III. Gekoppelte Schwingungen und Wellen

1. Komplexe Schwingungen

1.1. Review: harmonischer Oszillator

$$\boxed{F = -\kappa \cdot x \cdot \hat{x}}$$

Hooksches Gesetz

$$\boxed{V = \frac{1}{2}\kappa x^2}$$

Harmonisches Potential

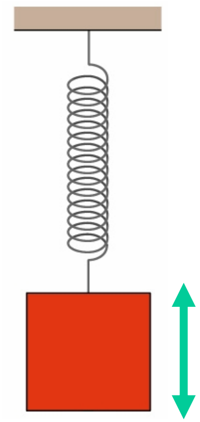
$$\boxed{x(t) \quad = \quad A \cdot \cos(\omega_0 t) + B \cdot \sin(\omega_0 t)}$$

allgemeine Lösung

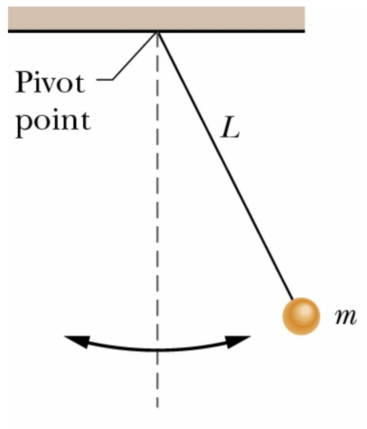
Federpendel

Feder mit
Federkonstante κ

Masse m

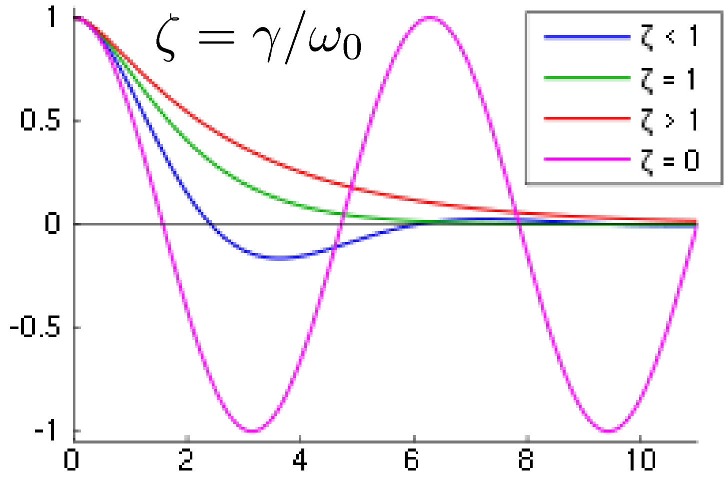


Fadenpendel



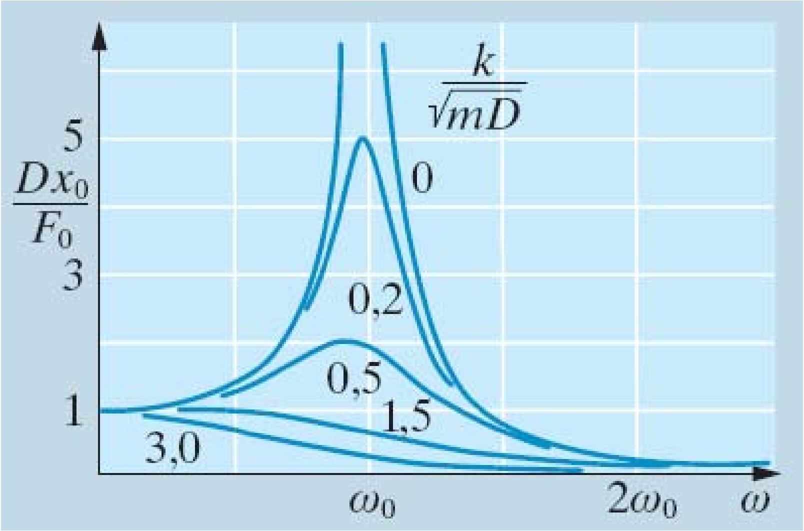
$$\ddot{x} + 2\gamma \cdot \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Gedämpfter harmonischer
Oszillator



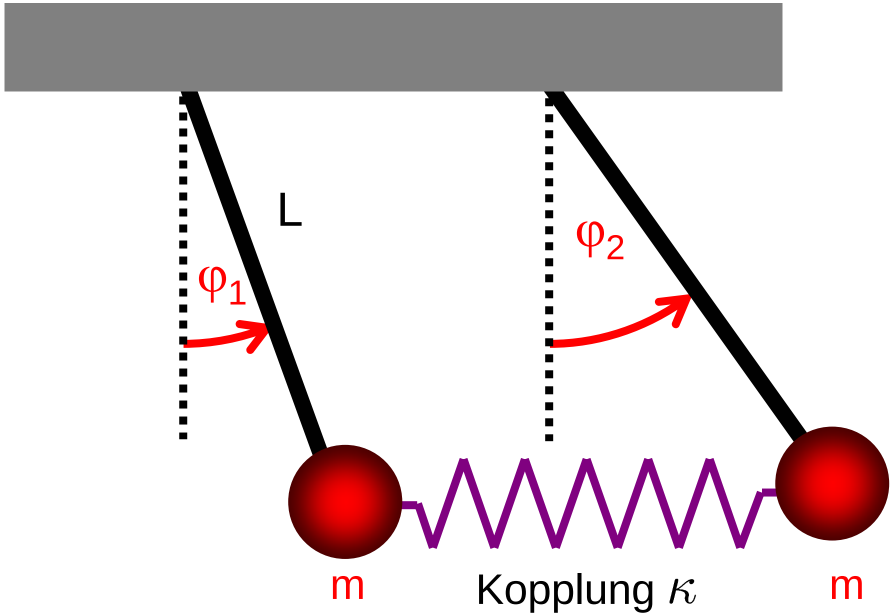
$$\ddot{x} + 2\gamma \cdot \dot{x} + \omega_0^2 x = A_0 \cdot \cos \omega t$$

periodisch getriebener
harmonischer Oszillator



1.2. Gekoppelte Schwingungen und Wellen

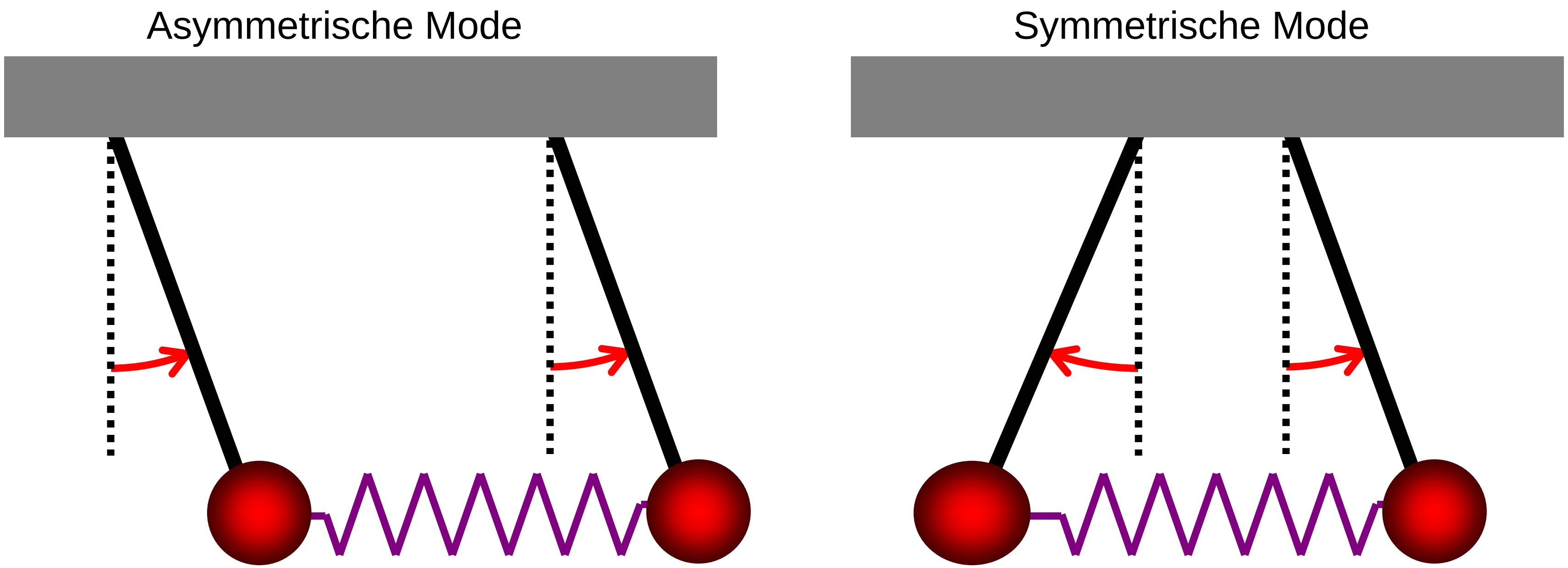
Einfachstes Beispiel: 2 gekoppelte harmonische Oszillatoren



Die Schwingungsanregung wird über die Kopplung zwischen beiden Oszillatoren (Pendeln) periodisch ausgetauscht.

Die Geschwindigkeit der Übertragung von einem Pendel auf das andere ist der Kopplungstärke κ proportional.

Es existieren zwei Normalmoden:



Die Normalmoden sind stationär.

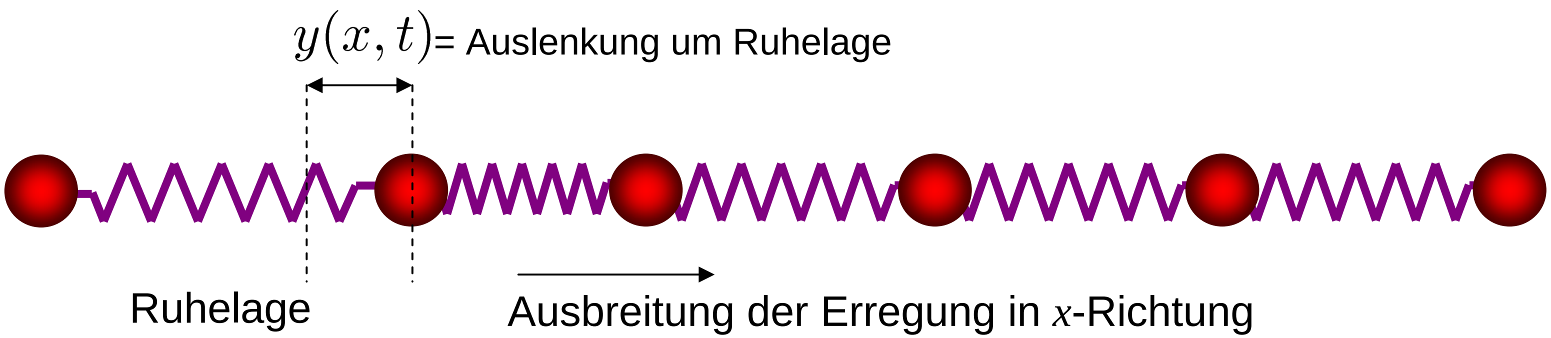
Sie unterscheiden sich in der Schwingungsfrequenz um die Kopplungsstärke κ .

2. Wellenausbreitung und Wellenüberlagerung

2.1. Gekoppelte Schwingungen, Wellen, Wellengleichung

Eine Welle ist ein Vorgang, bei dem Schwingungen von einem schwingfähigen System an einem Punkt x über Kopplung an benachbarte Schwinger an einen Ort x' übertragen werden:

Eine Verallgemeinerung der zwei gekoppelten Schwinger ist eine schwingende Kette.



Die Erregung breitet sich mit einer charakteristischen Geschwindigkeit v aus

Beim Übergang zum Kontinuum kann man für eine Auslenkung $y(x,t)$ schreiben:

$$y(x,t) = A \cdot \sin(k_x \cdot x - \omega t)$$

In drei Dimensionen gilt allgemeiner:

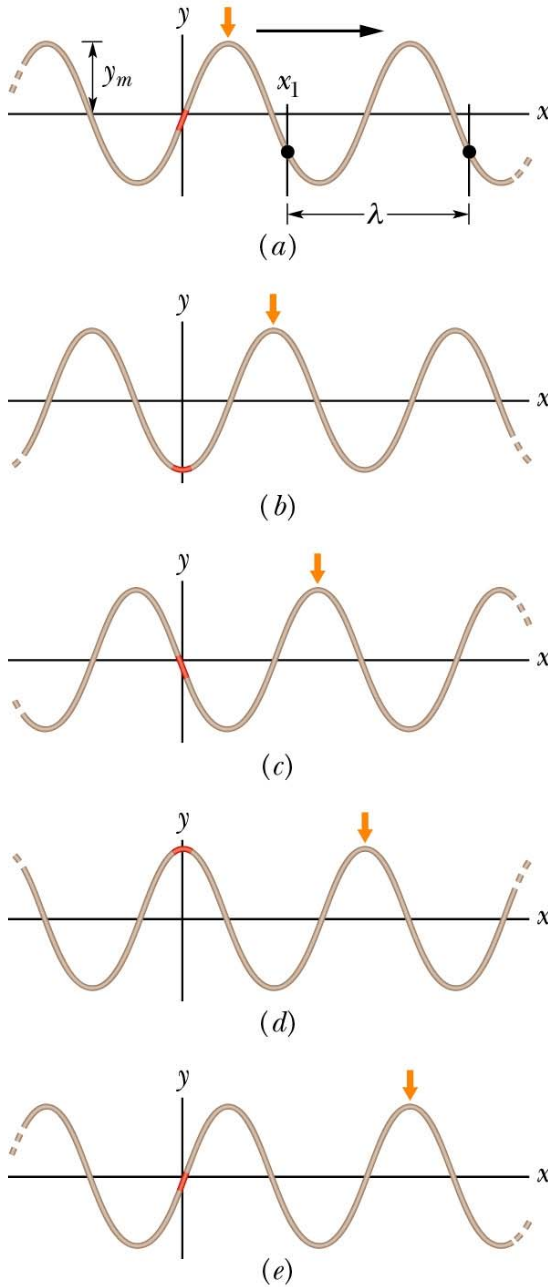
$$y(\vec{r},t) = A \cdot \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$$

$$\begin{aligned} A &= \text{Amplitude} \\ \vec{k} &= \text{Wellenvektor} \\ \omega &= \text{Frequenz} \end{aligned}$$

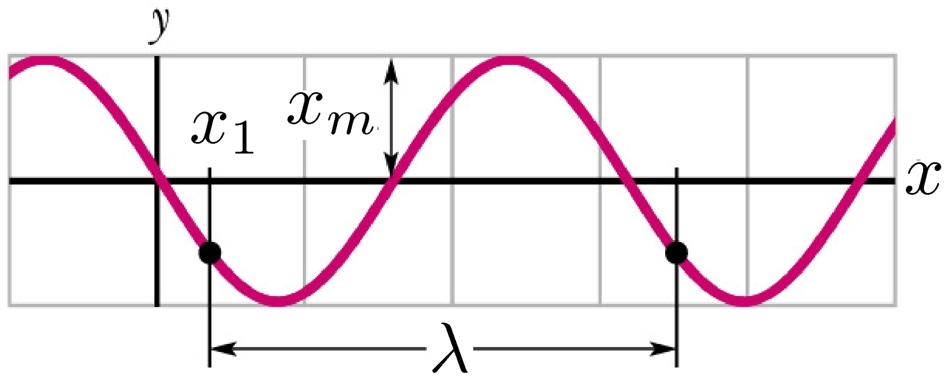
• fester Ort: $y(t) = A \cdot \sin(\varphi_0 - \omega t)$

• feste Zeit: $y(x) = A \cdot \sin(k \cdot x - \varphi_0')$

Das rechte Bild zeigt Momentaufnahmen einer sich nach rechts bewegenden Welle. [Halliday]



Innerhalb einer <u>Wellenlänge</u> λ gilt:

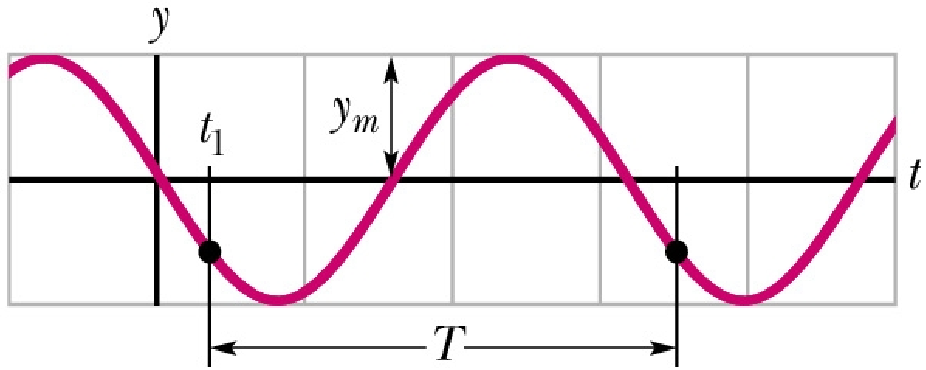


$$y(x,t) = y(x+\lambda,t) \;\Rightarrow\; \sin(|k|\cdot x) = \sin(|k|\cdot(x+\lambda)) \text{ für alle } t$$

Somit:

$$\boxed{|k|\cdot\lambda = 2\pi \qquad \textbf{Def.:}\ |k| = \text{Wellenzahl} \qquad [|k|] = \frac{1}{\mathrm{m}}}$$

Ähnlich gilt nach einer <u>Schwingungsdauer</u> T: $\quad y(x,t) = y(x,t+T)$ für alle x



Nach einer Schwingungsdauer T ist die Welle somit um λ vorangeschritten.

$$\boxed{v_p = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot \nu = \frac{\omega}{k}}$$

heißt Phasengeschwindigkeit.

Dispersionsrelation: Zusammenhang zwischen v_p und λ bzw. ω

An zwei verschiedenen Punkten x_0 und $x_0 + \Delta x$ schwingen die Oszillatoren um

$\Delta t = \dfrac{\Delta x}{v_p}$ zeitlich verzögert, denn

$$\sin(k(x_0 + \Delta x) - \omega t) = \sin(k \cdot x_0 - \omega t + k \cdot \Delta x) = \sin(k \cdot x_0 - \omega t + \omega \cdot \frac{\Delta x}{v_p})$$

Die Phasengeschwindigkeit gibt an, mit welcher Geschwindigkeit sich die Auslenkung scheinbar ausbreitet. Tatsächlich gibt sie aber nur die relative Phasenlage der Auslenkung an zwei Punkten x_0 und $x_0 + \Delta x$ an.
Insbesondere kann die Phasengeschwindigkeit in einem Medium größer als die Vakuumlichtgeschwindigkeit sein!

Die allgemeine Funktion für eine Welle lautet:

$$\boxed{f(\vec{r},t) = f(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) = f(u)}$$

Da $\dfrac{\partial f}{\partial t} = f' \cdot \omega \quad \text{und} \quad \nabla f = f' \cdot \vec{k}$ folgt:

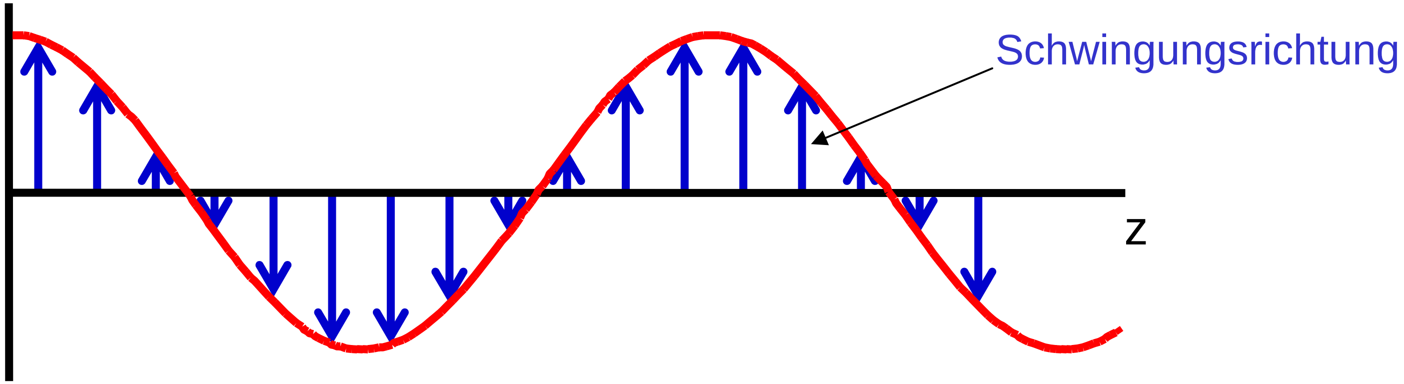
$$\boxed{\nabla^2 f - \frac{|\vec{k}|^2}{\omega^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla^2 f - \frac{1}{v_p^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0}$$

Wellengleichung

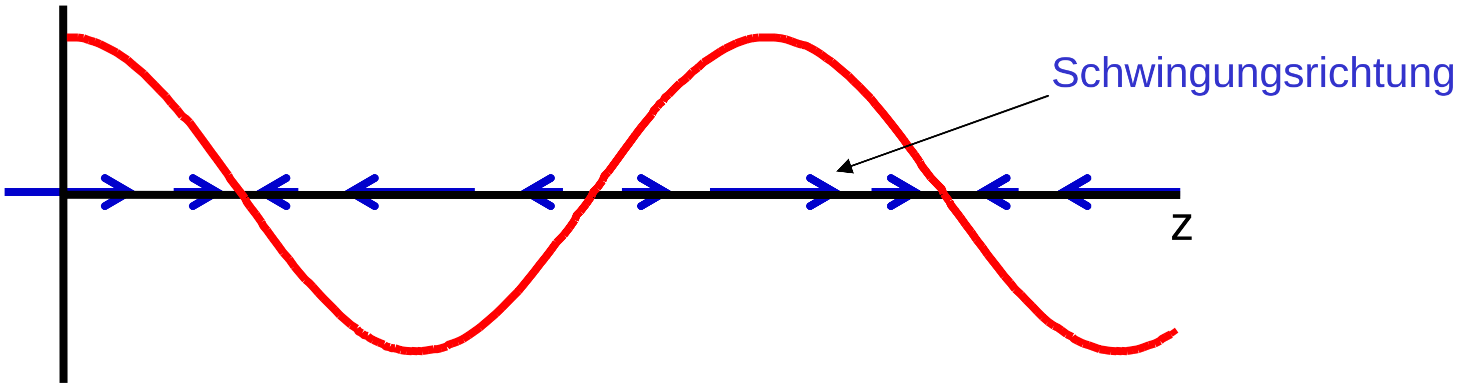
2.2. Wellentypen

Es existieren zwei Wellentypen:

Transversalwelle



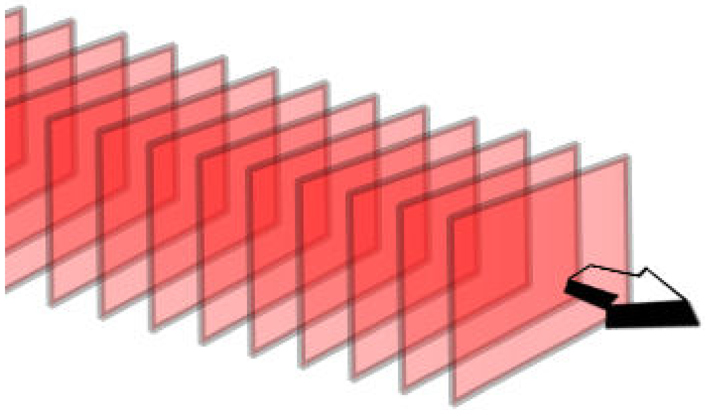
Longitudinalwelle



$\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t=\varphi$ heißt die <u>Phase</u> der Welle

Punkte mit $\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t=\mathrm{const.}$ heißen Phasenflächen

<u>Beispiel: Ebene Welle</u>

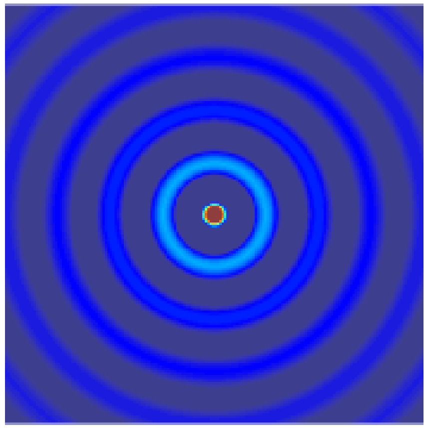


$$\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t=k_x\cdot x-\omega t=\mathrm{const.}$$

Die Phasenflächen sind Ebenen.

$$\boxed{u(x,t)=A\cdot\sin(k\cdot x-\omega t)} \qquad v=\frac{\omega}{k_x}$$

<u>Beispiel: Kugelwellen</u>



$$\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t=|\vec{k}|\cdot|\vec{r}|-\omega t=\mathrm{const.}$$

Die Phasenflächen sind Kugelschalen.

$$\boxed{u(r,t)=\frac{1}{r}\cdot\cos(k\cdot r-\omega t)}$$

Transversale Wellen können verschiedene Schwingungsrichtungen oder Polarisationen aufweisen:

$$\vec{u}(x,t) = \hat{\epsilon} \cdot A \cdot \sin(k \cdot x - \omega t)$$

$$\hat{\epsilon} \;=\; \text{Polarisationsvektor} \quad |\hat{\epsilon}| = 1$$

Allgemein kann jede transversale Schwingung als eine Überlagerung aus einer Schwingung in x- und in y-Richtung dargestellt werden:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \hat{x} A \sin(kx - \omega t) + \hat{y} B \sin(kx - \omega t + \varphi) \\ &= (\hat{x} A + \hat{y} B \cos\varphi) \cdot \sin(kx - \omega t) + \hat{y} B \sin\varphi \cdot \cos(kx - \omega t) \end{aligned}$$

Im allgemeinen Fall heisst das Licht elliptisch polarisiert.

Es gibt verschiedene Spezialfälle:

Lineare Polarisation

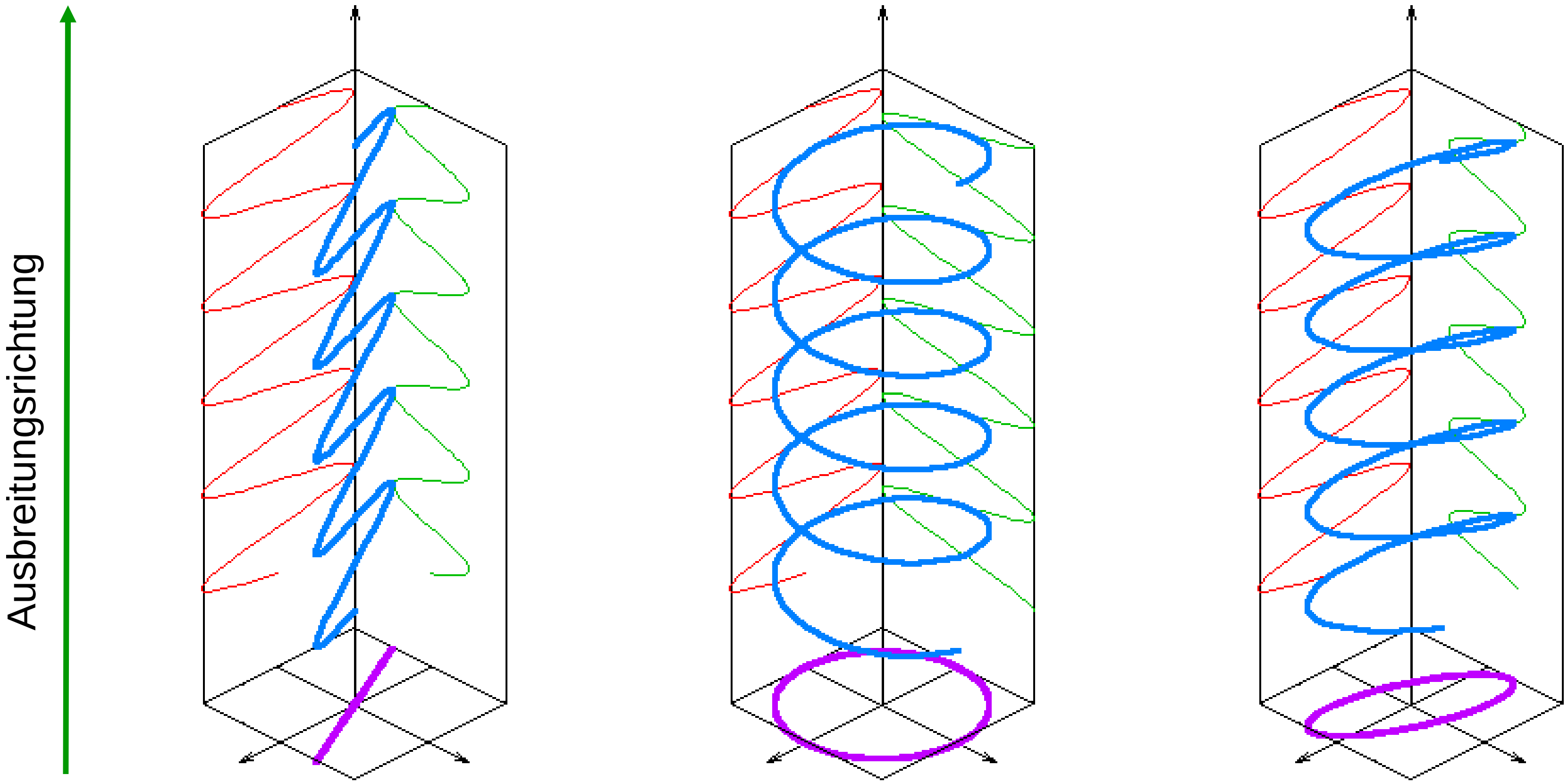
$$\varphi = 0$$

$$u(x,t) = (\hat{x} A + \hat{y} B) \cdot \sin(kx - \omega t)$$

Zirkulare Polarisation

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \text{ und } A = B:$$

$$u(x,t) = A \cdot [\hat{x}\sin(kx - \omega t) + \hat{y}\cos(kx - \omega t)]$$



Darstellung von linear (links), zirkular (mitte) und elliptisch (rechts) polarisiertem Licht.
[Wikipedia]

2.3. Interferenz und Beugung von Wellen

Wie bei Schwingungen:

$f(r,t)$ löst Wellengleichung und

$g(r,t)$ löst Wellengleichung

$\Rightarrow$ $a\,f(r,t) + b\,g(r,t)$ lösen Wellengleichung (mit beliebigen Koeffizienten a und b)

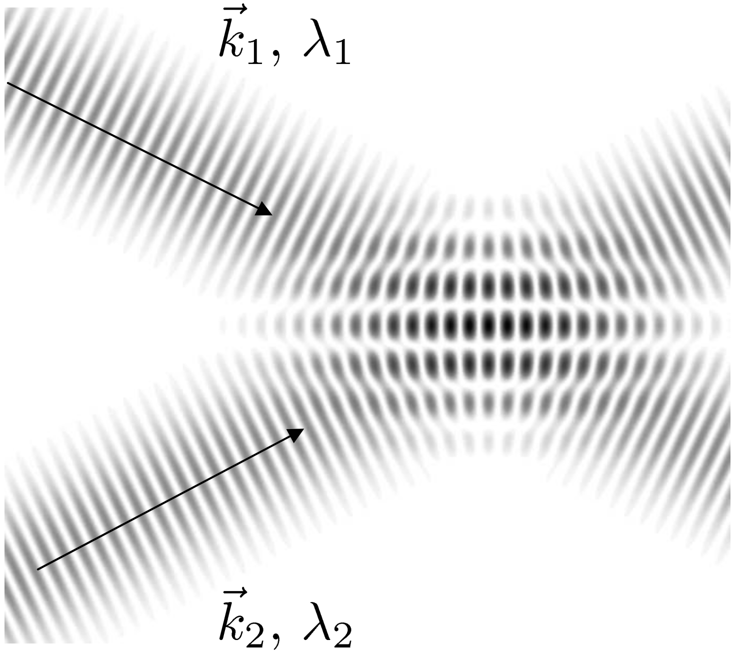
➡ <u>Überlagerung</u> oder <u>Superposition</u> von Wellen

Überlagerung weniger Wellen $\longrightarrow$ Interferenz

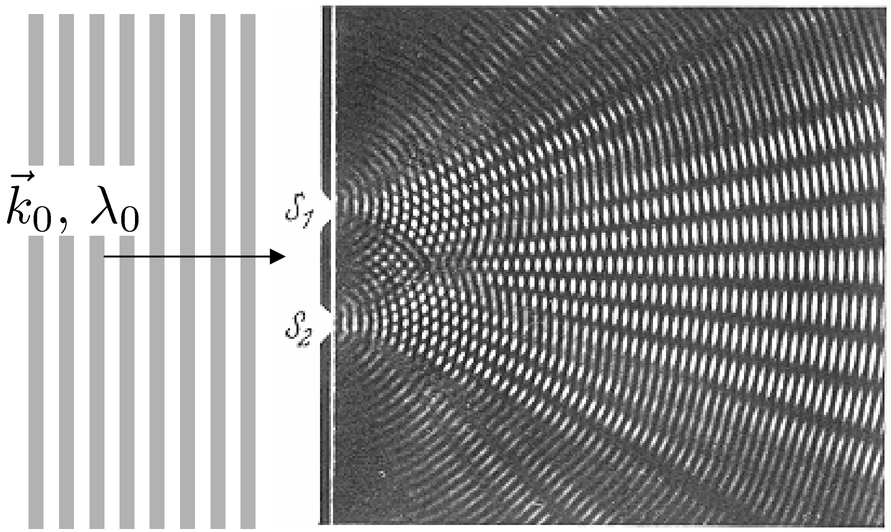
Überlagerung vieler Wellen $\longrightarrow$ Beugung

Ein **Interferenz-** oder **Beugungsmuster** entsteht bei der phasengerechten (kohärenten) Überlagerung mehrerer Teilwellen.

Beispiel von Interferenzanordungen:



Interferenz zweier sich kreuzender ebener Wellen



Interferenz am **Doppelspalt**

Beispiel 1: Überlagerung zweier ebener Wellen in einer Dimension

a) gleiche Ausbreitungsrichtung

$$
\begin{aligned}
y_1 &= A \cdot \cos(\omega t - kz) \\
y_2 &= A \cdot \cos(\omega t - kz + \varphi)
\end{aligned}
$$

$$y_1 + y_2 = 2A \cdot \cos\frac{\varphi}{2} \cdot \cos\left[\omega t - kz + \frac{\varphi}{2}\right]$$

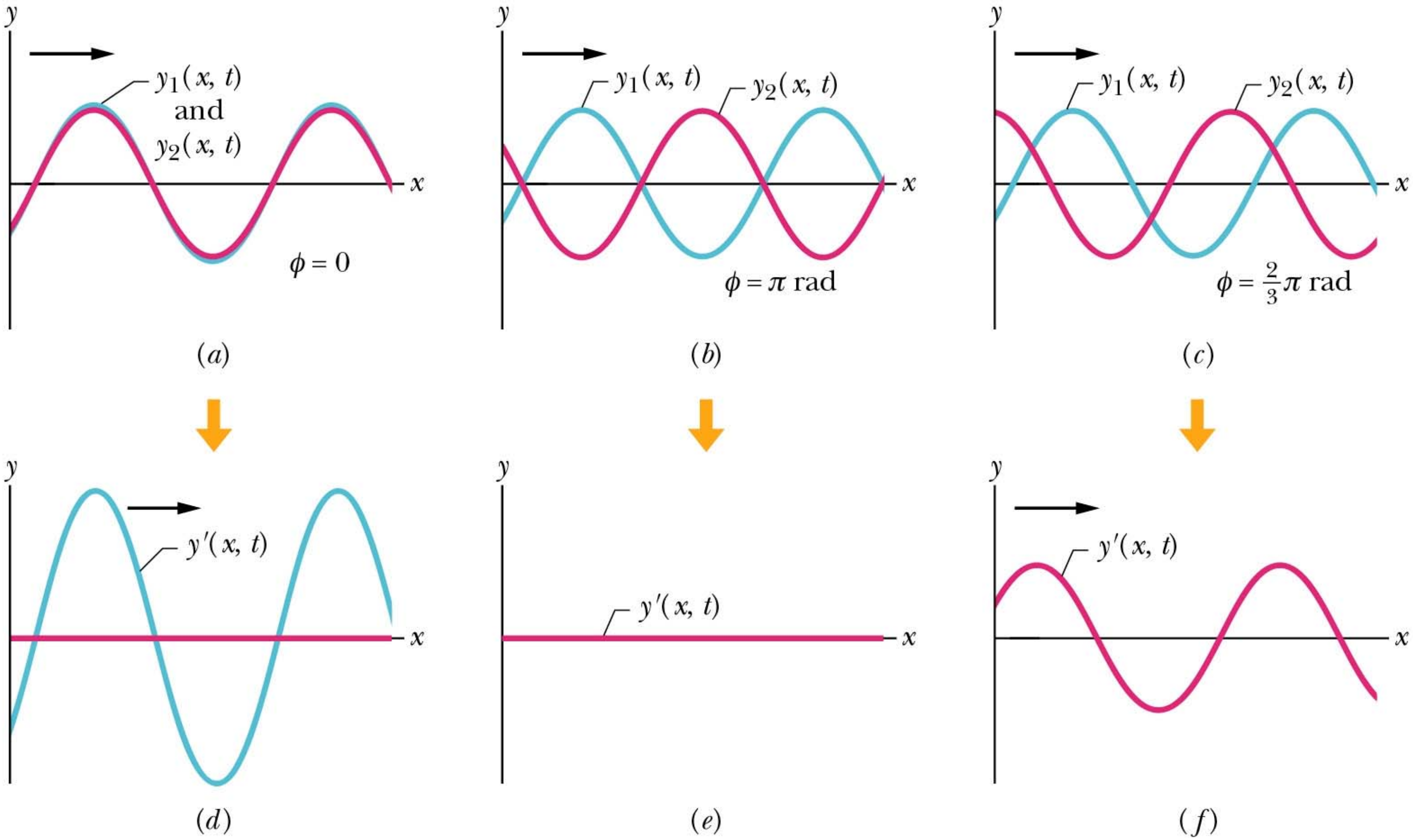
Konstruktive Interferenz

$\varphi = 0$ oder $\varphi = n \cdot 2\pi$ n ganze Zahl

Destruktive Interferenz

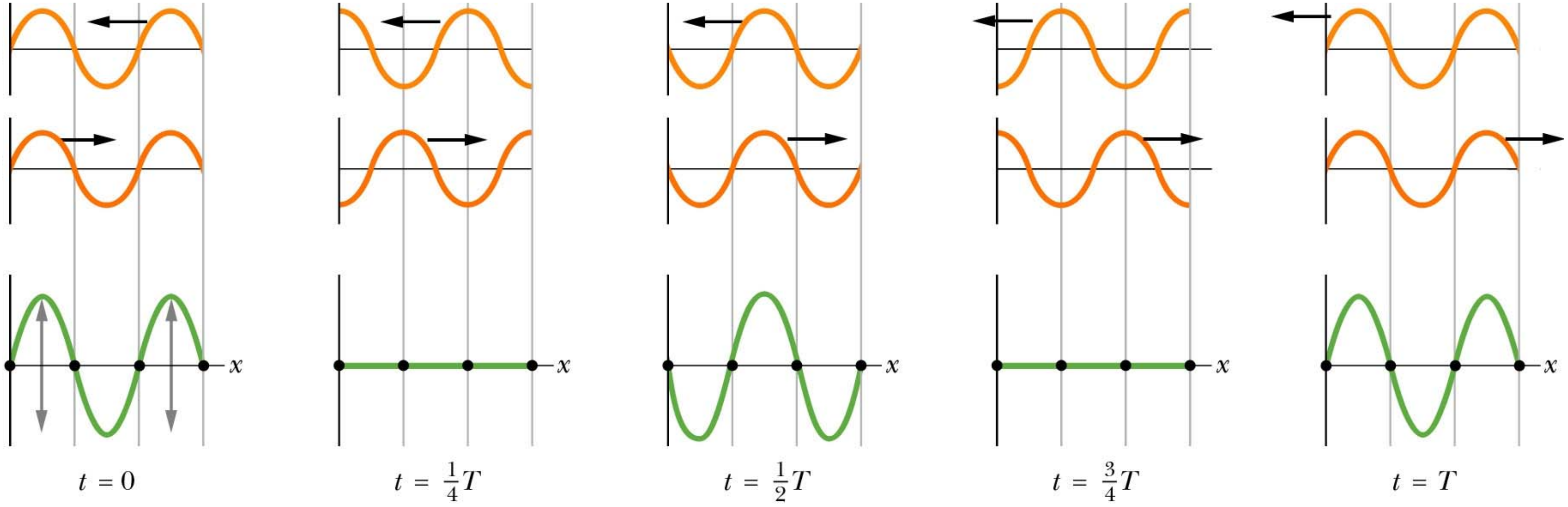
$\varphi = \pi$ oder $\varphi = (2n+1) \cdot 2\pi$ n ganze Zahl

Konstruktive und destruktive Interferenz



[Halliday]

b) entgegengesetzte Ausbreitungsrichtung

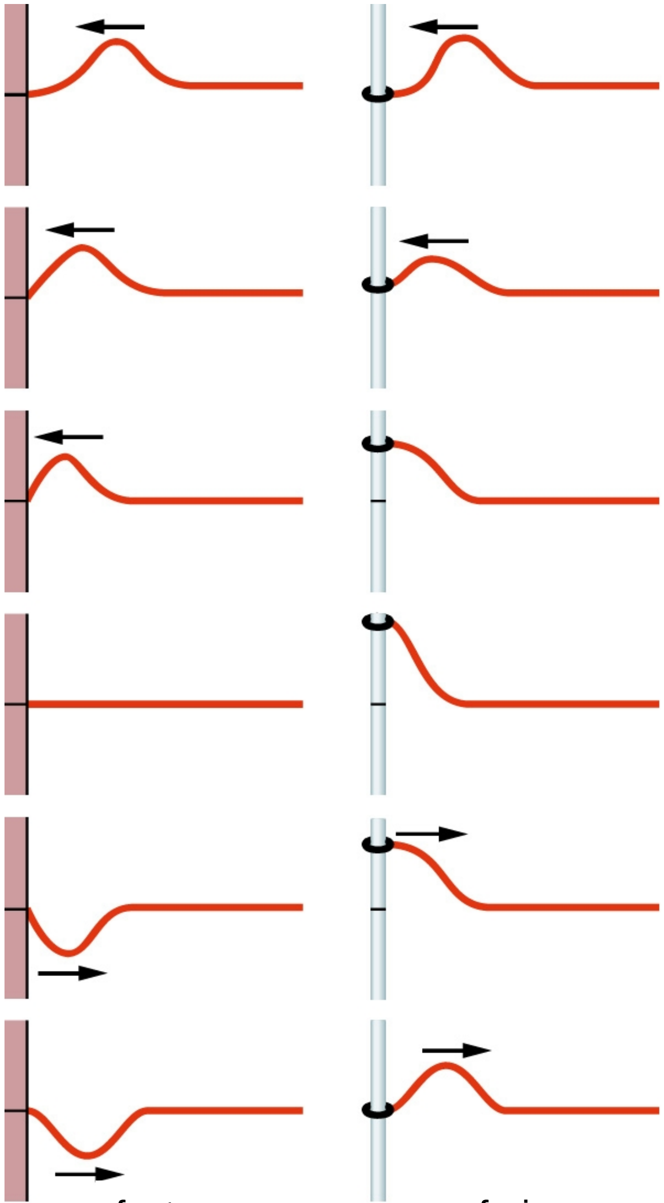


[Halliday]

Es entsteht eine Schwingung, die periodisch vom Ort abhängt, d.h. keine Wellenausbreitung.

Stehende Welle

Beispiel: Reflexion einer Welle entlang eines Seiles



festes Ende

freies Ende

[Halliday]

Phasensprung bei der Reflexion am festen Ende:

$$\varphi = \pi$$

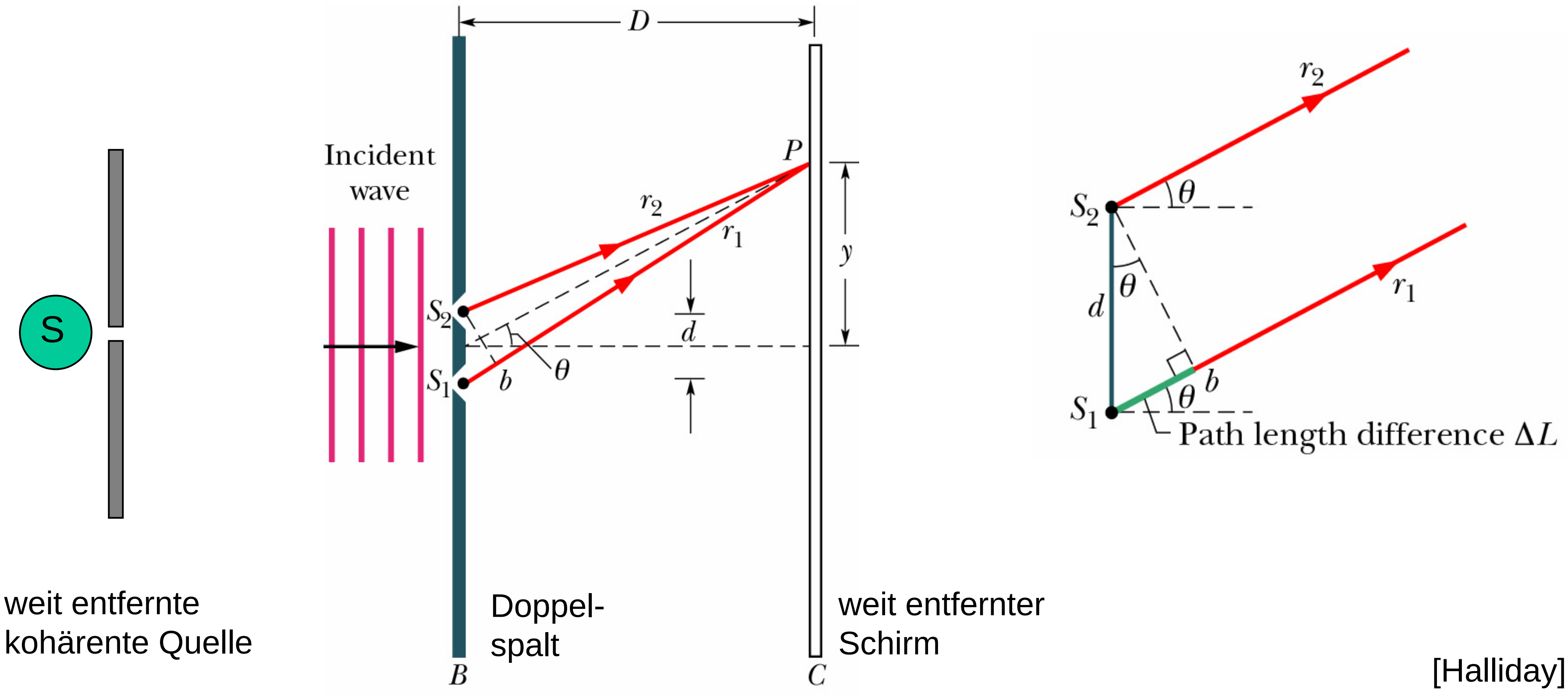
Phasensprung bei der Reflexion am freien Ende:

$$\varphi = 0$$

Der Youngsche Doppelspalt

Die von Young 1801 durchgeführten Experimente bewiesen den Wellencharakter von Licht.

Ein Doppelspalt erzeugt aus einer ebenen Welle zwei Kugelwellen.



[Halliday]

Der **Gangunterschied Δr** am Punkt P ist:

$$\Delta r = r_1 - r_2 = d \sin\theta$$

<u>weit entfernt</u> vom Spalt ist:

$$\sin\theta \approx y/D$$

Konstruktive Interferenz erhält man für einen Gangunterschied von

$$\Delta r = \underbrace{m}_{\text{ganze Zahl}}\underbrace{\lambda}_{\text{Wellenlänge}}$$

Somit:

$$\boxed{\sin\theta_m^c = m\lambda/d \qquad \text{Winkel zum } m\text{-ten Maximum am Schirm}}$$

Destruktive Interferenz erhält man für einen Gangunterschied von

$$\Delta r = (2m+1)\lambda/2$$

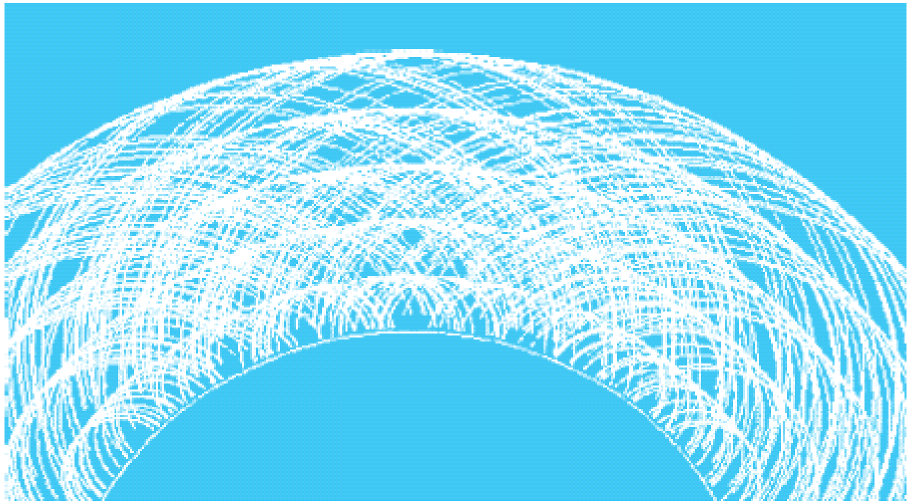
Somit:

$$\boxed{\sin\theta_m^d = (2m+1)\lambda/(2d) \qquad \text{Winkel zum } m\text{-ten Minimum am Schirm}}$$

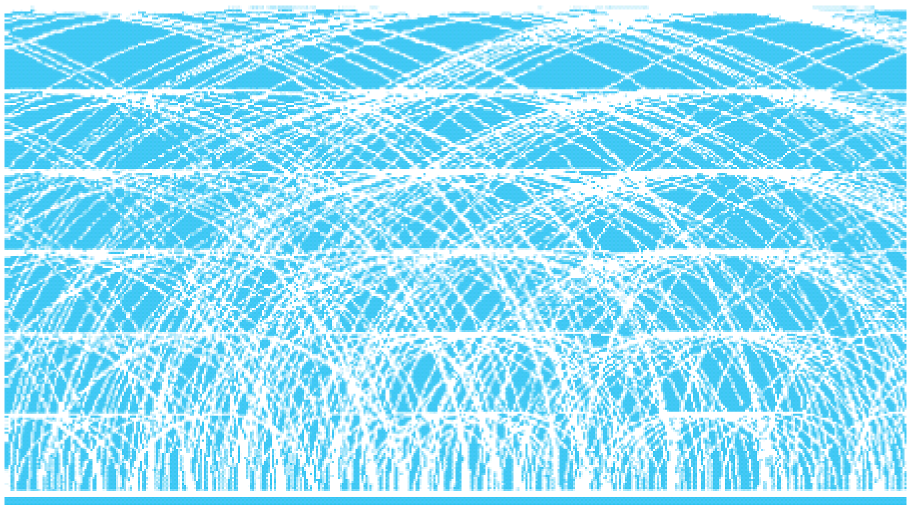
2.4. Wellenausbreitung

2.4.1. Huygenssches Prinzip:

Jeder Punkt der Wellenfront (Phasenfläche) ist wiederum Ausgangspunkt einer Elementarwelle (Kugelwelle):



Elementarwellen der Wellenfronten einer Kugelwelle addieren sich wiederum zu einer Kugelwelle.



Elementarwellen der Wellenfronten einer ebenen Welle addieren sich wiederum zu einer ebenen Welle.

[Gerthsen]

Beispiele:

1. Schallwellen in festen Körpern

$$\boxed{\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - \left(\frac{E}{\rho}\right) \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = 0}$$

$$\boxed{v_{\mathrm{ph}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}}$$

E = Elastizitätsmodul

2. Schallwellen in Gasen

$$\boxed{\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - \left(\frac{p}{\rho}\right) \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = 0}$$

$$\boxed{v_{\mathrm{p}} = \sqrt{\frac{p}{\rho}}}$$

p = Druck

Ist Wellenausbreitung nur in einem Medium möglich?

$\longrightarrow$ Äthertheorie für Licht.

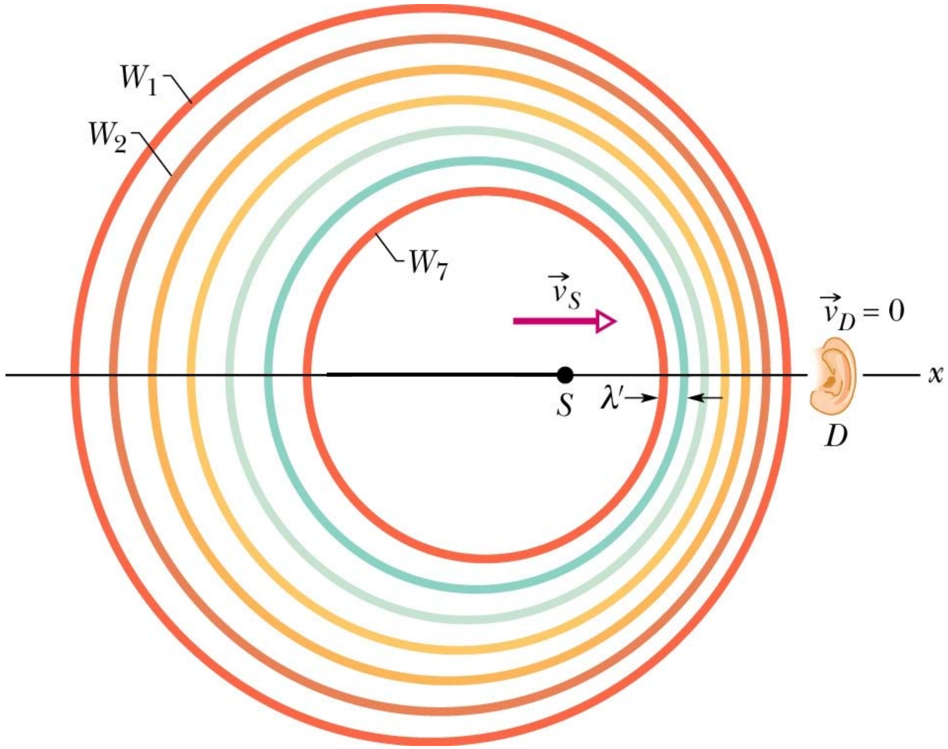
Solids	
Material	v (m/s)
Diamond	12000
Pyrex glass	5640
Iron	5130
Aluminum	5100
Brass	4700
Copper	3560
Gold	3240
Lucite	2680
Lead	1322

Gases	
Material	v (m/s)
Hydrogen (0°C)	1286
Helium (0°C)	972
Air (20°C)	343
Air (0°C)	331

2.4.2. Wellen bewegter Quellen / Dopplereffekt

Betrachtung der Wellenausbreitung bei bewegter Quelle oder bewegtem Beobachter

a) Bewegte Quelle



Flächen gleicher Phase sind bei $v_S = 0$ um λ_0 entfernt, aber bei $v_S \neq 0$ nur um

$$\lambda = \lambda_0 - v_S \cdot T$$

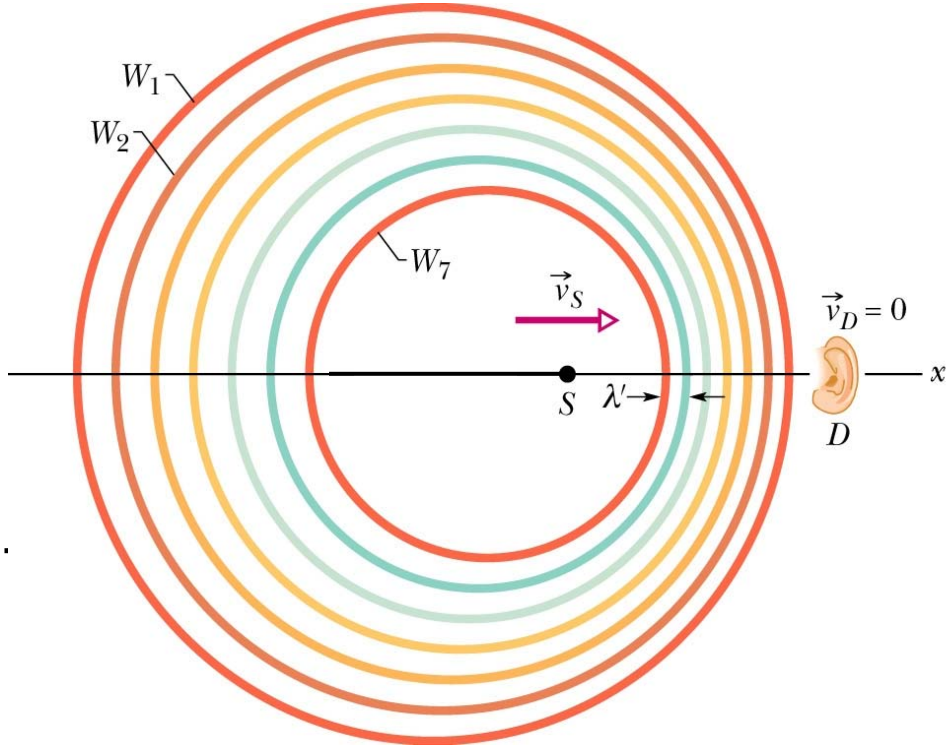
somit

$$\nu = \frac{v_{\mathrm{ph}}}{\lambda} = \frac{v_{\mathrm{ph}}}{T} \cdot \frac{1}{\frac{\lambda_0}{T} - v_S} = \nu_0 \frac{1}{1 - \frac{v_S}{v_{\mathrm{ph}}}}$$

ν ist größer für $v_S > 0$

ν ist kleiner für $v_S < 0$

b) Bewegter Beobachter



Ein ruhender Beobachter zählt während der Zeit $n \cdot T \rightarrow \; n\nu_0$ Schwingungen.

Der bewegte Beobachter überstreicht während $T \longrightarrow \dfrac{v_D \cdot T}{\lambda}$ zusätzliche Schwingungen.

$$\Rightarrow \; \nu = \nu_0 + \frac{v_D}{\lambda_0} = \nu_0 \left(1 + \frac{v_D}{v_{\mathrm{ph}}}\right)$$

Allgemein gilt: $\omega = \omega_0 \dfrac{\omega_0 - \vec{k} \cdot \vec{v}_D}{\omega_0 + \vec{k} \cdot \vec{v}_S}$ Asymmetrie $\Leftrightarrow$ Ausbreitung im Medium