

## 2. Welle-Teilchen-Dualismus

### 2.1. Materiewellen

Die Welleneigenschaften von Materie legen die Suche nach einer Wellengleichung nahe.  
Randbedingungen für Wellen sind eine Ursache für das Auftreten der Quantisierung.

➔ Stehwellen

Ein grundlegender Ausgangspunkt ist die Zuordnung der Energie  $E$  eines Teilchens zu einer Welle mit der Frequenz  $\omega$ :

$$\omega = E/\hbar$$

Die allgemeine Form einer ebenen Welle ist:  $\psi(r, t) = e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$

mit der Phasengeschwindigkeit:  $v_\phi = \frac{\omega}{k}$

Die ebene Welle ist im Raum delokalisiert!

Lokalisierten Teilchen um einen Raumpunkt  $r$  entsprechen Wellenpakete.

$$\psi(r, t) = \int f(k) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} dk \quad \text{Wellenpaket}$$

Für Teilchen mit einem (in etwa) definierten Impuls ist die Verteilung  $f(k)$  nur um einen kleinen Bereich  $k=k_0$  von Null verschieden

Beispiel: Eindimensionales Wellenpaket

$$\psi(x, t) = \int f(k) e^{i\phi} dk \quad \phi = kx - \omega t$$

Der Beitrag zum Wellenpaket von  $k$ -Vektoren um einen Wert  $k=k_0$  ist nur für einen Bereich  $\Delta k$  nennenswert:

$$\left| \frac{d\phi}{dk} \right| \leq \frac{1}{\Delta k}$$

Änderung der Phase an  $k=k_0$                       Gangunterschied

Mit  $\frac{d\phi}{dk} = x - t \frac{d\omega}{dk} \leq 1/\Delta k$  folgt:

➔ Das Wellenpaket ist um einen kleinen Bereich  $\Delta x \approx \frac{1}{\Delta k}$  konzentriert.

➔ Das Wellenpaket bewegt sich mit einer Geschwindigkeit  $v_G = \frac{d\omega}{dk}$ .

$v_G$  ist die Gruppengeschwindigkeit  $\longleftrightarrow$  Zusammenhang mit klassischer Teilchengeschwindigkeit

Klassisch gilt:  $v_{cl} = \frac{dE}{dp}$

mit  $E = \hbar\omega \longrightarrow v_{cl} = \hbar \frac{d\omega}{dp} = v_G = \frac{d\omega}{dk}$

$$p = \hbar k = \frac{h}{\lambda}$$

Es folgt somit die De Broglie-Beziehung!  
(möglich additive Konstante wird null gesetzt)

Insgesamt:  $p = \hbar k$  und  $E = \hbar\omega$

## 2.2. Die Schrödingergleichung

### 2.2.1. Motivation

Welcher Bewegungsgleichung genügt nun das Wellenpaket  $\psi(r, t)$  ?

Allgemeine Anforderungen an die Bewegungsgleichung:

1) Die Gleichung muss linear und homogen sein.  $\longrightarrow$  Superpositionseigenschaft  
Falls  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  Lösungen sind, dann auch  $c_1\lambda_1+c_2\lambda_2$  !

2) Die Gleichung muss erster Ordnung in der Zeit sein.  
Der Zustand des Systems ist durch  $\psi(r, t)$  vollständig (und für alle Zeiten) bestimmt.

3) Das Korrespondenzprinzip muss gelten.  
Die Struktur der Gleichungen muss für „makroskopischere“ Systeme in die klassischen übergehen.



E. Schrödinger (1926)

In einer Dimension (x) gilt:

$$\text{Sei } \psi(x, t) = \int f(p_x) e^{i(p_x x - Et)/\hbar} dp_x \quad \text{mit} \quad E = \frac{p_x^2}{2m}$$

$$\text{Es folgt (Zeitableitung): } i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = \int E f(p_x) e^{i(p_x x - Et)/\hbar} dp_x$$

$$\text{und (Ableitung nach x): } \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \psi(x, t) = \int p_x f(p_x) e^{i(p_x x - Et)/\hbar} dp_x$$

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t) = \int p_x^2 f(p_x) e^{i(p_x x - Et)/\hbar} dp_x$$

somit 
$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t)$$
 Schrödingergleichung für ein freies Teilchen in einer Dimension

$$= \frac{1}{2m} \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \psi(x, t)$$

Formale Zuordnung von Operatoren:

$$E \longrightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

$$p_x \longrightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$$

← ebenso für y und z!

Wie sieht die eindimensionale Schrödingergleichung für die Bewegung eines Teilchens in einem Potential  $V(x)$  aus?

Postulat:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right) \psi(x, t)$$

kinetische Energie                      potentielle Energie

Schrödingergleichung für ein Teilchen in einem Potential

Diese Gleichung kann nicht hergeleitet werden, sondern wird postuliert.  
Ihre Gültigkeit muss experimentell überprüft werden!

Tatsächlich ist das Postulat korrekt. Die Schrödingergleichung lautet also:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = H \psi(x, t)$$

mit  $H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$

in einer Dimension

$H$  ist der Hamiltonoperator (engl. Hamiltonian).

## 2.2.2. Die zeitunabhängige Schrödingergleichung

Hängt  $H$  nicht explizit von der Zeit ab (konservatives System), so ist die Gesamtenergie  $E$  eine Konstante der Bewegung.

Mit  $E = \hbar\omega$  muss  $\psi(x, t)$  also die folgende Form haben:

$$\Psi(x, t) = \psi(x) \exp^{-i\frac{E}{\hbar}t}$$

Einsetzen liefert die zeitunabhängige Schrödingergleichung:

$$H\psi_E(x) = E\psi_E(x)$$

$\psi_E(x)$  heisst Eigenfunktion des Operators  $H$ .

Zur vollständigen Lösung eines (zeitunabhängigen) physikalischen Problems muss  $\psi_E(x)$  die Regularitäts- und Randwertbedingungen erfüllen. Zunächst heisst dies:

- 1)  $\psi_E(x)$  muss stetig sein!
- 2) Die erste Ableitung von  $\psi_E(x)$  muss stetig sein!

Die zeitunabhängige Schrödingergleichung ist eine Eigenwertgleichung für den Operator  $H$ !

Quantentheorie:

$$\begin{array}{c} \text{Wellenfunktion} \\ \downarrow \\ H\psi_E(x) = E\psi_E(x) \\ \uparrow \qquad \qquad \uparrow \\ \text{Operator} \qquad \qquad \text{Skalar} \end{array}$$

Lineare Algebra:

$$\begin{array}{c} \text{Vektor} \\ \downarrow \\ M\vec{v} = m\vec{v} \\ \uparrow \qquad \qquad \uparrow \\ \text{Matrix} \qquad \qquad \text{Skalar} \end{array}$$

Die Eigenwertgleichung für einen Hamiltonoperator  $H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$  hat spezielle Eigenschaften:

- 1)  $E < 0$  Die Eigenwertgleichung ist nur für bestimmte Eigenwerte  $E$  lösbar.  
Das Eigenwertspektrum ist diskret.

➡ Gebundene Zustände

- 2)  $E > 0$  Die Eigenwertgleichung ist für jeden Eigenwert  $E$  lösbar.  
Das Eigenwertspektrum ist kontinuierlich.

➡ Ungebundene Zustände



## 2.3. Eindimensionale Quantensysteme

### 2.3.1. Einleitung

Betrachtung des speziellen Falles der eindimensionalen Bewegung eines Teilchens in einem allgemeinen Potential  $V(x)$ :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right) \psi(x, t)$$

Stationäre Lösungen:

$$\Psi(x, t) = \psi(x) \exp^{-i\frac{E}{\hbar}t}$$

Entsprechendes Eigenwertproblem:

$$H\psi_E(x) = E\psi_E(x)$$

Im folgenden benutzte Abkürzung:  $V(x) = \frac{\hbar^2}{2m}U(x)$  und  $E = \frac{\hbar^2}{2m}\epsilon$

Somit:  $\psi'' = (U - \epsilon)\psi$

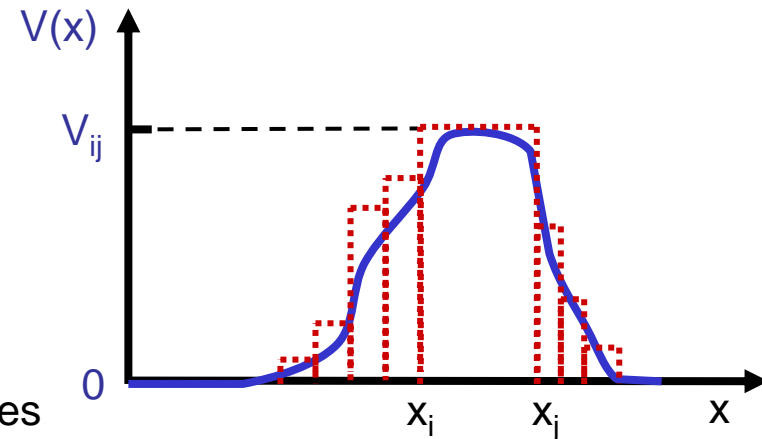
zweifache Ableitung nach x

Allgemeines zu lösendes Eigenwertproblem

Man beschreibt eine beliebige Potentialform  $V(x)$  mit Hilfe der Zerlegung in Bereiche konstanten Potentials  $V_{ij}$  (Rechteckpotential):

$$V(x) = V_{ij} = \text{const.}$$

$$x_i \leq x \leq x_j$$



Man bestimmt dann die Lösungen für jeweils konstantes Potential unter der Berücksichtigung der Randbedingung:

$$\psi'(x), \psi(x) \text{ stetig für alle } x.$$

Allgemeine Lösungen für ein bestimmtes konstantes  $V_i$ , bzw.  $U_i$ :

$$1) \epsilon > U_i \quad \psi(x) = e^{\pm ik_i x} \quad k_i = \sqrt{\epsilon - U_i}$$

oszillatorische Lösung

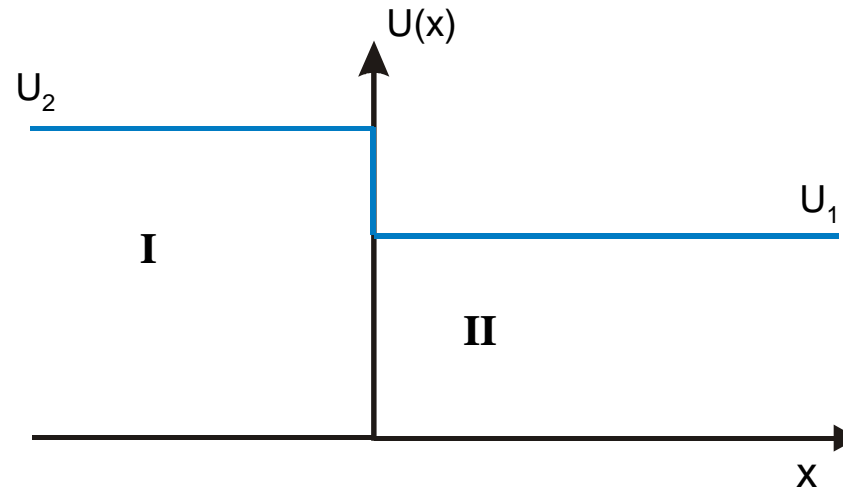
$$2) \epsilon < U_i \quad \psi(x) = e^{\pm \kappa_i x} \quad \kappa_i = \sqrt{U_i - \epsilon}$$

exponentielle Lösung

## 2.3.2. Die endliche Potentialstufe

Man betrachtet folgende Potentialform:

$$U(x) = \begin{cases} U_1 & x > 0 \\ U_2 & x < 0 \end{cases}$$



$$\text{Fall i) } U_2 > \epsilon > U_1$$

Lösung im Bereich II  $\rightarrow$  oszillatorsch

Lösung im Bereich I  $\rightarrow$  exponentiell abfallend

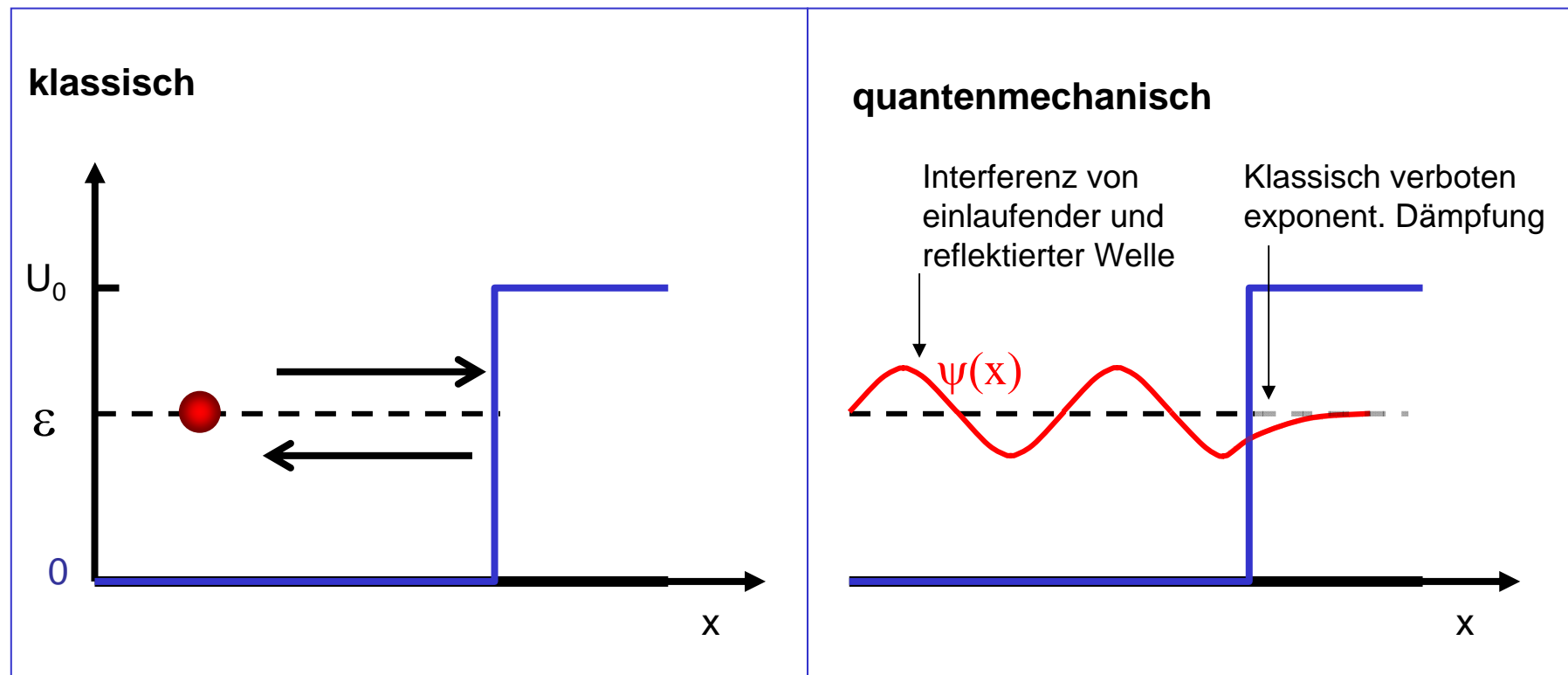
$$\psi(x) = \begin{cases} A_1 \sin(k_1 x + \phi) & x > 0 \\ A_2 e^{\kappa_2 x} & x < 0 \end{cases}$$

Die Stetigkeit der Ableitung bei  $x=0$  liefert:

$$k_1 \cot(\phi) = k_2 \quad \text{somit} \quad \phi = \arctan(k_1/k_2)$$

Die Stetigkeit von  $\psi(x)$  :

$$\frac{A_2}{A_1} = \sin(\phi) = \frac{k_1}{\sqrt{k_1^2 + \kappa_2^2}} = \sqrt{\frac{\epsilon - U_1}{U_2 - U_1}}$$



Fall ii)  $\epsilon > U_2$

Oszillatorische Lösung im gesamten Raumbereich!

Ansatz:

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{-ik_1x} + r e^{ik_1x} & x > 0 \\ t e^{-ik_2x} & x < 0 \end{cases}$$

Einlaufende Welle der  
Amplitude 1

Amplitudentransmissionskoeffizient  
(transmitierte Welle)

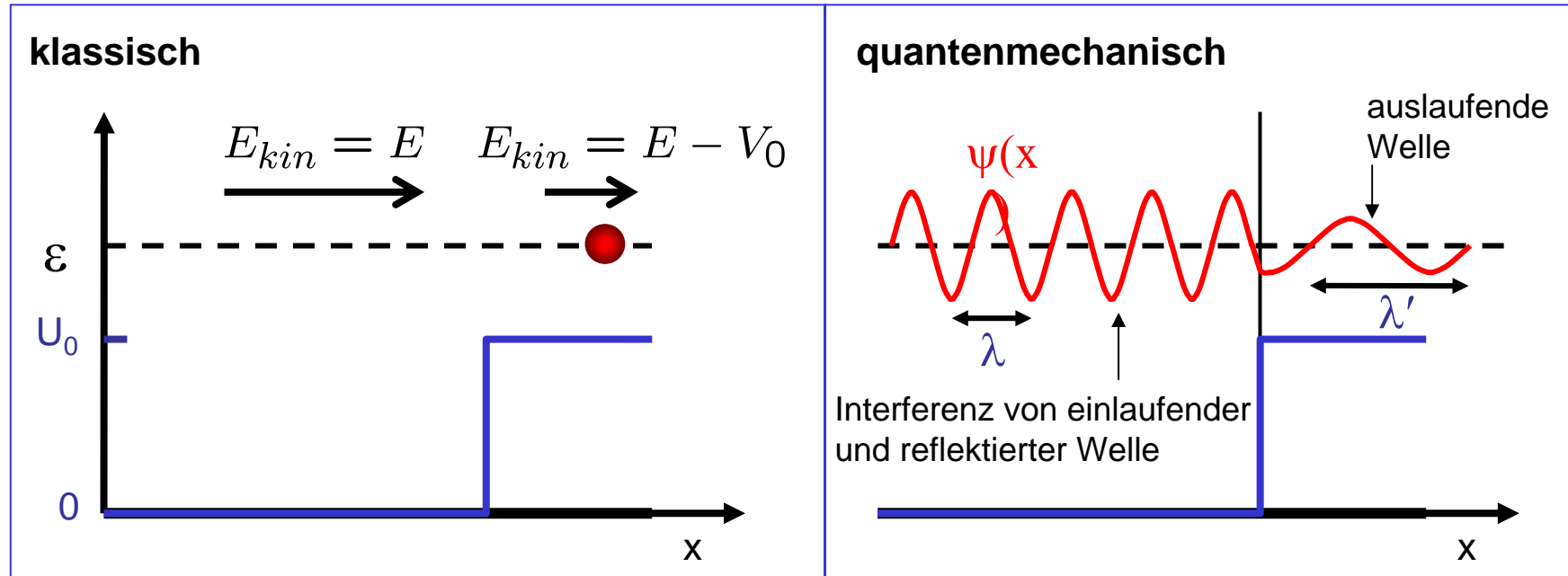
Amplitudenreflexionskoeffizient  
(reflektierte Welle)

Für die (Amplituden)-Reflexions- bzw. Transmissionskoeffizienten ( $r$  bzw.  $t$ )  
folgt aus den Stetigkeitsbedingungen:

$$r = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}$$

$$t = 1 + r = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}$$

Analogie zur Reflexion und  
Transmission von Lichtwellen  
an dielektrischer Grenzfläche  
(Fresnelkoeffizienten)!



Die Beschreibung der Bewegung eines räumlich lokalisierten Teilchens kann man mit Hilfe eines Wellenpaketes beschreiben:

$$\psi(x, t) = \int f(k_x) e^{i(k_x x - Et/\hbar)} dk_x$$

## Unterschiede zur klassischen Physik:

a) Das Wellenpaket kann auch im Fall  $U_2 > \epsilon > U_1$  in den (klassisch verbotenen) Bereich II eindringen

b) Das reflektierte Wellenpaket erfährt eine zeitliche Verzögerung (Phasenverschiebung im Fall einer ebenen Welle)

c) Auch für den Fall  $\epsilon > U_2$  gibt es eine Reflexion.

Die Reflexionswahrscheinlichkeit  $R$  und die Transmissionswahrscheinlichkeit  $T$  sind dabei:

$$R = |r|^2 = \left| \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right|^2$$

$$T = \frac{k_2}{k_1} |t|^2 = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2}$$

### 2.3.3. Der unendlich hohe Potentialtopf

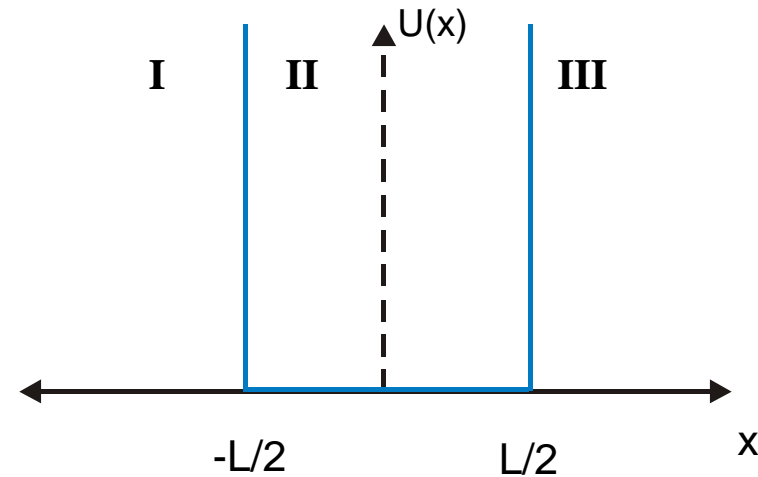
Man betrachtet folgende Potentialform:

Die Wellenfunktion verschwindet in den Bereichen I und III.

Im Bereich II existieren oszillatorische Lösungen der Form:

$$\psi_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad n \text{ ungerade}$$

$$\psi_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad n \text{ gerade}$$



Die Eigenfunktionen haben eine bestimmte Parität:  $\psi_n(x) = \pm\psi_n(-x)$

(Invarianz von  $U(x)$  bei Spiegelung!)

Die zugehörigen Eigenenergien sind:

$$\epsilon_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2} \quad \text{bzw.} \quad E_n = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{n^2\pi^2}{L^2}$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

quadratische n-Abhängigkeit!



### 2.3.4. Der harmonische Oszillator

Das harmonische Potential hat die Form:

$$U(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

Die Eigenenergien des harmonischen Oszillators sind (Details in Lehrbüchern zur Quantenmechanik):

$$E_n = \left(\frac{1}{2} + n\right)\hbar\omega$$

Nullpunktsenergie

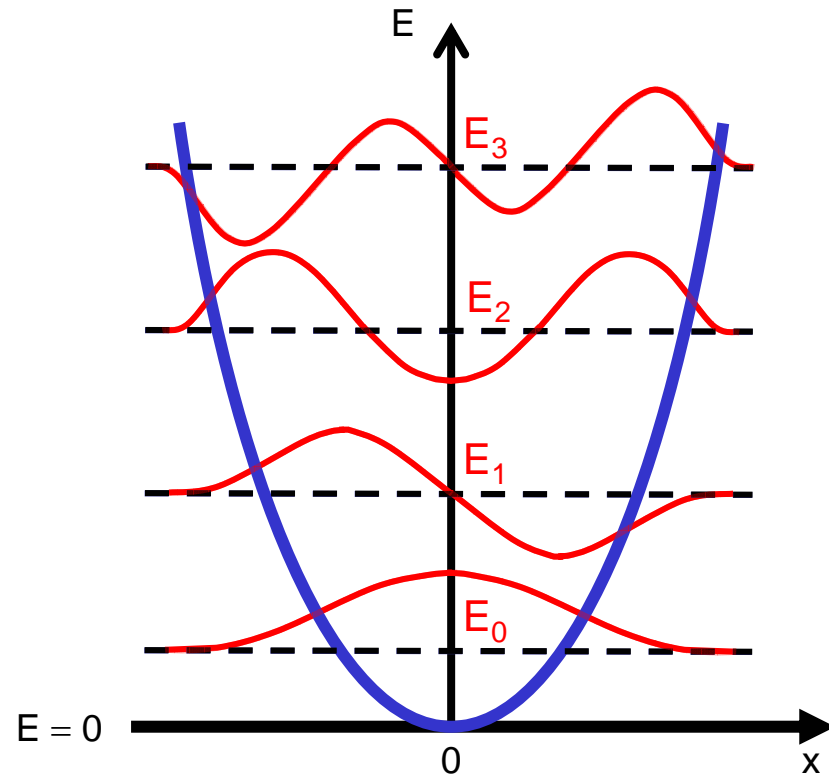
lineare n-Abhängigkeit

Die Energieniveaus sind äquidistant!

Die Eigenfunktionen sind  $\psi_n(x)$  Hermite-Polynome:

$$\psi_n(x) = \frac{\pi^{-1/4}}{\sqrt{2^n n! a}} e^{-x^2/2a^2} H_n(x/a)$$

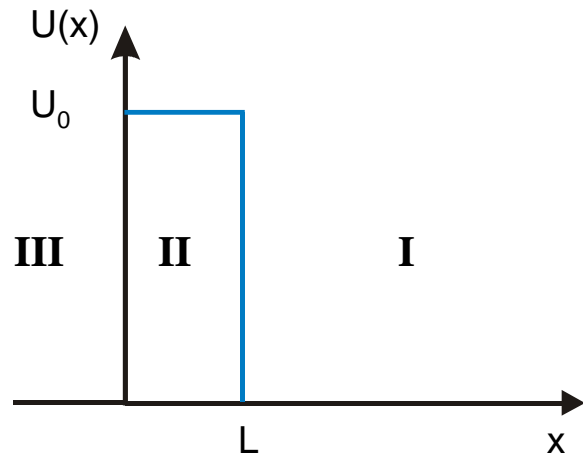
$$a = \sqrt{\hbar/(m\omega)}$$



## 2.4. Der Tunneleffekt

### 2.4.1. Die Tunnelbarriere

Ein sehr wichtiges Beispiel eines Rechteckpotentials ist der Potentialwall:



$$U(x) = \begin{cases} 0 & x > L \\ U_0 & 0 < x < L \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Für die beiden Fälle  $\epsilon > U_0$  und  $\epsilon < U_0$  lässt sich eine Transmissionswahrscheinlichkeit  $T$  durch die Barriere angeben:

$$T = \frac{4\epsilon(\epsilon - U_0)}{4\epsilon(\epsilon - U_0) + U_0^2 \sin^2(kL)} \quad \epsilon > U_0 \quad k = \sqrt{\epsilon - U_0}$$

$$T = \frac{4\epsilon(U_0 - \epsilon)}{4\epsilon(U_0 - \epsilon) + U_0^2 \sinh^2(\kappa L)} \quad \epsilon < U_0 \quad \kappa = \sqrt{U_0 - \epsilon}$$

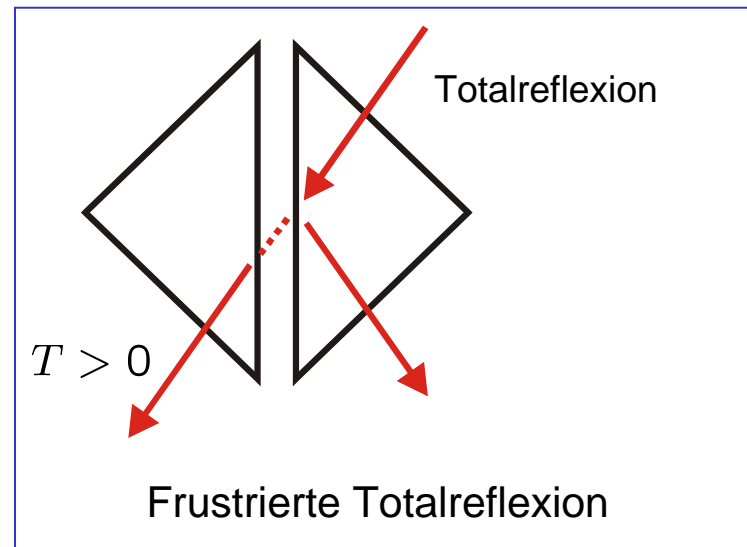
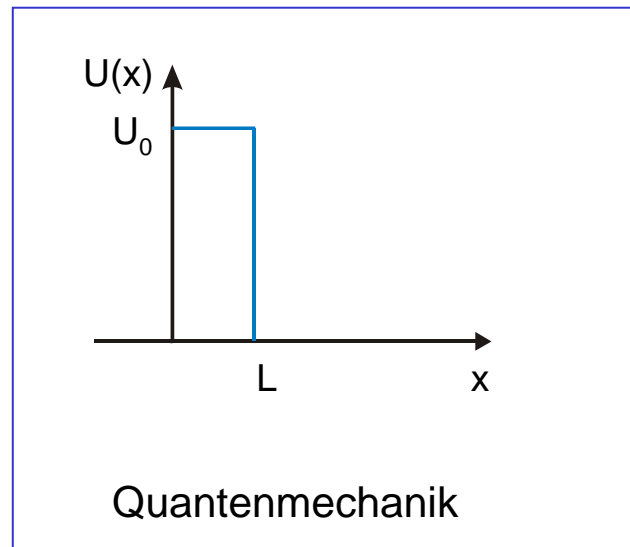
Wie in den anderen Beispielen für Rechteckpotentiale verhält sich die Wellenfunktion

exponentiell  $\psi(x) \approx Ae^{\kappa x} + Be^{-\kappa x} \quad \epsilon > U_0$

oszillatorisch  $\psi(x) \approx Ce^{ikx} + De^{-ikx} \quad \epsilon > U_0$

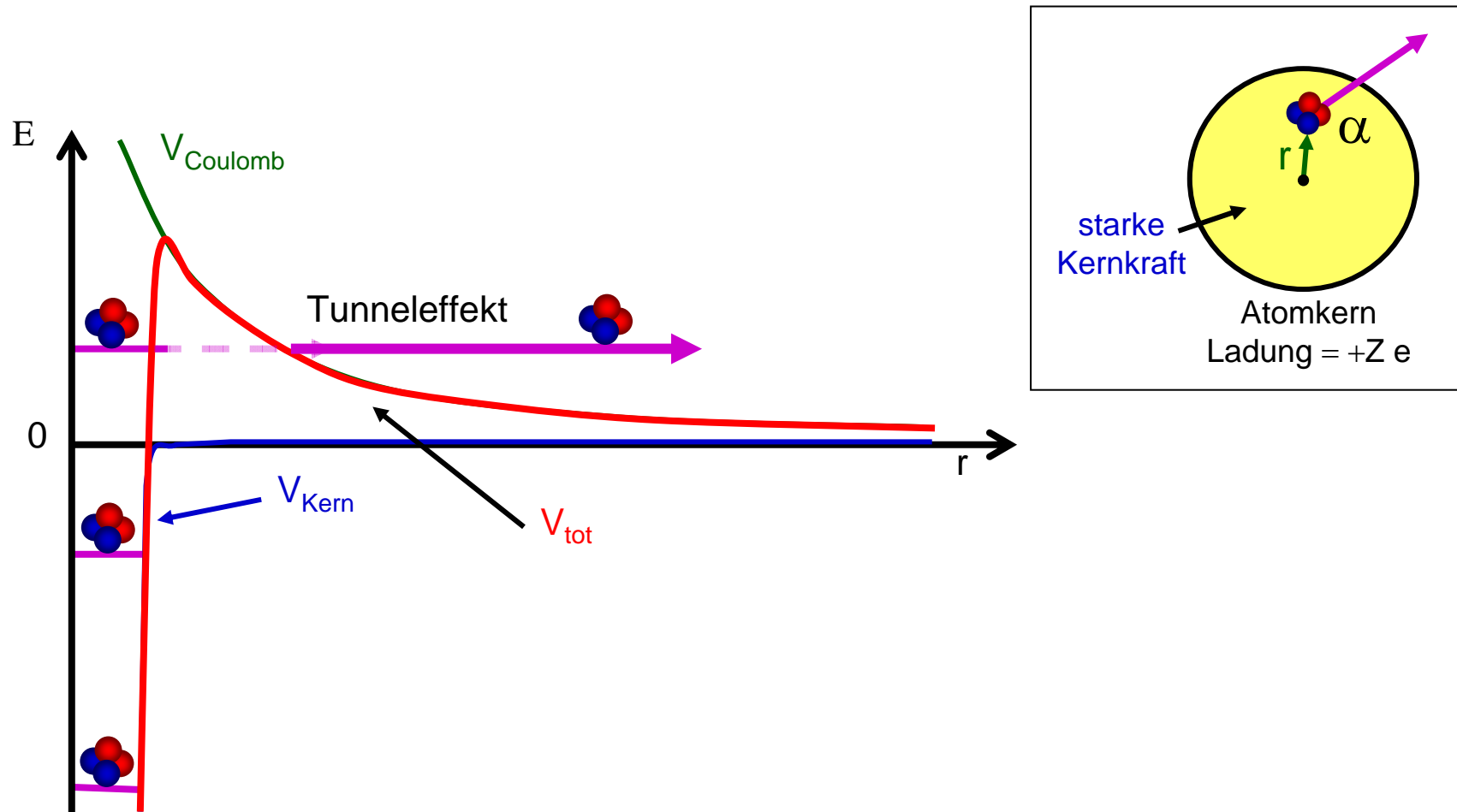
Im Gegensatz zum klassischen Fall ist  $T \neq 0$  auch wenn  $\epsilon < U_0$  !!

Das Teilchen kann durch die Barriere tunneln.  $\rightarrow$  Tunneleffekt



## 2.4.2. Der $\alpha$ -Zerfall

Beim  $\alpha$ -Zerfalls ergibt sich das Gesamtpotential aus der sehr kurzreichweitigen attraktiven Kernkraft und der repulsiven Coulombkraft zwischen den positiv geladenen  $\alpha$ -Teilchen, d.h He-Kernen (Rutherford 1908).



## 2.4.3. Das Tunnelmikroskop

Eine der wichtigsten direkten Anwendungen des Tunneleffektes ist das Tunnelmikroskop.

➔ Nobelpreis 1986

Prinzip:

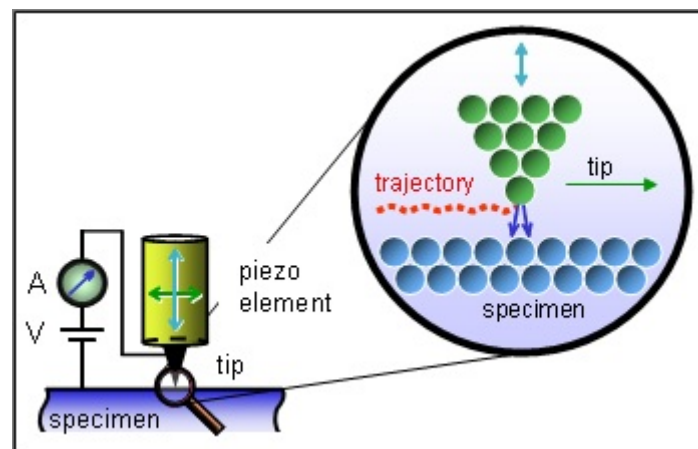
- 1) Elektronen tunneln durch Vakuum zwischen kleiner Spitze und leitender Fläche
- 2) Hohe Sensitivität des Tunnelstroms auf den Abstand
- 3) Bildgebung durch Abrasterung einer Probe



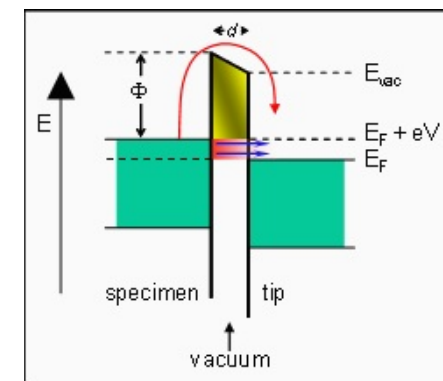
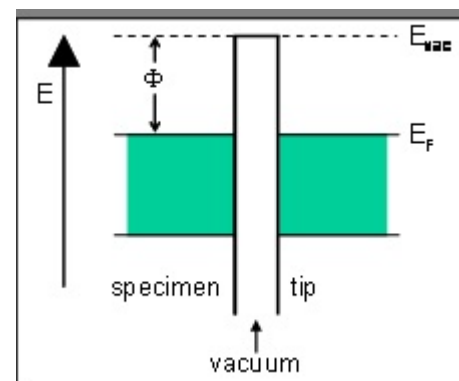
G. Binnig



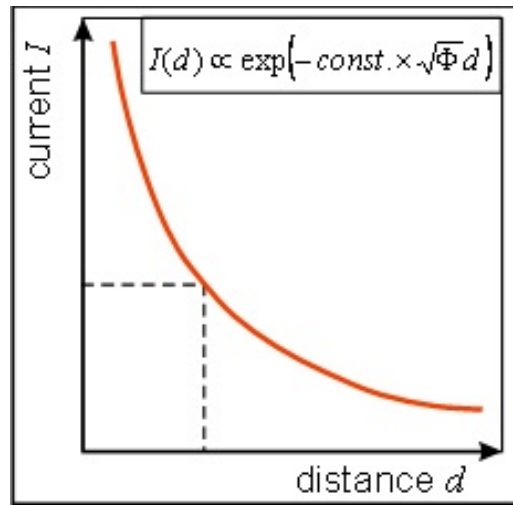
H. Rohrer



Prinzipieller Aufbau eines STM (scanning tunneling microscope) [Interf. Phys. Group, Leiden Univ.]



Energiebänder für Spitze und Probe ohne (links) und mit (rechts) angelegter Spannung [Interf. Phys. Group, Leiden Univ.]

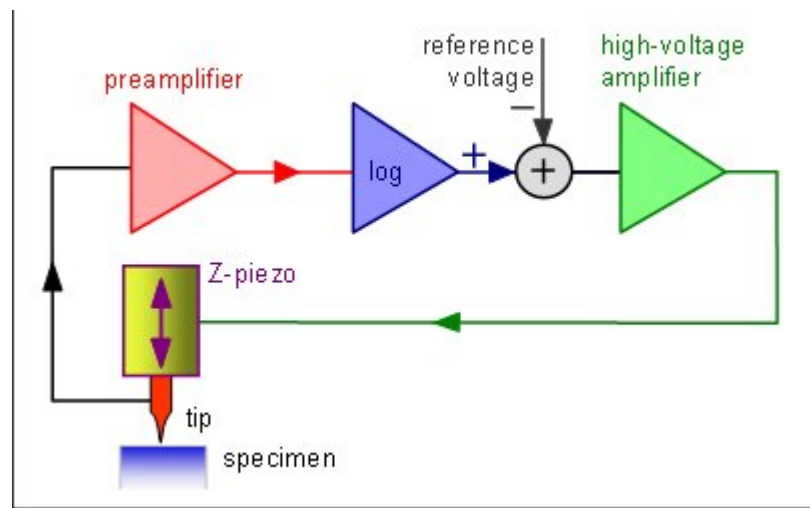


Der Tunnelstrom folgt der Abhängigkeit:

$$I_T(d) \propto eV \exp\left(-2\frac{\sqrt{2mV}}{\hbar}d\right)$$

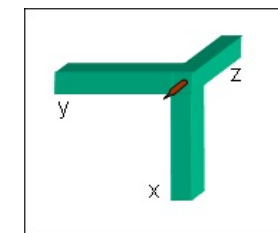
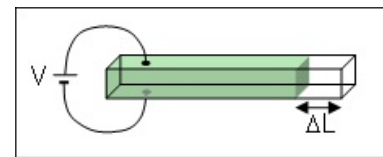
Bei einem typischen Wert von  $V=4eV$  folgt eine Erhöhung des Tunnelstroms um einen Faktor 1000 bei einer Abstandsänderung von nur 0.3 nm! Dies macht STM so empfindlich!

Strom-Abstands-Kennlinie



Feedback-Loop im STM

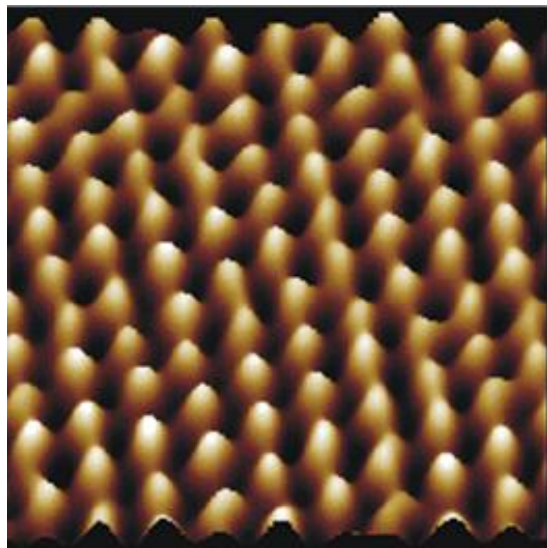
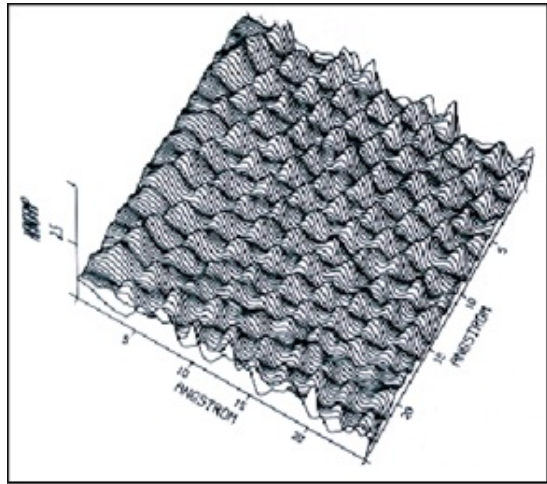
STM erfordert eine genaue Positionierung der STM-Spitze (Å-Präzision). Zu diesem Zweck werden piezoelektrische Elemente eingesetzt.



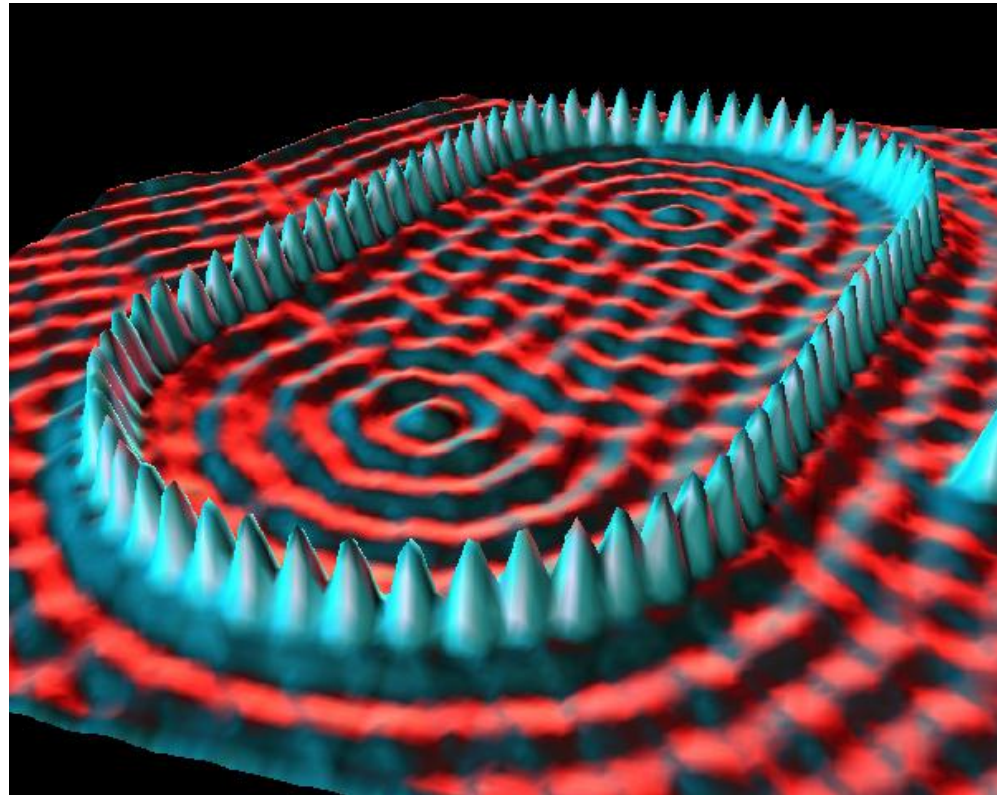
Piezoelektrika: Prinzip und 3D-Scanner

[alle Bilder: Interf. Phys. Group, Leiden Univ.]

Beispiel einiger STM Bilder:



Linescan und Bild von Graphit  
[Interf. Phys. Group, Leiden Univ.]



Atomic Corral [IBM Gallery]

## 2.5. Die Unschärferelation

### 2.5.1. Wahrscheinlichkeitsinterpretation der Wellenfunktion

Wie kann der Welle-Teilchen-Dualismus in der Quantenmechanik interpretiert werden?

$|\psi(r)|^2 d^3r$  gibt die Wahrscheinlichkeit an, ein Teilchen innerhalb  $d^3r$  zu finden.

$\psi(r)$  Wahrscheinlichkeitsamplitude

Kopenhagener Deutung von  $\psi$

Die Wahrscheinlichkeitsinterpretation erfordert:

$$\int |\psi(r)|^2 d^3r = 1$$

Normierung der Wellenfunktion

Man schreibt das Wellenpaket als:

$$\psi(r) = \int \phi(p) e^{i((pr - Et)/\hbar)} \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^{3/2}}$$

/  
Wahrscheinlichkeits-  
amplitude

\  
Wahrscheinlichkeits-  
verteilung f. Impuls

↑  
Normierung

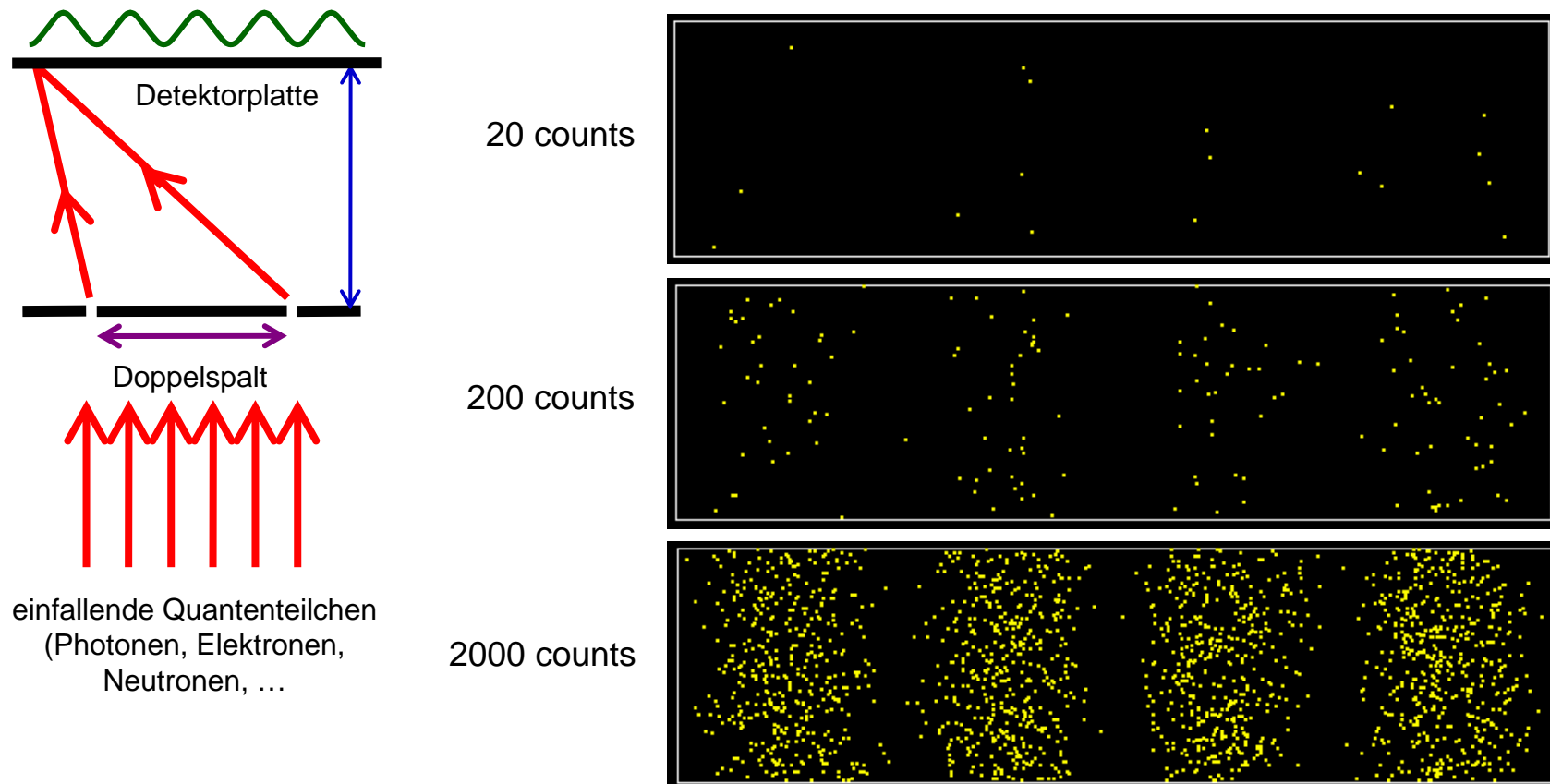


## Das Doppelspaltexperiment in der Quantenmechanik

Hinter einer beugenden Struktur (z.B. einem Doppelspalt) weist ein Teilchendetektor einzelne Punktereignisse nach.

Die gemessene Auftreffwahrscheinlichkeit an einem bestimmten Punkt ein Ereignis zu bekommen ist jedoch ein Interferenzmuster.

Dies Interferenzmuster baut sich auf, selbst wenn immer nur ein Teilchen die Apparatur durchläuft.



Eine Interferenzerscheinung klassischer Wellen erklärt man beim Doppelspalt durch zwei Anteile der Welle, die auf zwei verschiedenen Wegen zum Detektionspunkt laufen.

Dieses Konzept ist mit dem klassischen Teilchenbild unvereinbar (siehe Cartoon).



Wenn man eine Interferenzerscheinung beim Doppelspalt mit Quantenteilchen beobachtet, ist es prinzipiell nicht möglich zu sagen, welchen Weg die Teilchen genommen haben.

Beschafft man sich diese **Welcher-Weg-Information** (oder ist es prinzipiell möglich, diese zu bekommen), so wird keine Interferenz beobachtet.

Teilchen- und Welleneigenschaften sind **komplementär**.

## Zerfließen der Wellenpakete

Man schreibt das Wellenpaket als:

$$\psi(r) = \int \phi(p) e^{i((pr - Et)/\hbar)} \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^{3/2}}$$

↑ Wahrscheinlichkeitsamplitude      ↑ Wahrscheinlichkeitsverteilung f. Impuls      ↑ Normierung

$\psi(r)$  und  $\phi(p)$  sind Fouriertransformierte voneinander.

Mit den Wahrscheinlichkeitsverteilungen können Mittelwerte der Momente  $x^n$  und  $p_x^n$  berechnet werden (hier: Beispiel eindimensionaler Fall)

$$\langle x^n \rangle = \int \psi^*(x) x^n \psi(x) dx$$

$$\langle p_x^n \rangle = \int \psi^*(p_x) p_x^n \psi(p_x) dp_x$$

Beispielsweise ergibt sich für  $\langle x \rangle(t)$ :  $\langle x \rangle(t) = \langle x_0 \rangle + v_0 t$

↑ konstant bei freiem Teilchen

oder für die Varianz:

$$\begin{aligned}(\Delta x)^2 &= \langle x^2 \rangle(t) - (\langle x \rangle(t))^2 \\ &= (\Delta x)_0^2 + \kappa_1 t + (\Delta v)^2 t^2\end{aligned}$$

Konstante  $\geq 0$

konstant bei freiem Teilchen

Die obige Gleichung beschreibt das Zerfließen eines Wellenpaketes.

Zahlenbeispiel:

Elektron mit  $\Delta x_0 \approx 10^{-10} \text{ m}$   
 $\Delta x \approx 600 \text{ km}$  nach 1 Sekunde

Masse von  $1 \text{ g}$  und  $\Delta x_0 \approx 1 \text{ mm}$   
 $\Delta x = 2\Delta x_0$  nach  $10^{15}$  Jahren

Das Zerfließen ist für makroskopische Objekte vernachlässigbar.

## 2.5.2. Die Heisenbergsche Unschärferelation

Aus den Eigenschaften der Fouriertransformation folgt unmittelbar für die Varianz  $\Delta x$  und  $\Delta p_x$ :

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar/2$$

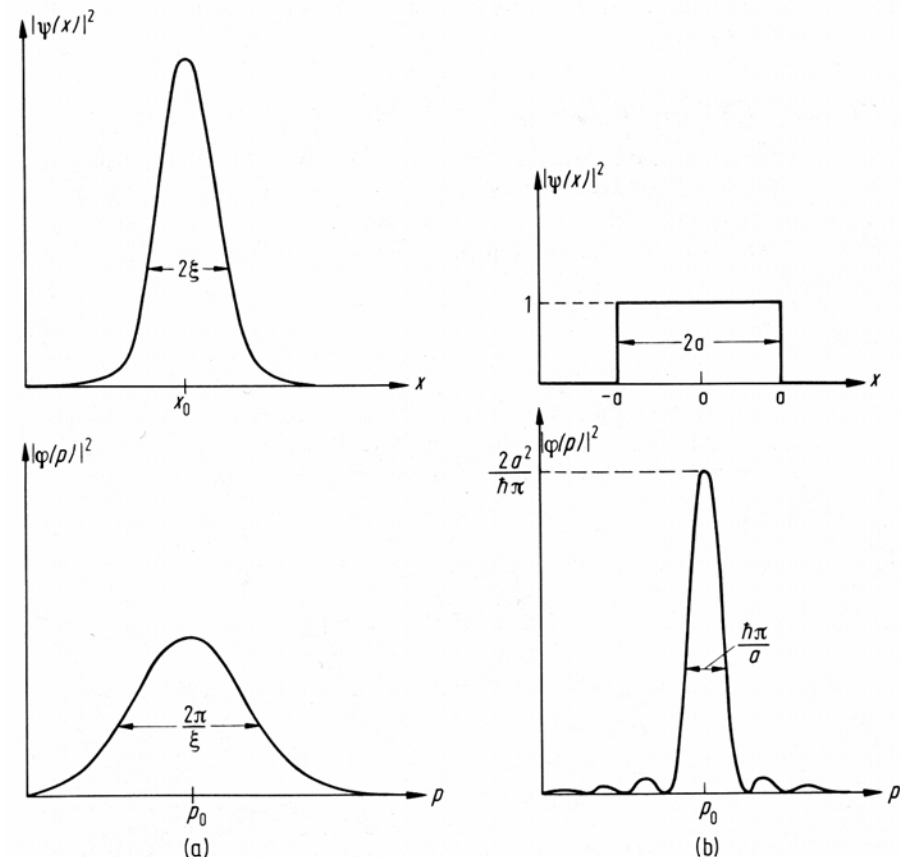
$$\Delta y \Delta p_y \geq \hbar/2$$

$$\Delta z \Delta p_z \geq \hbar/2$$

Heisenbergsche  
Unschärferelation

Das Gleichheitszeichen gilt für  
Gaußsche Wellenpakete!

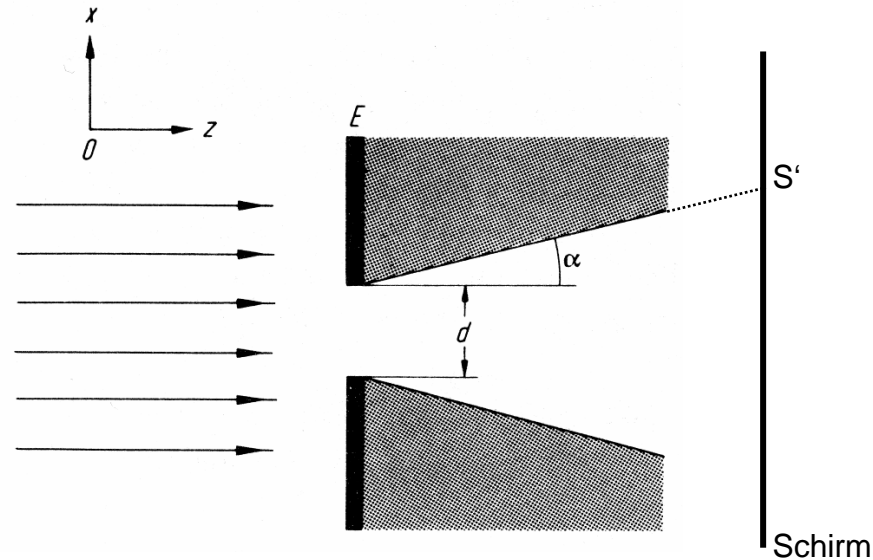
Einem Teilchen können nicht  
gleichzeitig ein genau definierter Ort  
und ein genau definierter Impuls  
zugewiesen werden!



Breite eines Wellenpaketes im  $x$ - und  $p$ -Raum für  
Gaußsches Paket (links) und Rechteckpaket (rechts)

## 2.5.3. Unschärferelation und Messung

### Ortsmessung mit einer Blende:



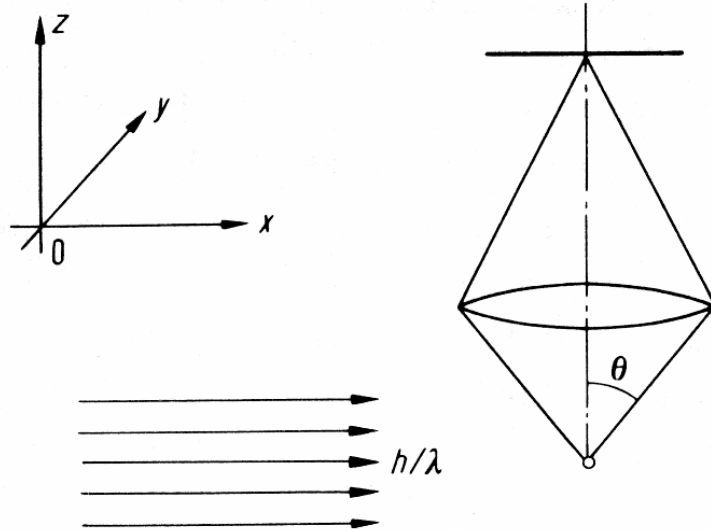
Zuordnung einer de Broglie Wellenlänge:  $\lambda = h/p$

Beugungserscheinung:  $\sin \alpha = \lambda/d = \frac{h}{p\Delta x}$

$$\Delta p_x \Delta x \approx p \sin \alpha \Delta x = h$$

Bemerkung: Man kann natürlich den Auftreffpunkt  $S'$  und auch  $p$  (über den Impulsübertrag auf den Schirm) messen, nicht aber  $S'$  und  $p$  beliebig genau voraussagen, bevor das Teilchen aufgetroffen ist.

## Ortsmessung mit einem Mikroskop:



Impulsübertrag in x-Richtung nach der Streuung von einem Photon:

$$\Delta p_x \approx (h/\lambda) \sin \theta$$

Ortsauflösung nach Rayleigh:

$$\Delta x \approx \frac{\lambda}{\sin \theta}$$

somit  $\Delta x \Delta p_x = h$

d.h. nach der Detektion des Photons hat das Teilchen eine Orts/Impulsunschärfe, die der Heisenbergschen Unschärferelation genügt!

Ähnliche Überlegungen gelten für alle anderen experimentellen Konfigurationen.

## 2.5.4. Messprozess und Komplementarität

Wellenfunktion vor  
der Messung

$$\psi_0(r, t)$$

Messung  
(z.B. von  $r$ )



Wellenfunktion nach  
der Messung

$$\tilde{\psi}(r = r_0, t)$$

Unmittelbar nach der Messung ist  $r$  genau bekannt, aber i.A. ist dann auch  $\tilde{\psi} \neq \psi_0$   
Die Messung der zu  $r$  komplementären Variablen  $p$  verändert  $r$  zwangsläufig.

„Ergebnisse von Beobachtungen, die unter verschiedenen experimentellen Bedingungen gemacht werden, können nicht notwendig in einem einheitlichen Bild zusammengefasst werden.“

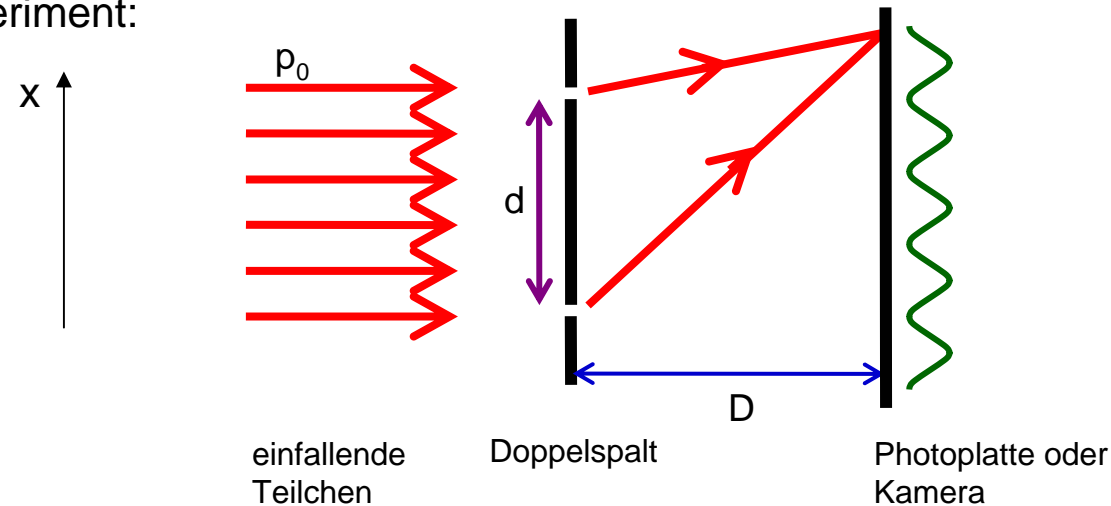
Fragestellung:

- Was bedeutet die Wellenfunktion  $\psi(r, t)$  wirklich?
- Ist die Beschreibung der Naturvorgänge durch die Quantentheorie vollständig?
- Lassen sich die statistischen Aussagen der Quantentheorie durch verborgene Parameter erklären?



## 2.5.5. Welle-Teilchen-Dualismus im Licht der Komplementarität

Das Doppelspaltexperiment:



Welle- und Teilcheneigenschaft sind zwei komplementäre Aspekte, die bei unterschiedlichen Versuchsanordnungen zu Tage treten.

Impulsübertrag auf den Spalt:  $\Delta p_x \approx p_0 \frac{d}{D} = \frac{h}{\lambda} \frac{d}{D}$

Damit noch Interferenzstreifen sichtbar sind muss gelten:  $\Delta x < \lambda \frac{D}{d}$

→  $\Delta x \Delta p_x < h$  nicht möglich!

Welcher-Weg-Information zerstört die Interferenz!