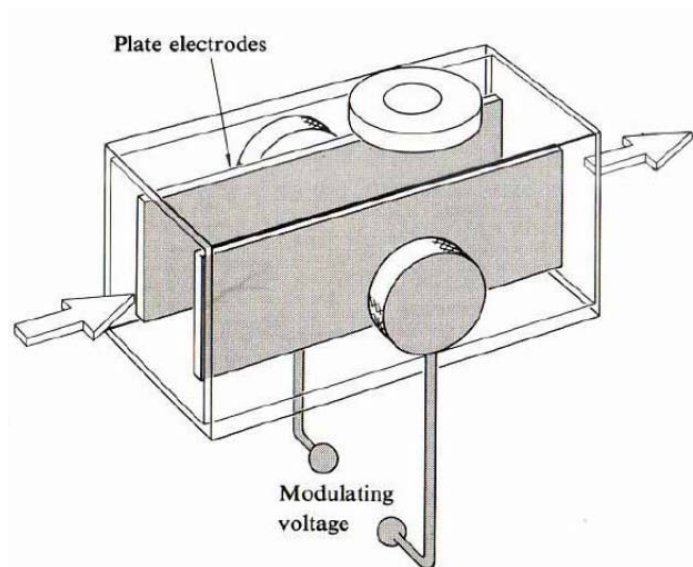
linearer elektrooptischer oder Pockels-Effekt

Pockels-Koeffizient      Spannung

$$[P]=\text{m/V}$$

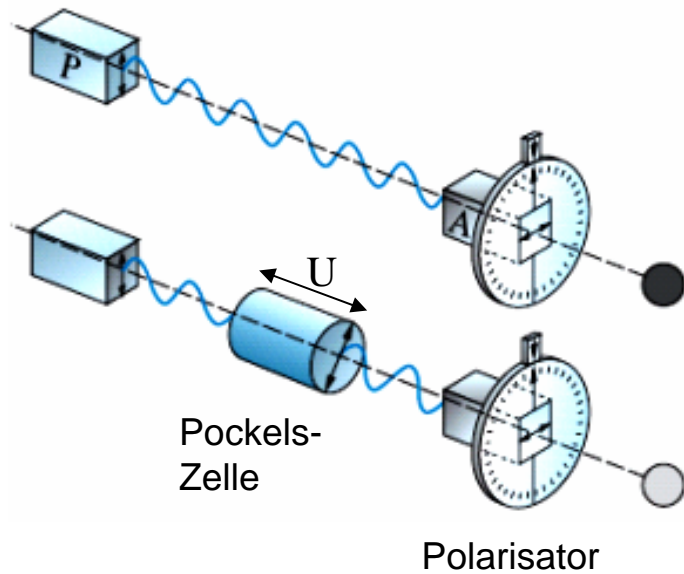
Typische Grössenordnung des Pockels-Koeffizienten:  $P_{\text{KDP}} = 20 \times 10^{-12} \text{ m/V}$

Eine **Pockels-Zelle** ist ein elektrisch schnell schaltbarer, doppelbrechender Kristall. Er kann zur Modulation von Licht oder als schneller elektrooptischer Schalter verwendet werden.



Schematische Darstellung einer transversalen Pockels-Zelle [Hecht, „Optik“].

Es existieren auch longitudinale Zellen mit elektrischen Kontakten am Lichteintritt und -austritt (oft in Form von Blenden)



Eine Pockels-Zelle in Kombination mit einem Polarisator kann als schneller optischer Schalter dienen.

Ohne angelegte Spannung wird kein Licht durch den Polarisator transmittiert.

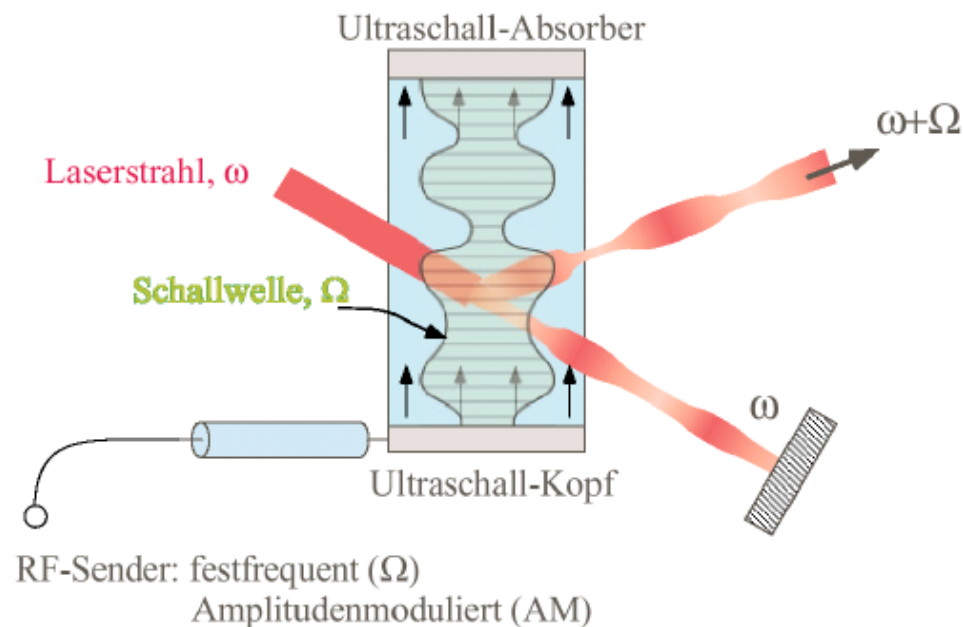
Eine angelegte Spannung dreht die Polarisationsrichtung.

## Akustooptischer Modulator

Im **akustooptischen Modulator** werden Schallwellen zur Modulation des Brechungsindex in einem transparenten Kristall eingesetzt. Dadurch lässt sich einfallendes Licht in Amplitude und Frequenz modulieren.

Die durch ein Piezoelement erzeugte Ultraschallwelle (10-1000 MHz) erscheint dem Licht im Medium als stationäres Gitter, an dem es gebeugt wird.

Somit lässt sich ein schneller Schalter für Licht realisieren.



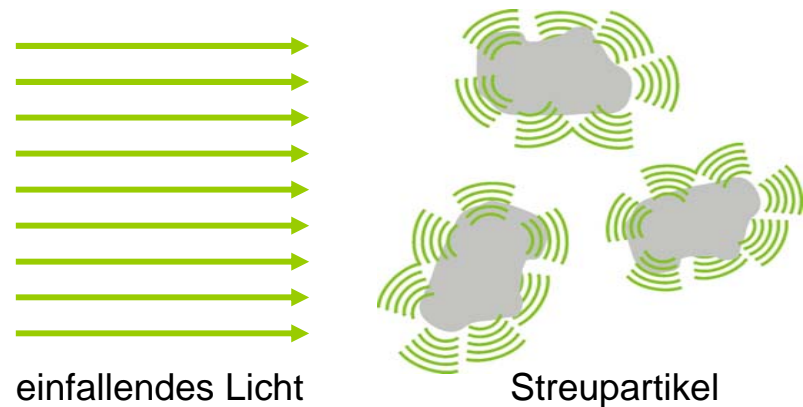
Schema eines akustooptischen Modulators [Pospiech & Friebe]

### 3.7. Lichtstreuung

Man unterscheidet bei der Lichtstreuung i.A. zwei Fälle:

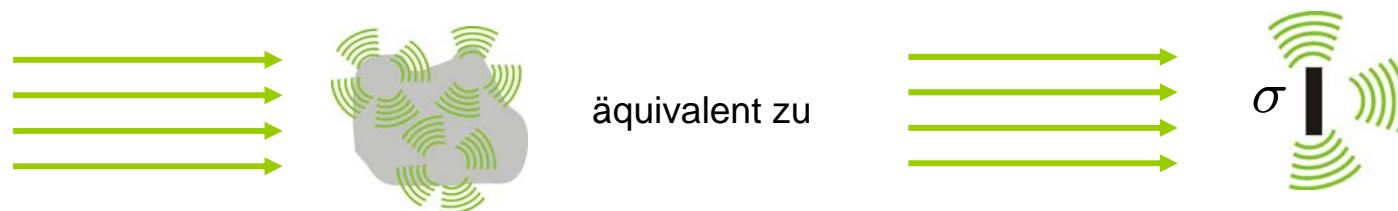
1)  $\lambda \ll$  Partikelgröße  $\longrightarrow$  **Mie-Streuung**

2)  $\lambda \gg$  Partikelgröße  $\longrightarrow$  **Rayleigh-Streuung**



Allgemeines Prinzip der Streuung:  
Eine einfallende Lichtwelle erzeugt  
in den Streupartikeln Huygensche  
Elementarwellen.

Eine wichtige Größe bei einem Streuvorgang ist der **Wirkungsquerschnitt** eines Streuers. Er beschreibt die Größe einer Fläche mit derselben Streu- oder Absorptionsleistung wie der Streuer.  $[\sigma]=\text{m}^2$



## Mie-Streuung

Im Falle der Mie-Streuung erfolgt eine Anregung vieler kohärenter Elementarwellen im Streupartikel. Es treten insbesondere Resonanzen in Abhängigkeit von der Partikelgröße im Vergleich zur Wellenlänge des gestreuten Lichts auf.



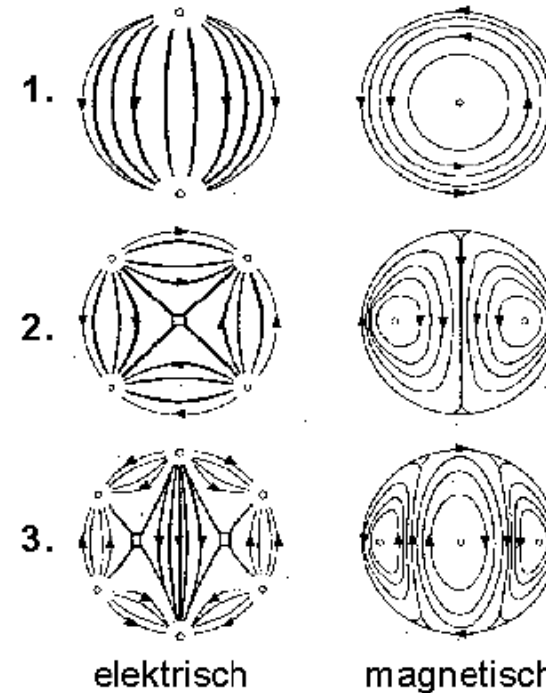
Cartoon-Darstellung von Mie-Streuung

Streuleistung bei Mie-Streuung:

$$P_{\text{Streu}}^{(\text{Gesamt})} = N^2 P_{\text{Streu}}^{(\text{Partikel})}$$

↙ ↘ ↙ ↘ ↙ ↘  
 gesamte Streuleistung    Anzahl der Streuer    Streuleistung eines Partikels

### Partialschwingungen in dielektrischen Kugeln



Einige resonante Moden des elektromagnetischen Feldes (Mie-Resonanzen) in kleinen Kugeln

## Rayleigh-Streuung



Im Rayleigh-Regime erzeugt jeder Partikel eine einzelne Elementarwelle.

Die Elementarwellen überlagern sich inkohärent.

Die Streuleistung ist proportional zur Anzahl der Streuer.

Rayleigh führte 1871 eine einfache heuristische Analyse der Streuung durch:

Das Verhältnis von einfallender Amplitude zur Streuamplitude  $\kappa$  an einem Raumpunkt  $r$  ist zum einen durch eine einfache trigonometrische Funktion (sin oder cos) gegeben.

Zum anderen hängt sie vom Volumen  $V$  des Streupartikels, dem Abstand  $|r|$ , der Wellenlänge  $\lambda$  und der Lichtgeschwindigkeit  $c$  ab.

Aus Dimensionsgründen ergibt sich nur eine einfache Kombination dieser Größen:

$$\kappa \propto \frac{V}{|r|} \frac{1}{\lambda^2}$$

Somit ist die gestreute Intensität proportional zu  $\kappa^2 \propto \frac{1}{\lambda^4} \propto \omega^4$

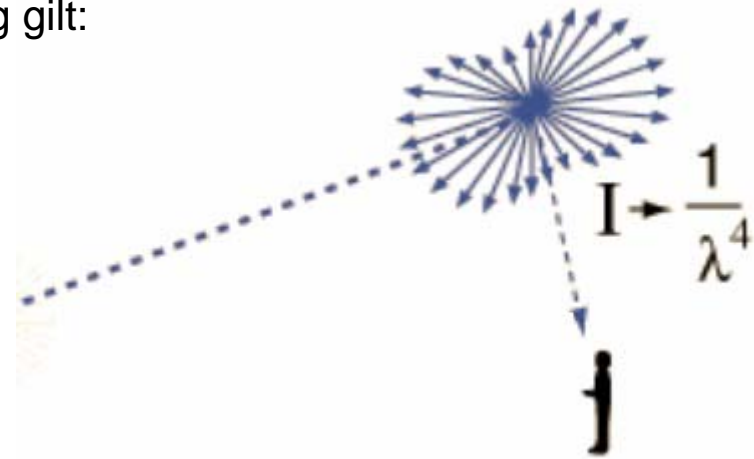
Für den Streuquerschnitt bei der Rayleigh-Streuung gilt:

$$\sigma_{Rayleigh} \propto \omega^4$$

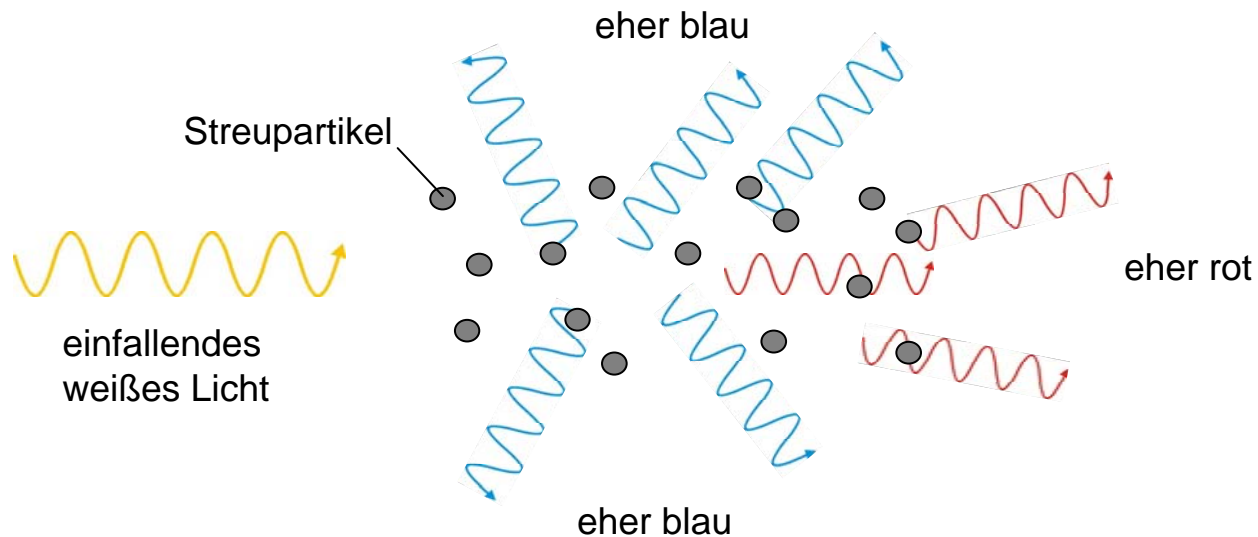
Diese Abhängigkeit kann natürlich auch streng aus der Elektrodynamik abgeleitet werden.

Aus der Rayleigh-Streuung folgt: Kurzwelliges Licht wird stärker gestreut als langwelliges.

Mit Hilfe der Rayleighstreuung kann das Abendrot und die blaue Himmelfarbe erklärt werden:



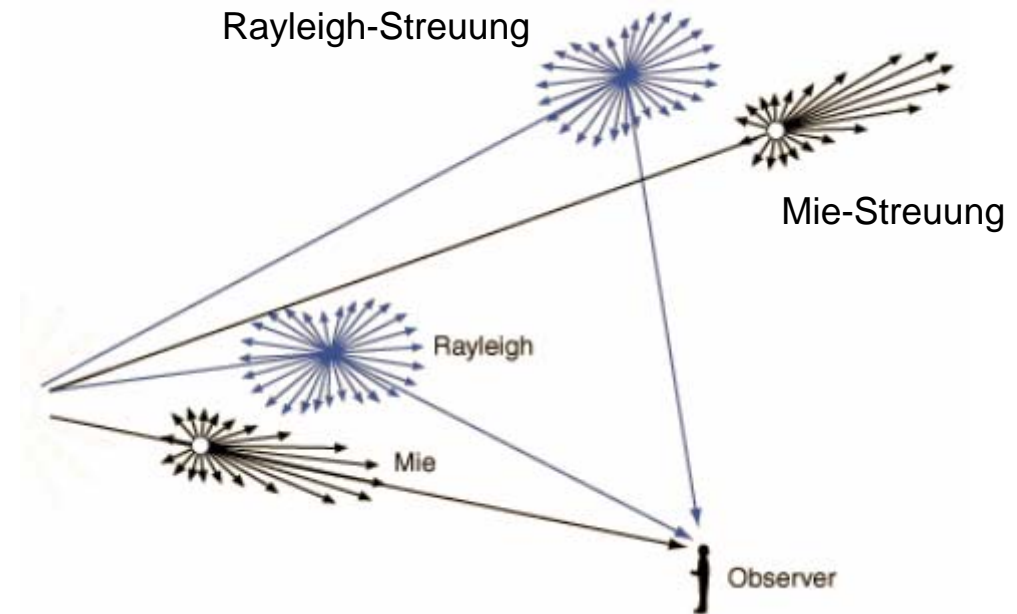
Rayleigh-Streuung





Ein Beobachter sieht von oben her eher die Rayleigh-Streuung, da die Mie-Streuung stärker in die Vorwärtsrichtung erfolgt.

Die Mie Streuung ist (bis auf spezielle Resonanzen) weitestgehend wellenlängen-unabhängig. Deshalb erscheinen Wolken (relativ große Wassertropfchen) weiß und nicht blau wie der Himmel.



Ein blauer Himmel (Rayleigh-Streuung) und weiße Wolken (Mie-Streuung)  
[<http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/atmos/blusky.html>]