

## 7. Reale Körper

### 7.1 Aggregatzustände

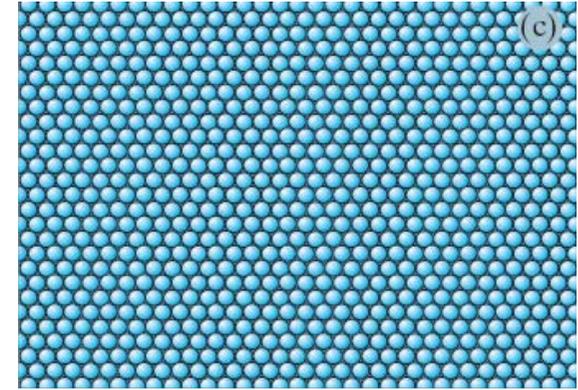
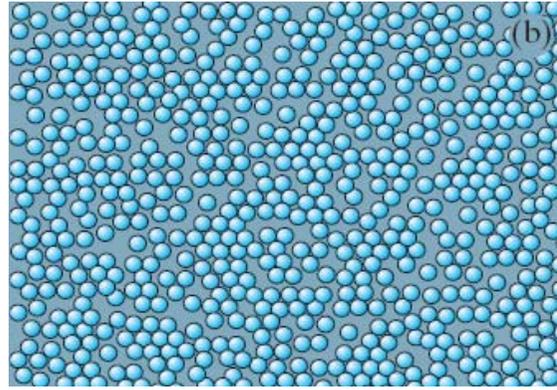
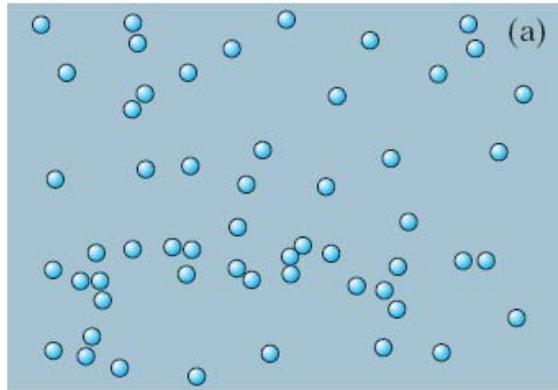
Ausgedehnte, makroskopische Körper können in verschiedenen Zuständen vorliegen.

Die Aggregatzustände sind Zustände verschiedener Ordnung von den Konstituenten (Atomen, Ionen, Molekülen) der Körper:

- a) fest: Jedes Atom nimmt einen festen Platz  $\vec{r}_i = n_{i1}\vec{a}_1 + n_{i2}\vec{a}_2 + n_{i3}\vec{a}_3$  ein.
- b) flüssig: Es besteht keine feste Anordnung der Atome mehr, wohl aber eine Korrelation
- c) gasförmig: Die Konstituenten sind frei beweglich.

Generell bezeichnet man Körper als homogen, wenn ihre makroskopischen Eigenschaften vom Ort unabhängig sind und als isotrop, wenn Richtungsabhängigkeit besteht.

Cartoon-Darstellung der Moleküle/Atome in:  
einem Gas (a), einer Flüssigkeit (b) und einem Festkörper (c)



[Gerthsen Physik]

Korrelationen zwischen den nächsten Nachbarn bleiben auch in einer Flüssigkeit noch erhalten!

Ein Beispiel makroskopischer Eigenschaften ist die Dichte.

**Def.:** Dichte = Masse / Volumen

$$\rho = \frac{m}{V} \quad [\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Stoff	Dichte in g/cm <sup>3</sup>
Eisen	7,68
Blei	11,34
Kupfer	8,96
Gold	19,30
Aluminium	2,70
Zinn	7,30
Silber	10,50
Messing	8,50
Holz	0,70
Steingut	2,40
Wasser	1,00
Alkohol (rein)	0,79
Öl	ca. 0,81
Benzin	ca. 0,70
Luft	0,0013
Helium	0,000179
Kohlenstoffdioxid	0,001977
Sauerstoff	0,001429
Wasserstoff	0,00009

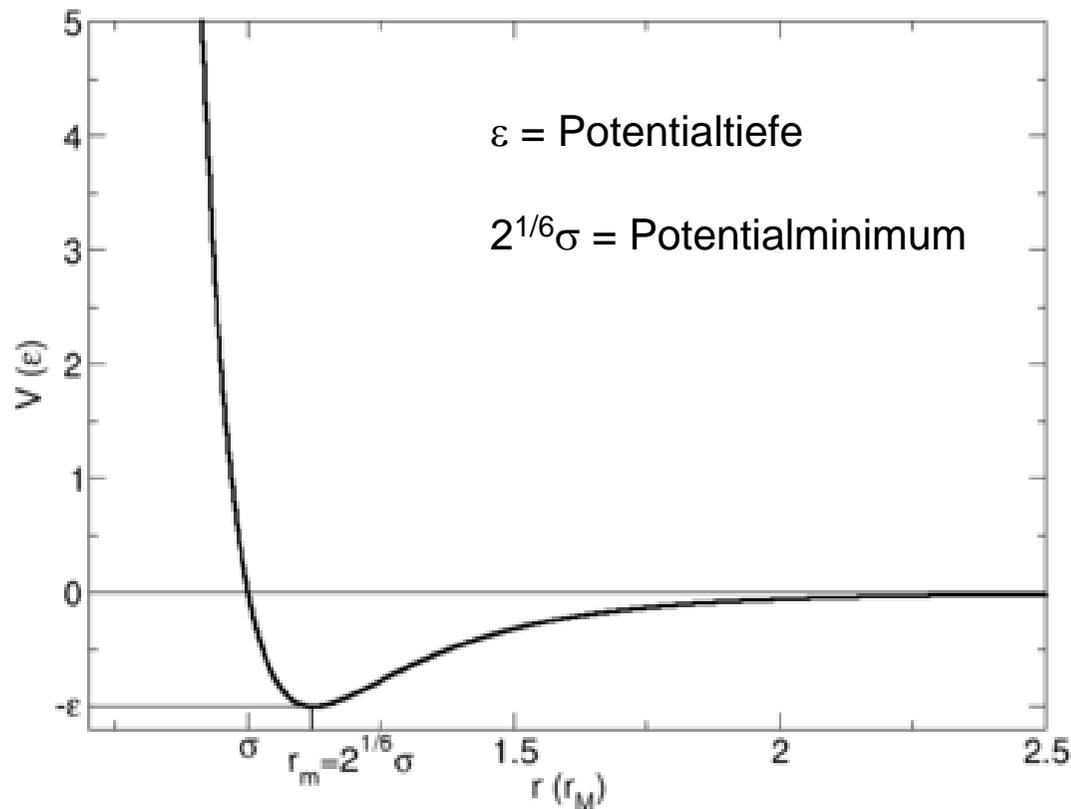
Rechts: Dichte einiger Stoffe

Die Kräfte beim Kontakt makroskopischer Körper (Kontaktkraft) sind auf die Kräfte zwischen ihren Atomen zurückzuführen.

Ein typischer Verlauf der potentiellen Energie  $E_p$  in Abhängigkeit des Abstandes zwischen zwei Atomen wird durch das Lennard-Jones-Potential gegeben.

$$E_p(r) = 4\epsilon \cdot \left[ \left( \frac{\sigma}{r} \right)^{12} - \left( \frac{\sigma}{r} \right)^6 \right]$$

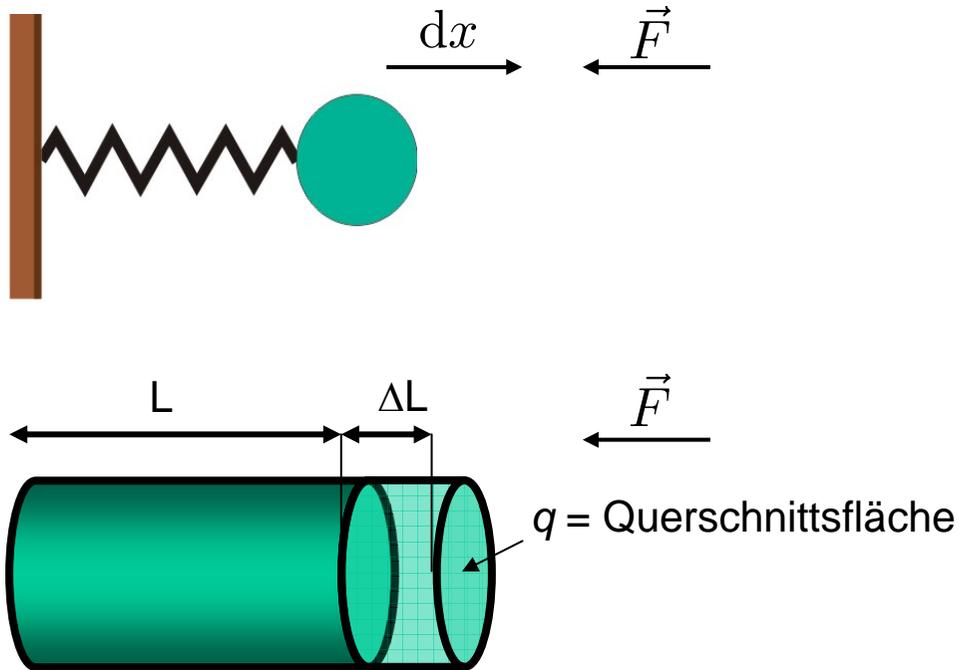
Abstoßung      Anziehung



[Wikipedia]

## 7.2 Deformierbare feste Körper

Für einen makroskopischen Körper gilt für die Kraft bei einer Längenänderung  $\Delta L$  das Hookesche Gesetz:



**Feder:**

$$\vec{F} = -\kappa x$$

**deformierter Stab:**

$$\vec{F} = -E \cdot q \cdot \frac{\Delta \vec{L}}{L}$$

**Def.:**  $E$  ist das Elastizitätsmodul.  $[E] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$

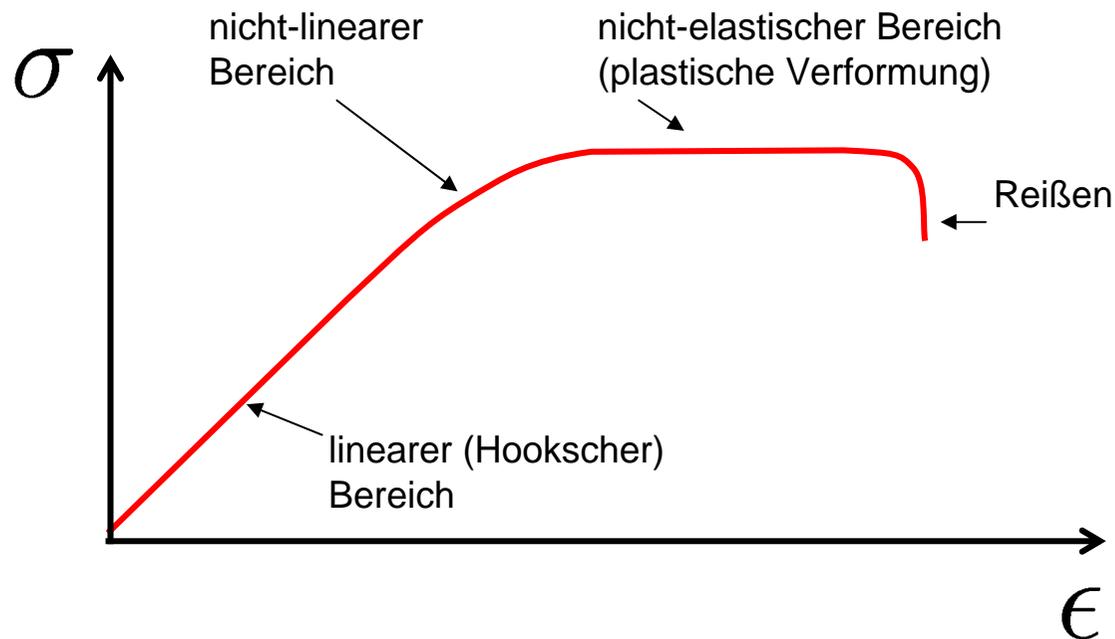
**Def.:** Druck:  $p = \frac{F}{A}$   $[p] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \text{Pa}$

**Bem.:** 1 hectoPascal  
= 1 millibar

Weitere Größen zur Beschreibung der Deformation von Festkörpern:

**Def.:** Zugspannung  $\sigma = \frac{F}{q} = E \cdot \frac{\Delta L}{L} = E \cdot \epsilon$   $[\sigma] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$   
mit  $\epsilon = \frac{\Delta L}{L}$  relative Dehnung

Die Linearität zwischen  $\sigma$  und  $\epsilon$  gilt nur über einen bestimmten Bereich.

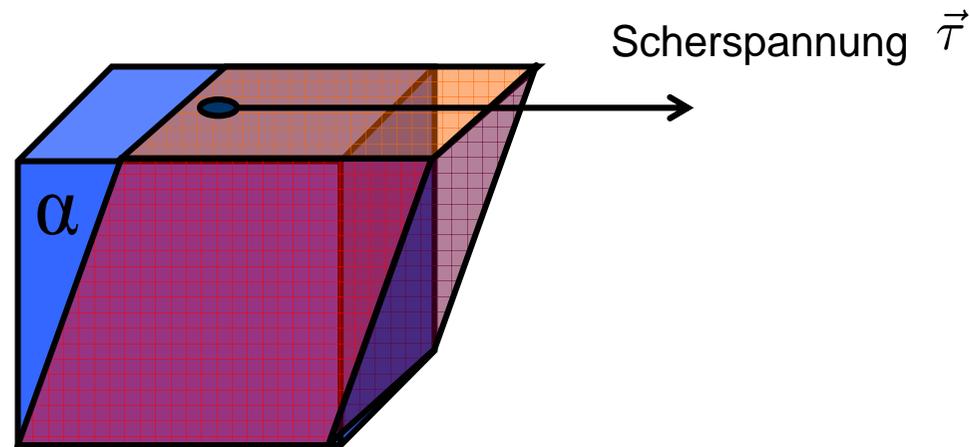


**Def.:** Kompressibilität  $\kappa$

$$p = -K \cdot \frac{\Delta V}{V} = -\frac{1}{\kappa} \cdot \frac{\Delta V}{V} \quad [K] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \quad [\kappa] = \frac{\text{m}^2}{\text{N}}$$

$\kappa = \text{Kompressionsmodul}$

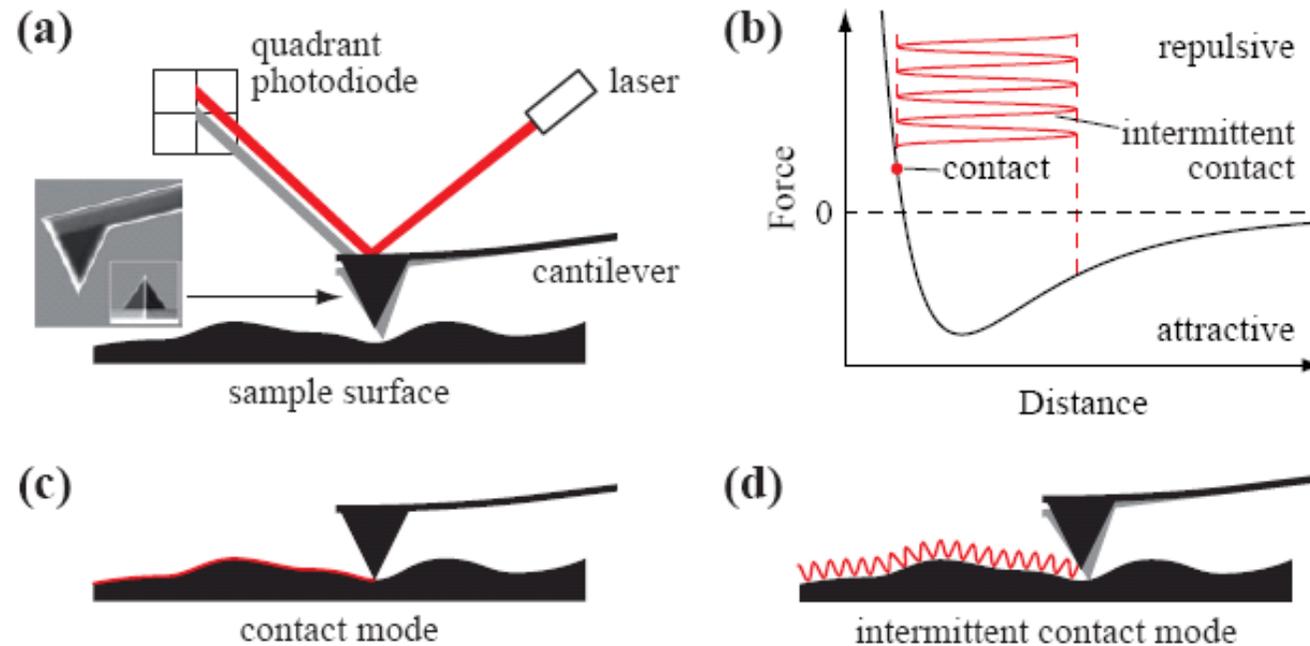
Kräfte, die tangential an der Fläche eines Körpers angreifen, heißen Scherkräfte.  
Man definiert bei der Scherspannung  $\tau$  (Scherkraft pro Flächeneinheit)  
das Scher- oder Schubmodul  $G$ .



**Def.:** Scherspannung:  $\tau = G \cdot \alpha$  (für kleine Winkel  $\alpha$ )  $[G] = \text{N}/(\text{m}^2 \text{rad})$

## Beispiel für Scherkräfte: das Raster-Kraftmikroskop

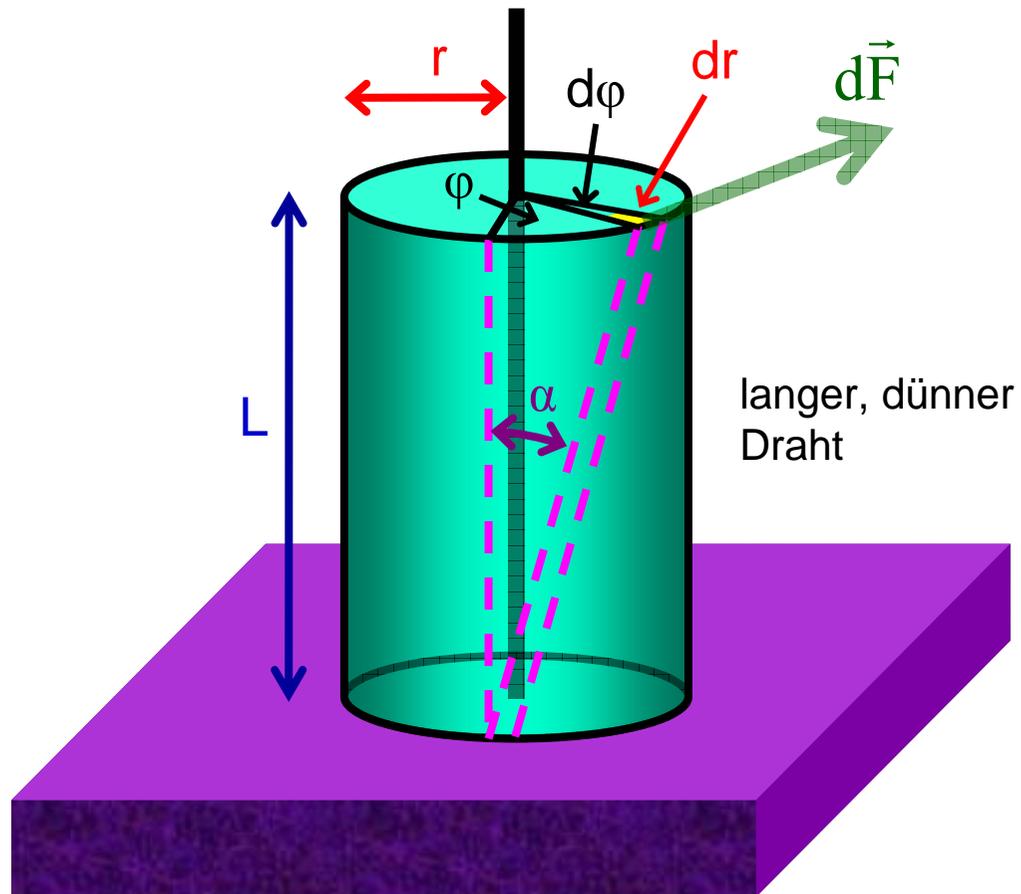
In einem Rasterkraftmikroskop wird eine sehr kleine Spitze, „cantilever“, (Spitzenradius wenige nm) über ein Substrat geführt. Die Wechselwirkung mit der Oberfläche führt zu Scherkräften (wenige pN), die als Verbiegung der Spitze detektiert werden.



Anwendungen:      Abbildung mit bis zu atomarer Auflösung  
Messung kleinster Kräfte (z.B. in der Biophysik)  
Nanomanipulation

Weiteres Beispiel: Torsion eines Drahtes.

Eine Torsion um einen Winkel  $\varphi$  bewirkt ein rücktreibendes Drehmoment



Wie beim Hookschen Gesetz ist:

$$\vec{r} \times \vec{F} = \vec{D} = -D_r \cdot \varphi \cdot \hat{\omega}$$

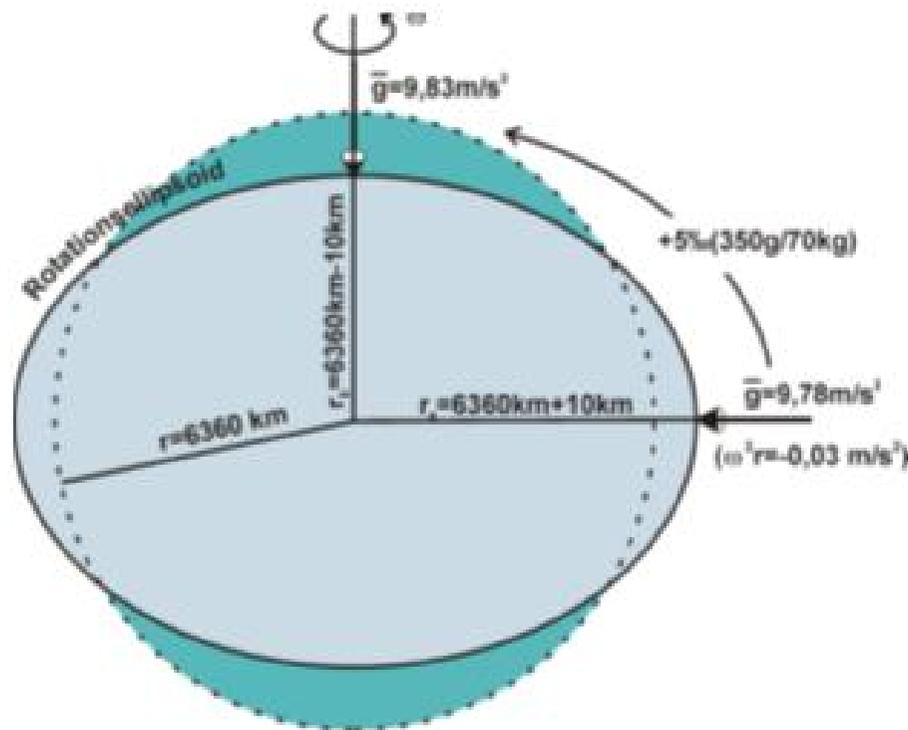
$D_r$  heißt auch Richtmoment.

## Beispiel: Die Erde als deformierbarer Körper

Ein makroskopischer Körper, der elastisch verformt wird, ist die Erde.

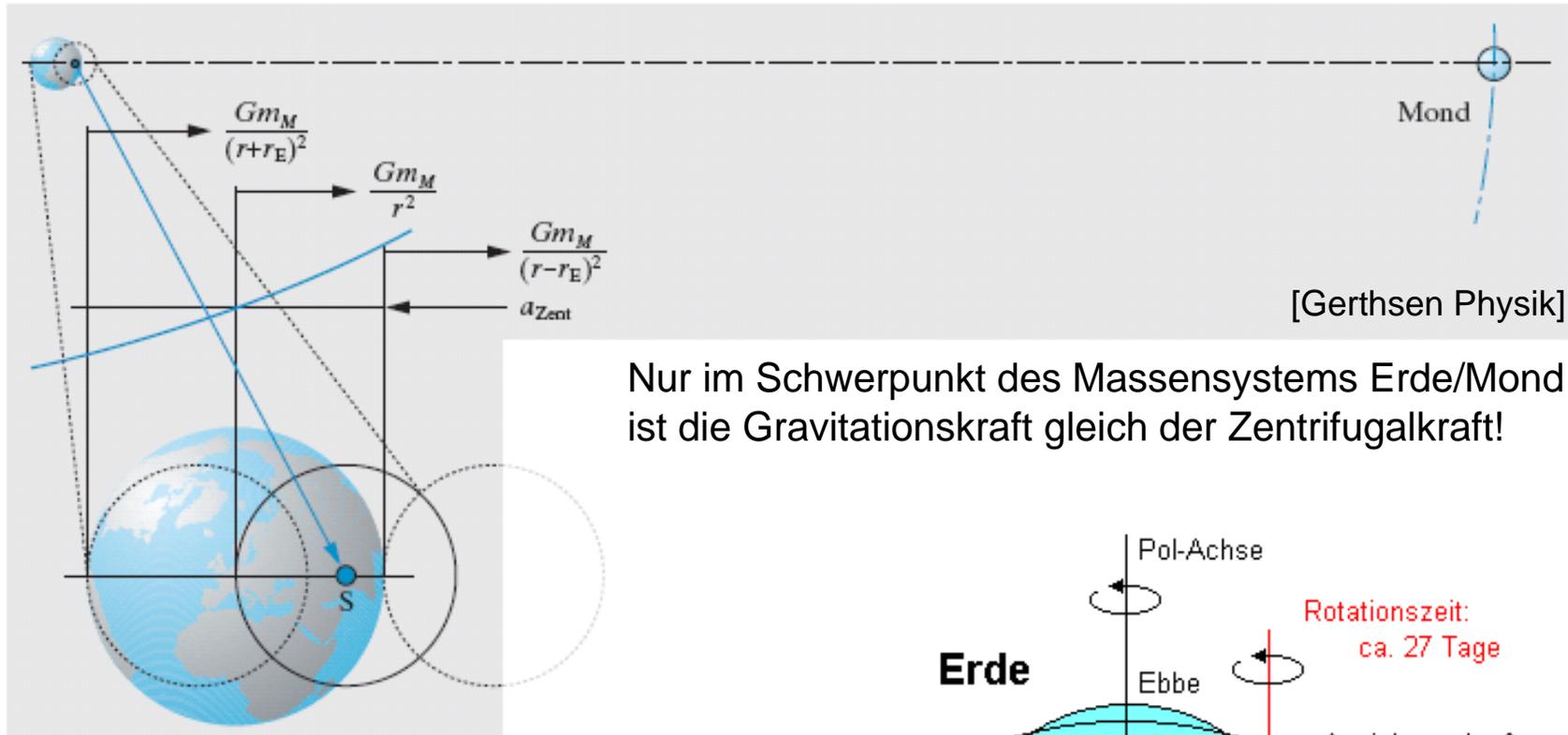
Zweierlei Kräfte wirken:

- 1) Die Zentrifugalkraft bewirkt eine Abplattung der Erde.
- 2) Die Gravitationskraft von Sonne und Mond verursacht Gezeiten.

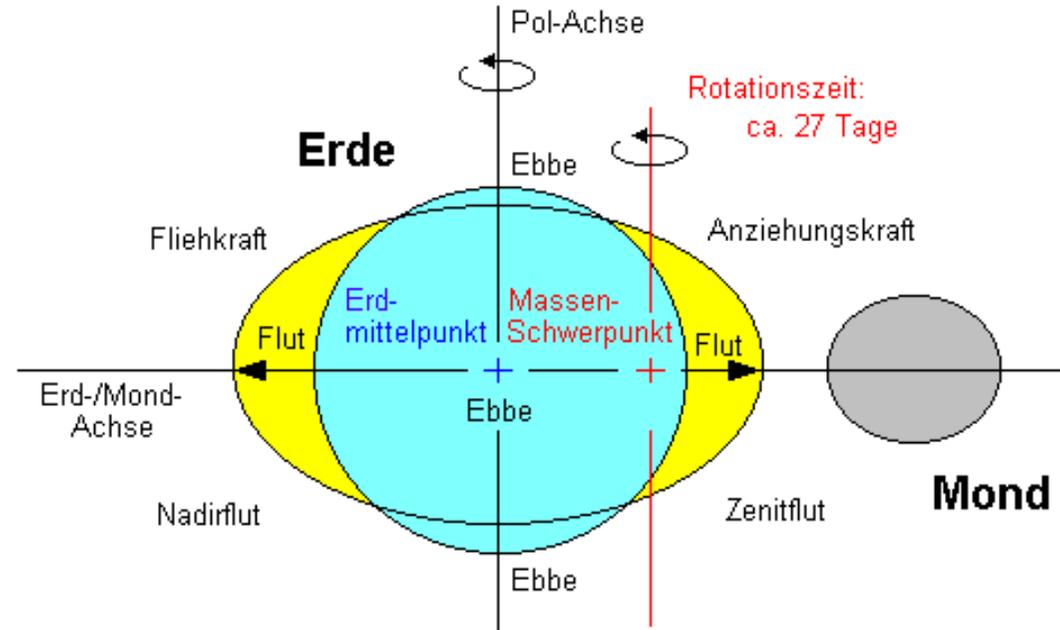


Die Verformung und die Fliehkräfte bewirken eine Variation der Erdbeschleunigung entlang der Erdoberfläche.

# Warum gibt es zweimal am Tag Ebbe und Flut?



Das Überwiegen der Zentrifugal- bzw. der Gravitationskraft führt zu zwei Flutbergen, unter denen sich die Erde alle 24h hindurch dreht. Die Gravitationskraft der Sonne kann die Flutberge verstärken (Springflut).



## 7.3 Hydro- und Aerostatik

### 7.3.1 Gleichgewicht und Druck

In Flüssigkeiten und Gasen können Volumenelemente frei verschoben werden (evt. mit Reibung).

Im stationären Zustand (Statik) kann sich so ein neues Gleichgewicht einstellen.

Bsp.: Rotierende Flüssigkeit

Die Tangentialkräfte am Punkt P sind im Gleichgewicht null.

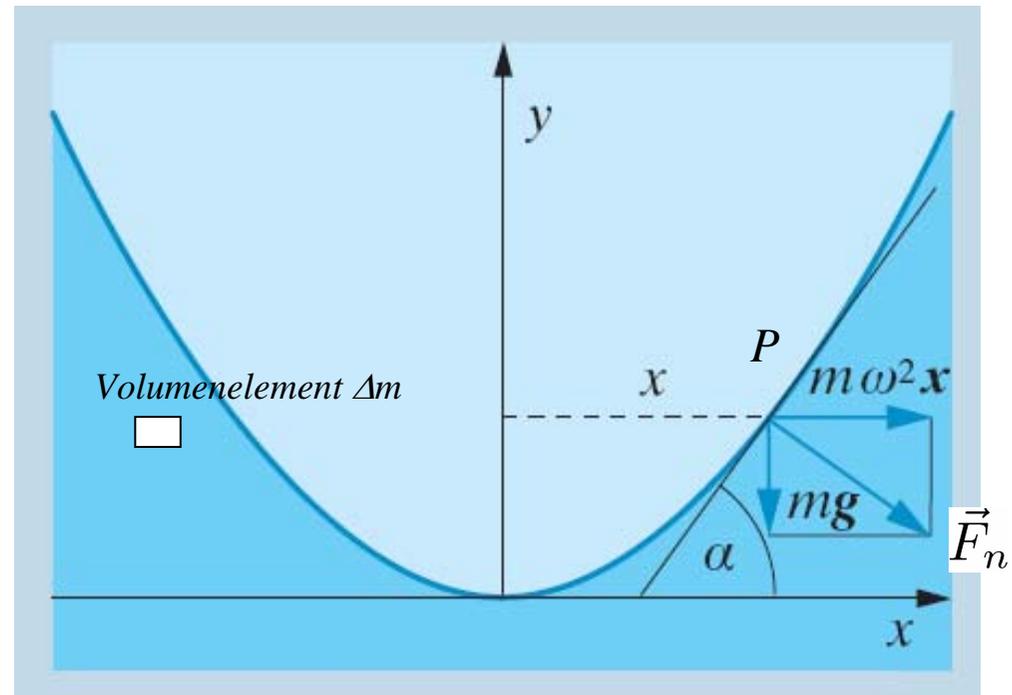
$\vec{F}_n$  steht senkrecht auf der Oberfläche.

Somit:

$$\tan \alpha = \frac{\Delta m \cdot \omega^2 \cdot x}{\Delta m \cdot g} = \frac{\omega^2 \cdot x}{g}$$

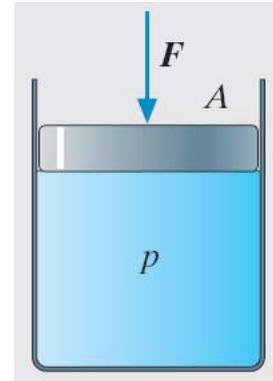
$$\tan \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{\omega^2 \cdot x}{g}$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{g} \cdot x^2 + x_0 \quad \text{Rotationsparaboloit}$$

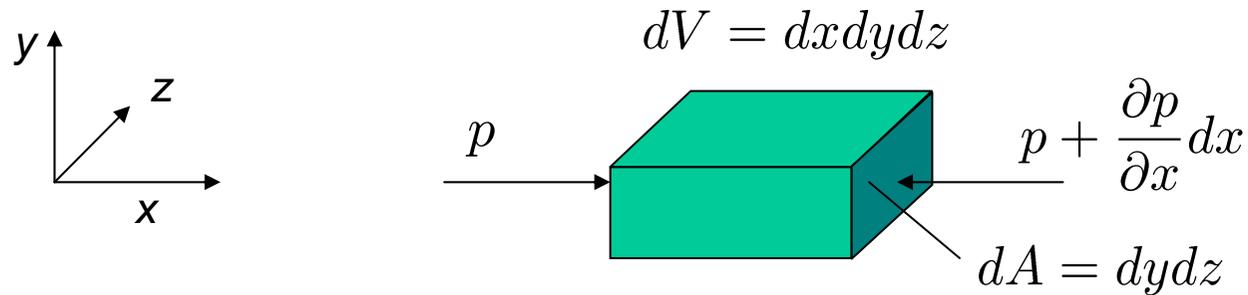


[Gerthsen Physik]

Der Druck ist die Kraft pro Fläche:  $p = \frac{F}{A}$



Der auf ein Volumenelement wirkende Druck setzt sich wie folgt zusammen:



Die resultierende Kraftkomponente in x-Richtung ist:

$$F_x = p dy dz - \left( p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy dz = -\frac{\partial p}{\partial x} dV$$

Insgesamt gilt also:

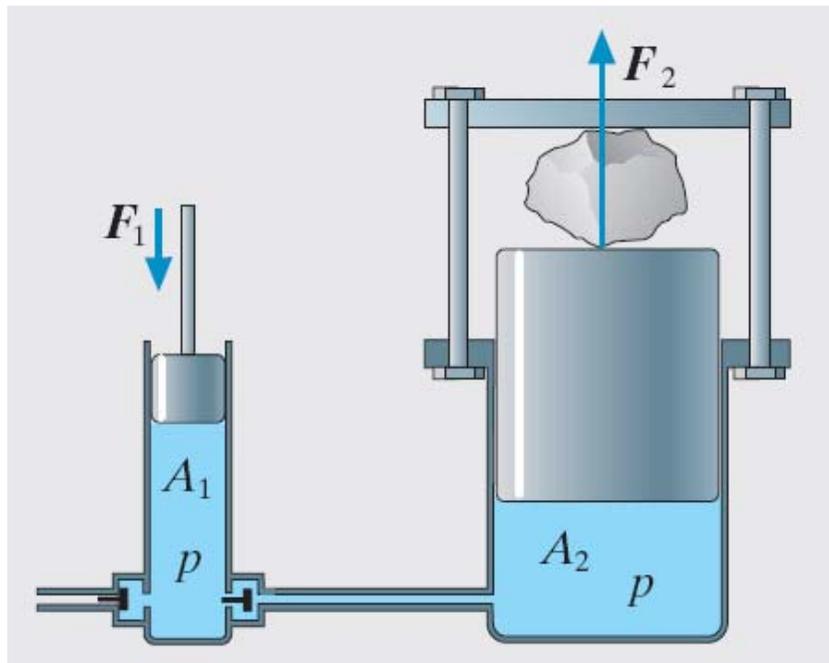
$$F = (-\nabla p) dV$$

Wegen der freien Beweglichkeit ist die Gesamtkraft auf ein Volumenelement null:

Wenn das Eigengewicht des Volumenelements vernachlässigt wird ist also:

$$F = (-\nabla p)dV = 0 \quad \text{somit} \quad \nabla p = 0 \quad \text{d.h. } p = \text{const.}$$

Dieser Effekt kann in der hydraulischen Presse genutzt werden:



$$F_2 = F_1 \frac{A_2}{A_1}$$

[Gerthsen Physik]

Berücksichtigt man das Eigengewicht des Volumenelements im Schwerfeld der Erde, so folgt für das Kräftegleichgewicht:

$$\frac{dp}{dz} dV = -dm \cdot g$$

↑ Druckkraft      ↑ Schwerkraft

$$\Rightarrow dp = -\frac{dm}{dV} \cdot g \cdot dz = -\rho \cdot g \cdot dz$$

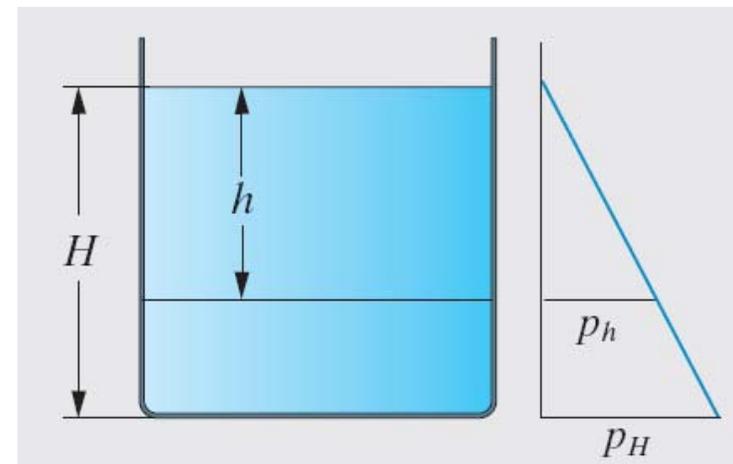
Für Flüssigkeiten ist die relative Volumenänderung bei Druckänderung

$$\kappa = -\frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dp} \quad \text{sehr klein, d.h. } \rho \text{ hängt nicht von } z \text{ ab.}$$

Es folgt:  $p(z) = p(z_0) - z \cdot \rho \cdot g$   
**Hydrostatischer Druck**

oder im nebenstehenden Beispiel:

$$p(h) = \rho \cdot gh$$

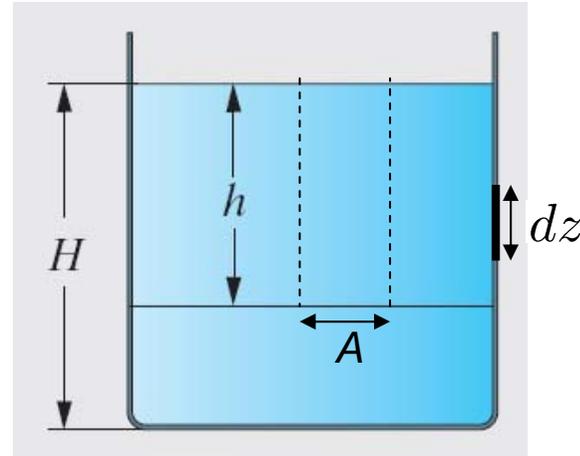


[Gerthsen Physik]

Man kann auch schreiben:

$$p(h) = g\rho h A / A = gM / A$$

M = Gewicht der „Wassersäule“



**Beisp.:** Eine Wassersäule von 10m Höhe erzeugt einen Druck von  $p = rgh$   
 $= 10^5$  Pascal = 1 bar = 0,986 atm. In 10 km Tiefe herrscht also ein Druck von 1000 atm.

Die gesamte seitliche Kraft (in  $y$ -Richtung) auf die Außenwand des obigen Zylinders mit Umfang  $U$  ist dann:

$$dF_y = U \cdot dz \cdot p(z) = U \cdot dz \cdot z \cdot \rho \cdot g$$

$$\Rightarrow F_y(z) = \frac{1}{2} \cdot U \cdot \rho \cdot g \cdot h^2$$

Die Belastung der Wände nimmt also quadratisch mit der Höhe zu.

Dies ist z.B. bei Staudämmen relevant.

Für Gase ist die Dichte  $\rho$  nicht mehr konstant, jedoch das Verhältnis  $\rho/p$

Letzteres ist das Gesetz von Boyle-Mariotte (Konstanz des Produktes aus Volumen und Druck) und wird in der Thermodynamik behandelt.

$$\rho/p = \rho_0/p_0 = \text{const.}$$

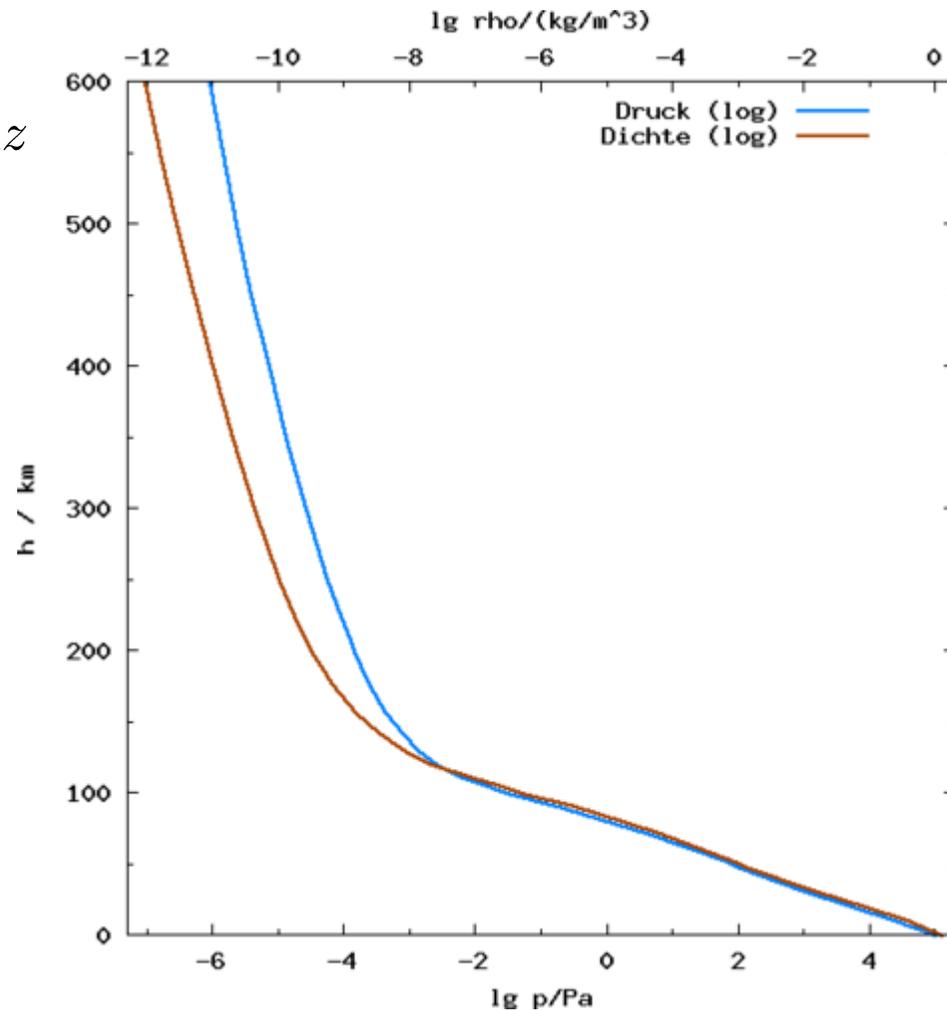
$$\Rightarrow dp = -\rho \cdot g \cdot dz = -\frac{\rho_0}{p_0} \cdot p \cdot g \cdot dz$$

Es folgt die barometrische Höhenformel:

$$p(z) = p_0 \cdot e^{-\frac{\rho_0}{p_0} \cdot g \cdot z}$$

Die rechte Abbildung verdeutlicht den Zusammenhang in einer logarithmischen Darstellung.

[Wikipedia]



Der Druckgradient in einer Flüssigkeit oder in einem Gas bewirkt den Auftrieb.

Auf ein beliebiges Volumenelement wirkt die Kraft:  $dF = -\nabla p \cdot dV$

Im homogenen Schwerfeld (in z-Richtung) kompensieren sich die seitlichen Kräfte und es existiert allein ein Druckgradient in z-Richtung.

$$dF = -\nabla p \cdot dV = -\frac{\partial p}{\partial z} \cdot \hat{z} \cdot dV$$

In einer Flüssigkeit folgt mit:

$$p(z) = p_0 - \rho_{Fl} \cdot g \cdot z$$

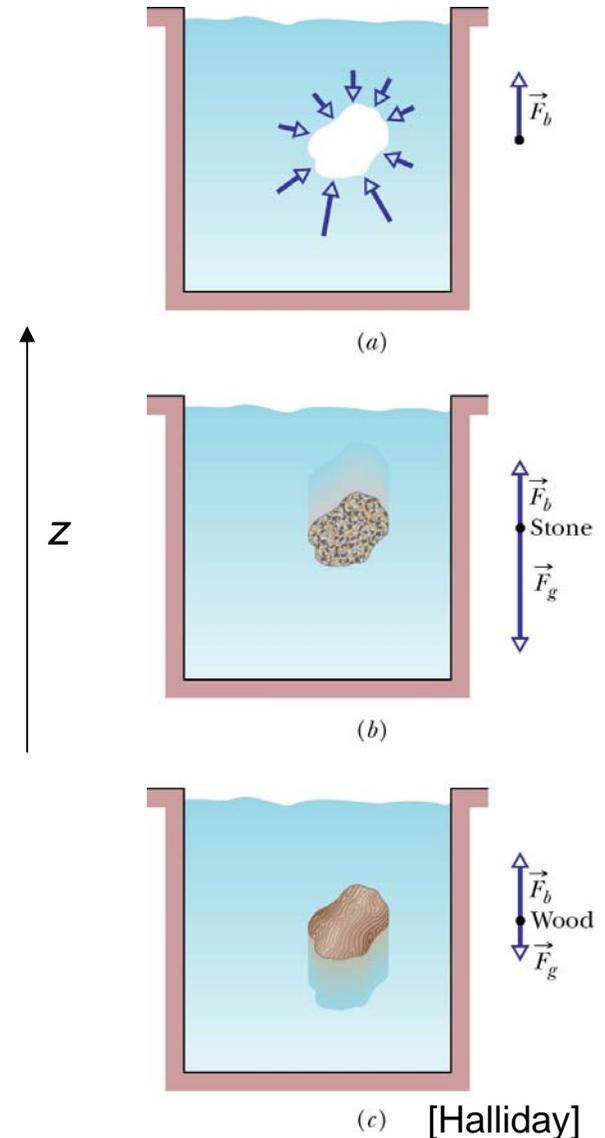
somit

$$dF = \rho_{Fl} \cdot g \cdot \hat{z} \cdot dV = -\vec{g} \cdot \rho_{Fl} \cdot dV$$

Es ergibt sich die Auftriebskraft:

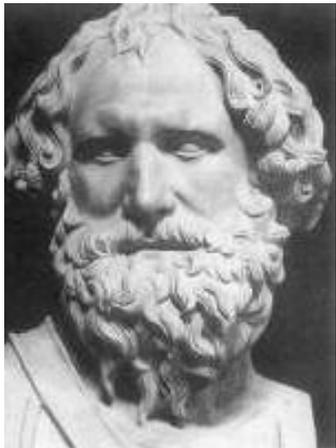
$$\vec{F}_A = -\vec{g} \cdot \int_V \rho_{Fl} \cdot dV = -\vec{G}_{Fl}$$

Gewicht der verdrängten Flüssigkeit



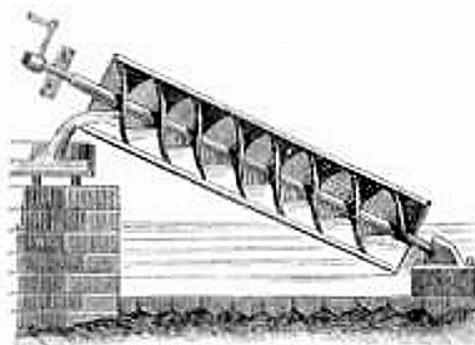
In Worte gefasst bedeutet die Formel für die Auftriebskraft:

„Die Auftriebskraft eines Körpers ist gleich der Gewichtskraft des von ihm verdrängten Wassers.“ (Prinzip von Archimedes, „Heureka!“)



287-212 (211?) BC

Archimedes erfand eine Vielzahl von Maschinen:



Archimedische Schraube



„Spiegelwaffe“

Ein Körper schwimmt, falls  $\vec{G}_{\text{Körper}} < \vec{G}_{Fl}$

### Beispiel: Eisberg

Dichte von Eis:  $\rho_E = 0,95 \text{ kg/dm}^3$

Dichte von Salzwasser:  $\rho_S = 1,05 \text{ kg/dm}^3$

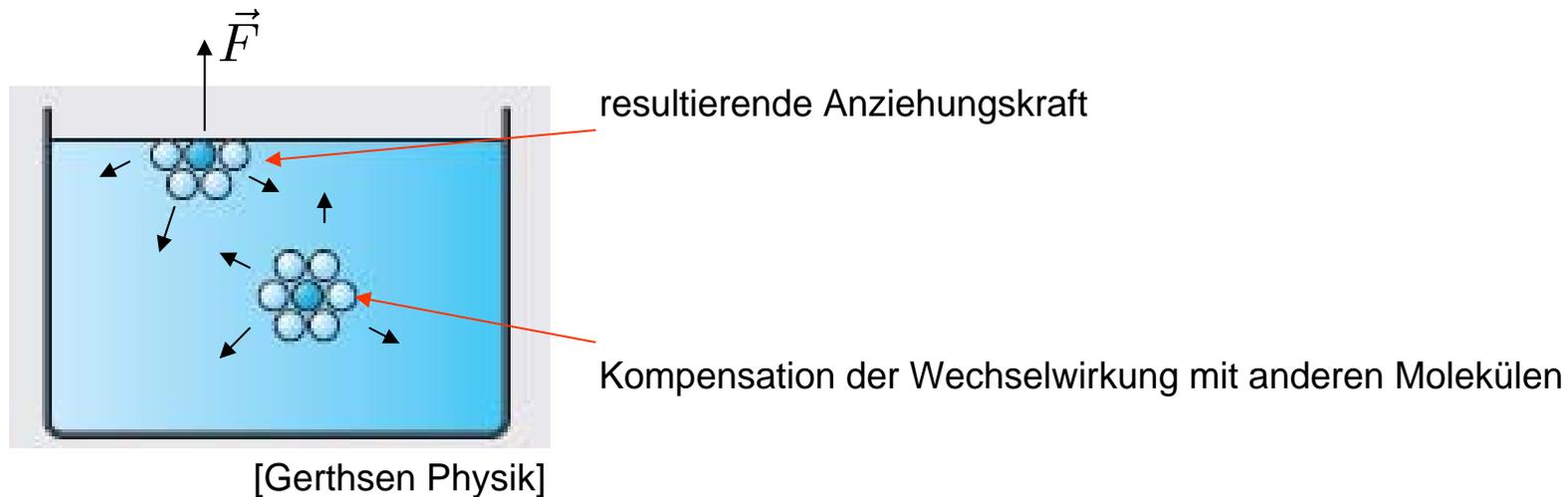


10% eines Eisbergs ist oberhalb der Wasseroberfläche



## 7.3.2 Grenzflächen

Die Grenzfläche einer Flüssigkeit bedeutet eine Symmetriebrechung.

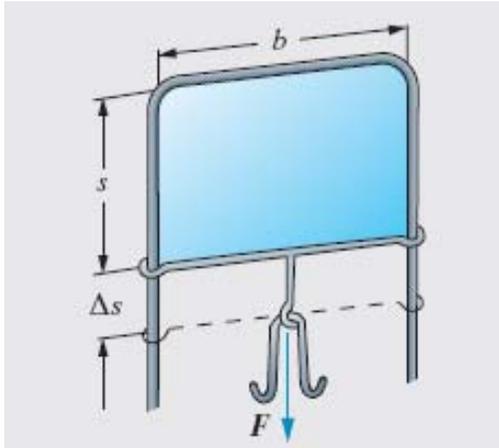


Es muss Arbeit geleistet werden, um ein Molekül aus einer Flüssigkeit zu entfernen:

$$\Delta W = F \cdot \Delta x$$

**Def.:** Oberflächenspannung  $\sigma = \frac{\Delta W}{\Delta A}$       $[\sigma] = \frac{\text{J}}{\text{m}^2} = \frac{\text{kg}}{\text{s}^2}$

Die Oberflächenspannung  $\sigma$  kann direkt über eine Kraftwirkung gemessen werden.

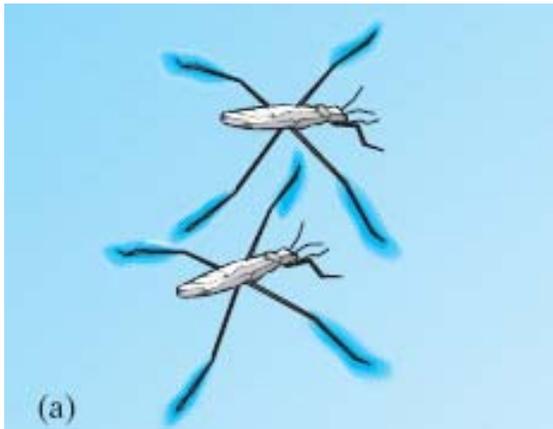


[Gerthsen Physik]

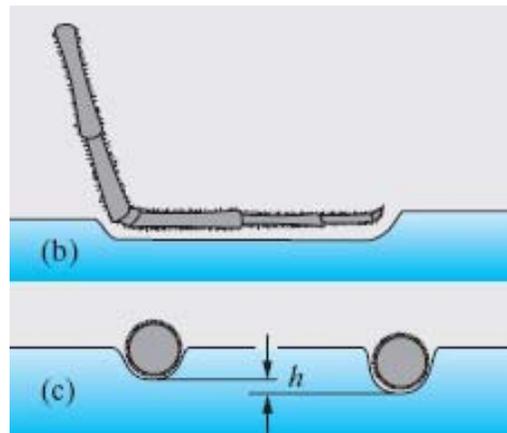
Die Lamelle bewirkt eine Kraft auf den beweglichen Bügel.

$$\Delta W = F \cdot \Delta x = \sigma \cdot 2L \cdot \Delta x$$

### Beispiel 1: Wasserläufer



[Gerthsen Physik]



Das Eindringen der Beine des Wasserläufers ins Wasser um ein Stück  $h$  kostet mehr Energie als die Reduktion seiner potentiellen Energie im Schwerfeld.

## Beispiel 2: Aufblasen zweier Seifenblasen

Energieminimierung durch Oberflächenverringerung

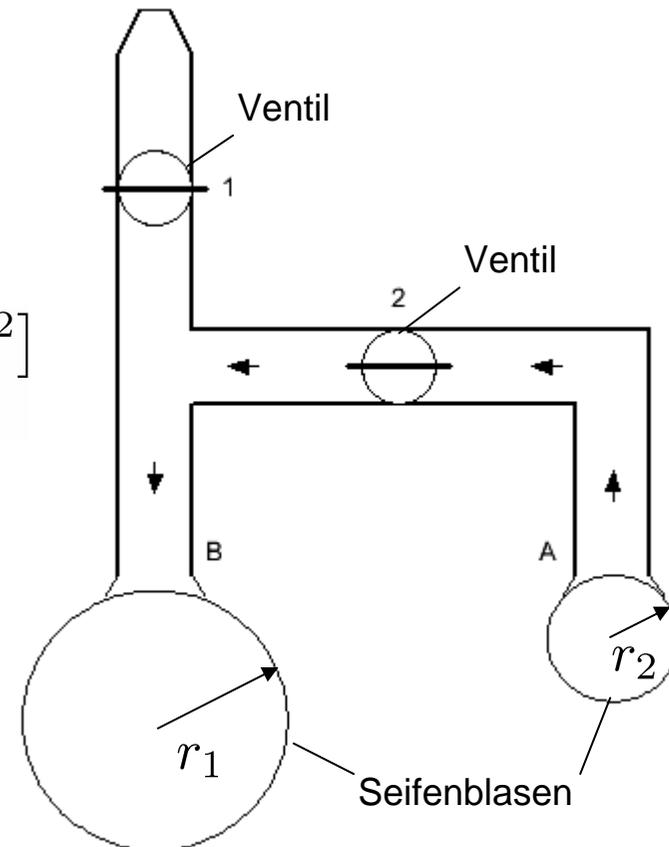
$$\begin{aligned}\Delta W &= \sigma \cdot \Delta A = \sigma \cdot 2 \cdot 4\pi [r^2 - (r - \Delta r)^2] \\ &\approx \sigma \cdot 2 \cdot 4\pi \cdot 2 \cdot r \cdot \Delta r\end{aligned}$$

Energiebedarf bei Volumenverkleinerung  
gegen den Druck  $p$ :

$$\begin{aligned}\Delta W &= \Delta p \cdot 4\pi r^2 \cdot \Delta r = \sigma \cdot 2 \cdot 4\pi \cdot 2r \cdot \Delta r \\ \Rightarrow \Delta p &= \frac{4\sigma}{r}\end{aligned}$$

Bei einer kleineren Seifenblase entsteht ein größerer Überdruck!

$$\Delta p_2 > \Delta p_1$$

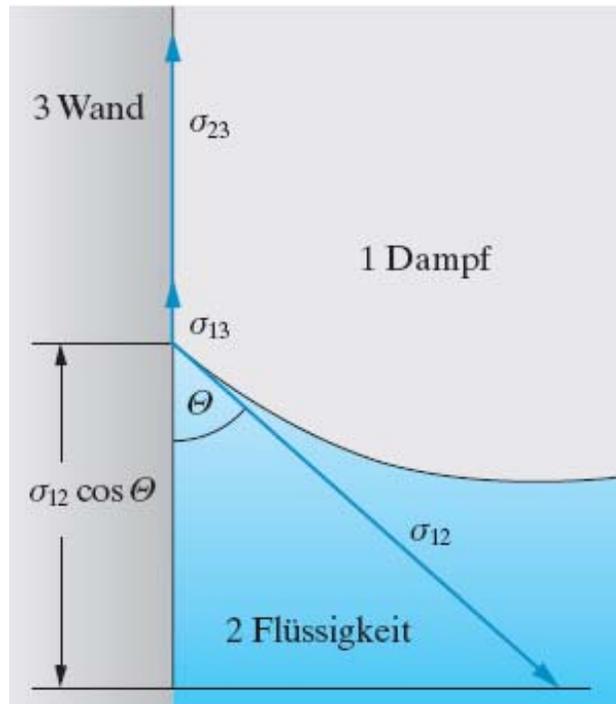


Die Betrachtungen können auf andere Grenzflächen (nicht nur flüssig-gasförmig) übertragen werden.

**Def.:** Grenzflächenspannung  $\sigma_{ik} = \frac{\Delta W}{\Delta A}$   $[\sigma_{ik}] = \frac{J}{m^2} = \frac{N}{m}$

Die Grenzflächenspannung beschreibt die Energieänderung pro Grenzflächenänderung.

Bei flüssig/gasförmigen Grenzflächen ist  $\sigma_{ik}$  immer größer null.



[Gerthsen Physik]

### Beispiel: Wasser

$$\sigma_{13} - \sigma_{23} = \sigma_{12} \cos \theta$$

Zunahme der Grenzfläche fest-flüssig energetisch günstiger, d.h. konvexe Oberfläche der Flüssigkeit (benetzende Flüssigkeit)

### Gegenbeispiel: Quecksilber

Zunahme der Grenzfläche fest-flüssig energetisch ungünstiger, d.h. konkave Oberfläche der Flüssigkeit

Die unterschiedlichen Grenzflächenenergien führen zum Kapillareffekt.

Die Steighöhe  $\Delta h$  kann wie folgt gewonnen werden:

Druck an Grenzfläche (wie bei Seifenblase, aber nur eine Grenzfläche):

$$p = \frac{2\sigma}{r'} = \frac{2\sigma}{r} \cos \Theta$$

Kraftkomponente in vertikaler Richtung:

$$dF_z = p \cdot \underbrace{dA \cos \alpha}$$

Projektion auf horizont. Fläche

Gesamtkraft aller Flächenelemente:

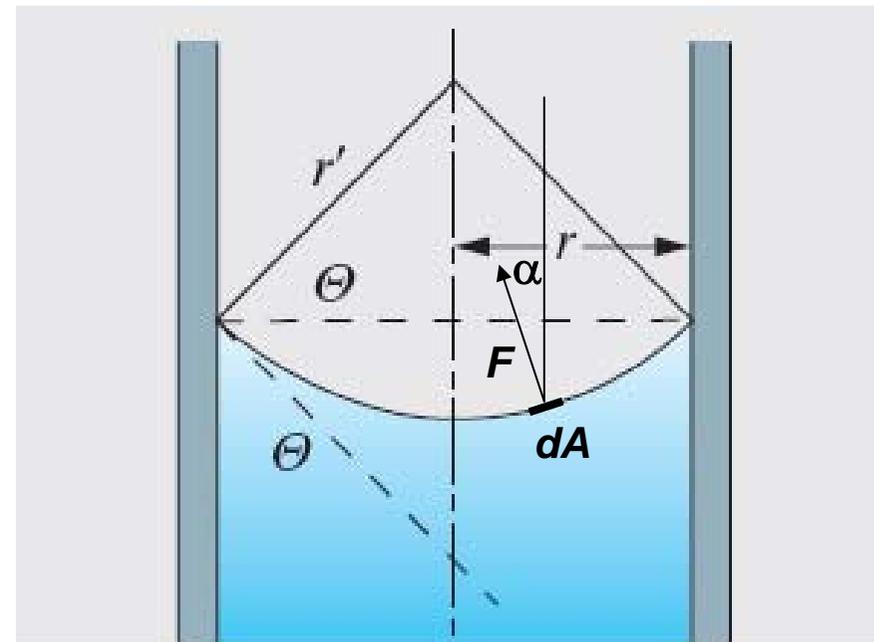
$$F_z = p \cdot \pi r^2 = 2\sigma \pi r \cos \Theta$$

Im Gleichgewicht:

$$F_z = 2\sigma \pi r \cos \Theta = F_G = mg = \rho \pi r^2 h g$$

$$\Rightarrow h = \frac{2\sigma \cos \Theta}{\rho r g}$$

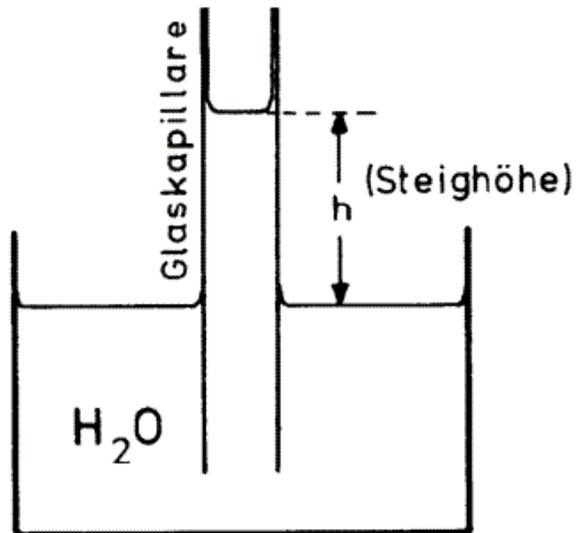
Steighöhe



[Gerthsen Physik]

Bei vollständig benetzenden Flüssigkeiten ist  $\theta = 0$  und somit: 
$$h = \frac{2\sigma}{\rho r g}$$

Dieser Zusammenhang kann auch direkt aus der Energieerhaltung abgeleitet werden:



Potentielle Energie der Flüssigkeitssäule

$$mg \cdot h = (\rho \pi r^2 h) \cdot gh$$

Energiegewinn durch Verringerung der Fläche der die Kapillare benetzenden Flüssigkeit:

$$\sigma \cdot 2\pi r h$$

Gleichsetzen liefert: 
$$h = \frac{2\sigma}{\rho r g}$$

Beispiel: Steighöhe einer Wassersäule ( $\sigma = 0,0728 \text{ J/m}^2$ ,  $\theta = 0,35 \text{ rad}$ ,  $\rho = 1 \text{ kg/m}^3$ )

Kapillarradius	Steighöhe
1 m	0,014 mm
1 cm	1,4 mm
0,1 mm	14 cm

### 7.3.3 Grundlagen zu Strömungen

Die Hydro- und Aerodynamik beschreibt die Bewegung von makroskopischen Flüssigkeiten oder Gasen.

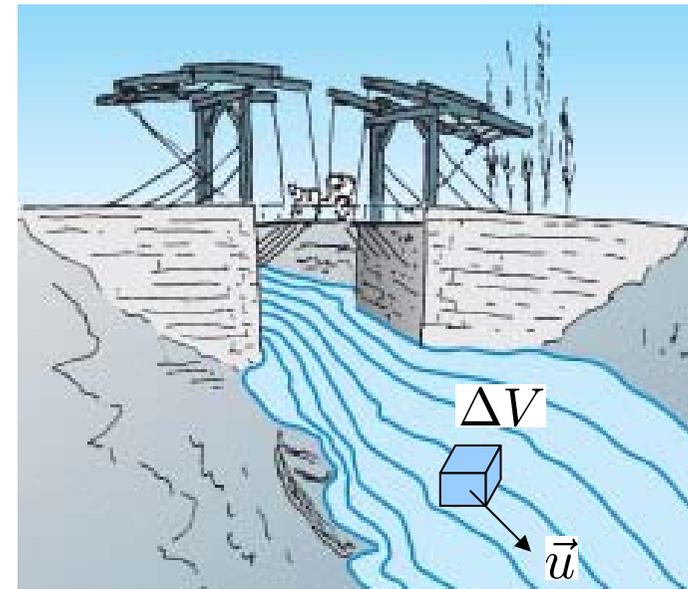
Man betrachtet oft die Bewegung  $\vec{u}(\vec{r}, t)$  eines kleinen Volumenelements  $\Delta V$

Mögliche auftretende Kräfte:

- Druckdifferenz  $F_p = -\nabla p \cdot \Delta V$
- Schwerkraft  $F_g = \Delta m \cdot g = \rho \cdot g \cdot \Delta V$
- Reibungskräfte  $F_R$  (können vom Ort und der Strömungsgeschw.  $\vec{u}$  abhängen)
- weitere äußere Kräfte (elektronische, magnetische, etc.)

Newtonsche Bewegungsgleichung für ein Massenelement:

$$F = F_p + F_g + F_R = \Delta m \cdot \ddot{\vec{r}} = \rho \cdot \Delta V \cdot \frac{d\vec{u}}{dt}$$



[Gerthsen Physik]

Der Weg  $\vec{r}(t)$  den  $\Delta V$  durchläuft heißt Stromlinie.

Eine zeitunabhängige Strömung mit  $\vec{u}(\vec{r}, t) = \vec{u}(\vec{r})$  heißt stationäre Strömung.

Bezüglich der Reibung unterscheidet man verschiedene Regime:

Reibungskräfte  $F_R$  vernachlässigbar



$F_R$  dominiert

ideale Flüssigkeiten

reale Flüssigkeiten

zähe Flüssigkeiten

### Beispiele:

- ideale Flüssigkeiten (Luft um makroskopische Objekte (Autos, Flugzeuge))
- zähe Flüssigkeiten (Sirup, Glas, Wasser, Luft um kleine Körper wie Insekten)

Laminare Strömungen:

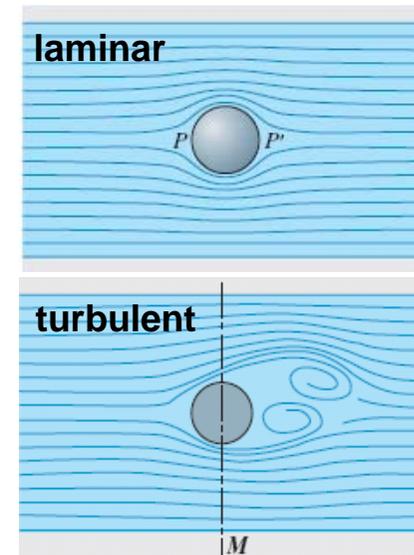


Stromlinien durchmischen sich nicht.

Turbulente Strömungen:

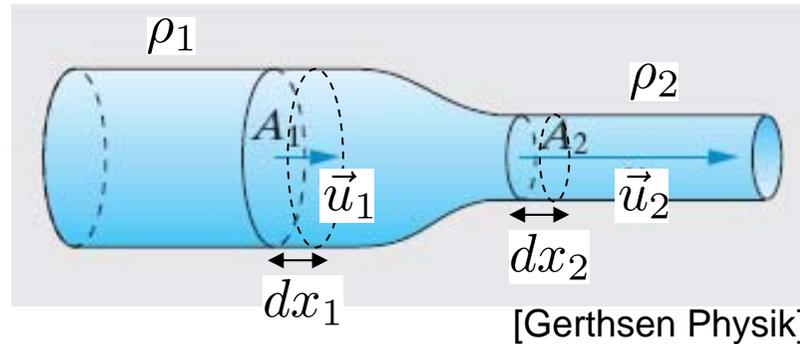


Stromlinien durchmischen sich.



### 7.3.4 Wichtige Gleichungen der Strömungstheorie

Strömung einer Flüssigkeit durch eine sich verengende Röhre:



$$\Delta m = \rho \cdot \Delta V$$

Die pro Zeitinkrement durch die Flächen strömende Masse ist:

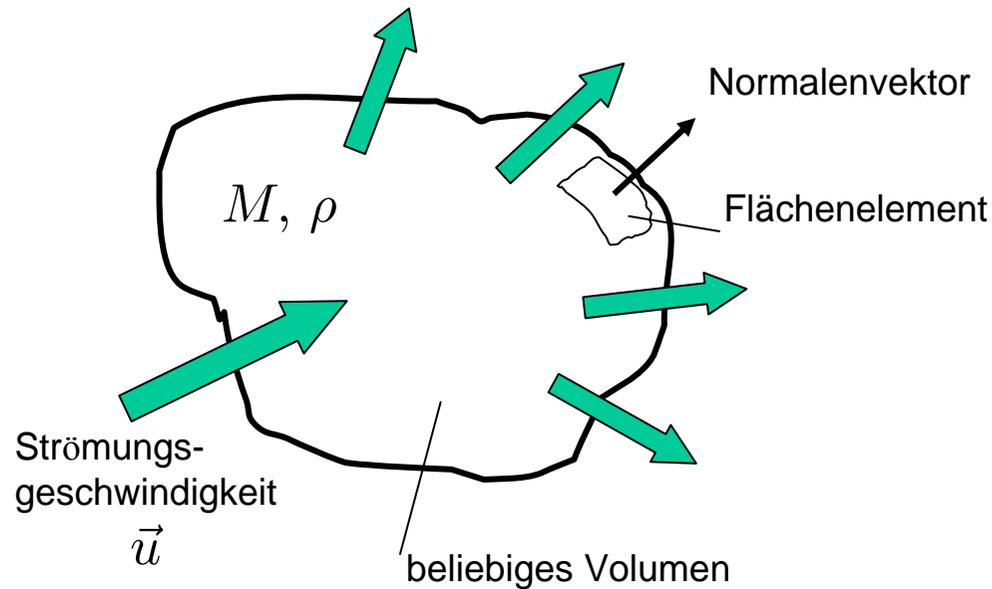
$$\frac{dM}{dt} = \rho_1 \cdot \frac{dV}{dt} = \rho_1 \cdot A_1 \frac{dx_1}{dt} = \rho_2 \cdot A_2 \frac{dx_2}{dt} \stackrel{\text{Massenerhaltung}}{=} 0$$

In inkompressiblen Flüssigkeiten ist  $\rho_1 = \rho_2$

Damit ist  $A_1 \cdot u_{x_1} = A_2 \cdot u_{x_2}$  oder  $j_{1,x} = j_{2,x}$

**Def.:** Strom- oder Flussdichte  $\vec{j} = \rho \cdot \vec{u}$       $[\vec{j}] = \frac{kg}{m^2 \cdot s}$

Allgemeines Strömungsproblem:



Durch Ein-/Ausströmen entsteht eine Massenänderung innerhalb des Volumens:

$$dm = \rho \cdot \vec{u} \cdot \hat{n} \cdot ds = \rho \cdot \vec{u} \cdot d\vec{s}$$

Für die Massenänderung der im Volumen enthaltenen Gesamtmasse folgt:

$$-\frac{\partial M}{\partial t} = \int_S \rho \cdot \vec{u} \cdot d\vec{s} = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{s}$$

Randfläche des Volumens

Nach dem Satz von Gauß ist:

$$\int_S \rho \cdot \vec{u} \cdot d\vec{s} = \int_V \operatorname{div}(\rho \cdot \vec{u}) dV$$
$$\Rightarrow -\frac{\partial M}{\partial t} = -\int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho dV = \int_V \operatorname{div}(\rho \cdot \vec{u}) dV$$

Es folgt:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \cdot \vec{u}) = 0$$

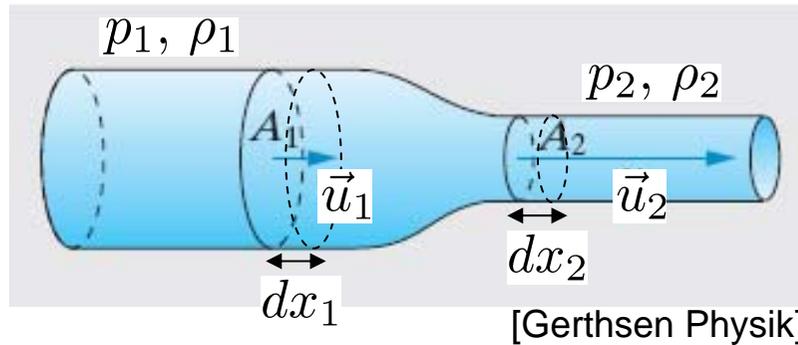
**Kontinuitätsgleichung**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0$$

Für inkompressible Flüssigkeiten  $\left( \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \right)$  folgt:

$$\operatorname{div} \vec{j} = \operatorname{div} \vec{u} = 0$$

Energieerhaltung bei strömenden Flüssigkeiten:



$$\Delta m = \rho \cdot \Delta V$$

Energie um Volumenelement  $\Delta V_1$  um  $\Delta x_1$  zu verschieben:

$$\Delta W_1 = F_1 \cdot \Delta x_1 = p_1 \cdot A_1 \cdot \Delta x_1 = p_1 \cdot V_1$$

Energie um Volumenelement  $\Delta V_2$  um  $\Delta x_2$  zu verschieben:

$$\Delta W_2 = F_2 \cdot \Delta x_2 = p_2 \cdot A_2 \cdot \Delta x_2 = p_2 \cdot V_2$$

Der Energiedifferenz muss eine Veränderung der kinetischen Energie entsprechen:

$$p_1 \cdot \Delta V_1 + \frac{1}{2} \Delta m \cdot u_1^2 = p_2 \cdot \Delta V_2 + \frac{1}{2} \Delta m \cdot u_2^2$$

$$p_1 \cdot \Delta V_1 + \frac{1}{2} \rho_1 \cdot \Delta V_1 \cdot u_1^2 = p_2 \cdot \Delta V_2 + \frac{1}{2} \rho_2 \cdot \Delta V_2 \cdot u_2^2$$

Bei inkompressiblen Flüssigkeiten ist

$$\Delta V_1 = \Delta V_2 \ \& \ \rho = \text{const.}$$
$$\Rightarrow \quad p_1 + \frac{1}{2}\rho u_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho u_2^2$$

$$p + \frac{1}{2}\rho u^2 = p_0 = \text{const.} \quad \text{Bernoulli-Gleichung}$$

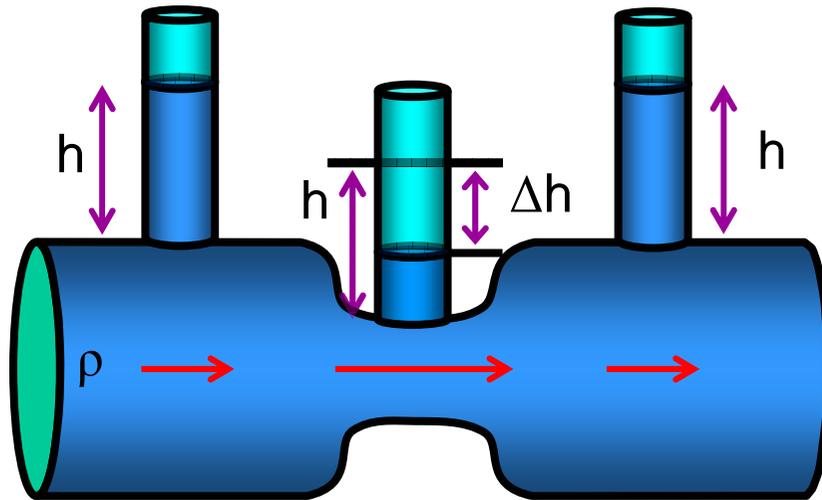
$p_0 - p$  heißt Staudruck  $= p_s$

$p = p_0 - \frac{1}{2}\rho u^2 = p_0 - p_s$  heißt statischer Druck.

Verallgemeinerung im Schwerfeld:

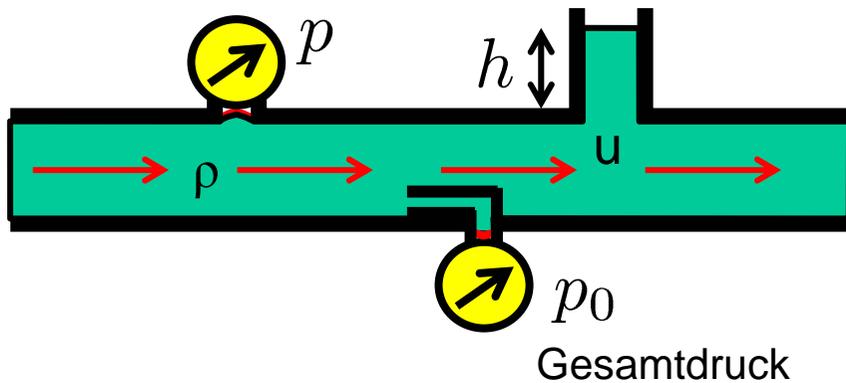
$$p + \frac{1}{2}\rho u^2 + \rho gh = \text{const.}$$

Zur Messung des statischen Druckes:



Im Bereich des kleineren Durchmessers muss die Strömungsgeschwindigkeit größer sein, daher ist der Druck kleiner.

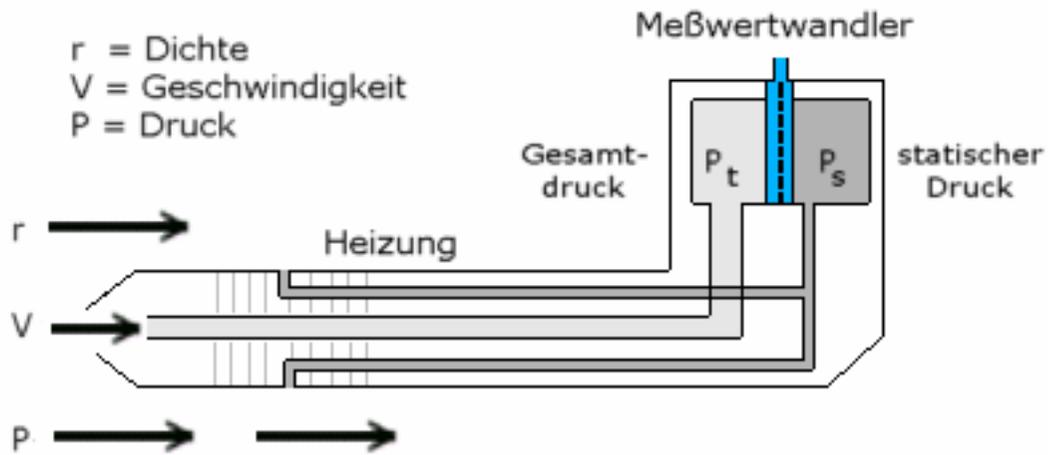
Statischer Druck  $p = \rho g h$



In einem Pitot-Rohr kann die Strömungsgeschwindigkeit gemessen werden über:

$$p_0 - p = \frac{1}{2} \rho u^2$$

# Aufbau einer Pitot-Sonde (Prandtl'sches Staurohr):



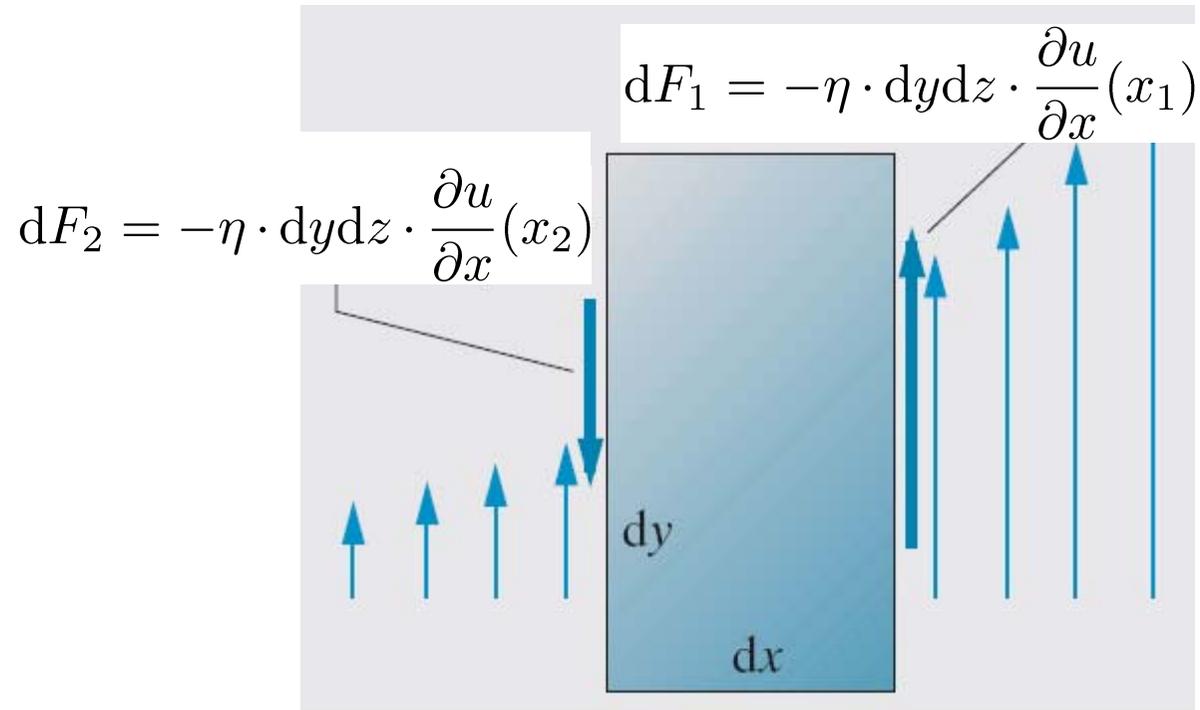
Pitot-Sonde an einer Boing zur Messung der Strömungsgeschwindigkeit



[Wikipedia]

In realen Flüssigkeiten treten Reibungsverluste auf.

Moleküle die in einen anderen Strömungsbereich diffundieren ändern dort die Geschwindigkeit, d.h. auch den Impuls anderer Moleküle.  $\rightarrow$  Kraftübertragung



Dabei wird die Reibungskraft durch einen temperaturabhängigen Koeffizienten beschrieben.

**Def.:** Zähigkeit oder Viskosität  $\eta$        $[\eta] = \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}^2} = \text{Pascal} \cdot \text{s}$

Das Strömungsgefälle in x-Richtung verursacht also auf ein Flächenelement  $dy \cdot dz$  die Kraft

$$\Delta F_R = \eta \cdot dy \cdot dz \left( \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_0+dx} - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_0} \right)$$

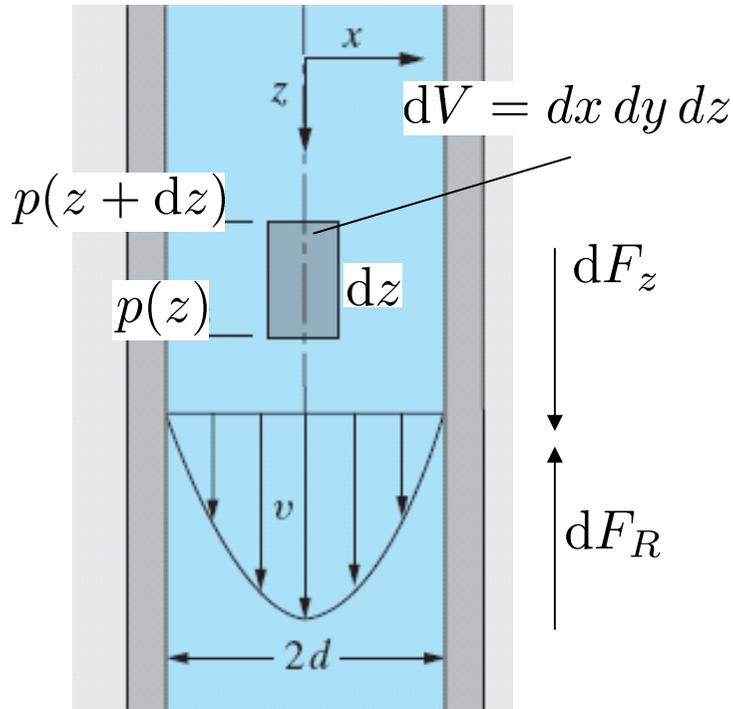
Taylorentwicklung von  $u(x)$  :  $u(x) \approx u(x_0) + \frac{\partial u}{\partial x}(x_0) \cdot dx$

$$\Rightarrow \Delta F_R = \eta \cdot dy \cdot dz \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0) \cdot dx = \eta \cdot dV \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Somit folgt für die Gesamtkraft (durch Reibung in alle Richtungen):

$$F_R = \eta \int_V \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) dV = \eta \int_V \Delta u dV$$

Die Gleichung kann angewendet werden, um das Strömungsprofil zwischen zwei parallelen Platten zu berechnen:



[Gerthsen Physik]

Kraft auf  $dV$ :  $dF_z = -dx \cdot dy \cdot \frac{dp}{dz} \cdot dz$

Reibungskraft:  $dF_R = \eta \cdot dV \cdot \frac{d^2u}{dx^2}$

Im Gleichgewicht ist:

$$\Rightarrow \eta \cdot dx dy dz \cdot \frac{d^2u}{dx^2} = -dx dy dz \frac{dp}{dz}$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{1}{\eta} \frac{dp}{dz}$$

Integration:  $u(x) = -\frac{x^2}{2} \cdot \frac{dp}{dz} + c_1 x + c_2$

Es ist  $\frac{du}{dx}(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$  und  $u(-d) = u(d) = 0 \Rightarrow c_2 = +\frac{d^2}{2} \cdot \frac{dp}{dz}$

also  $u(z) = \frac{1}{2\eta} \cdot \frac{dp}{dz} (d^2 - x^2)$

Ähnlich lässt sich das Strömungsprofil in einem Rohr messen.

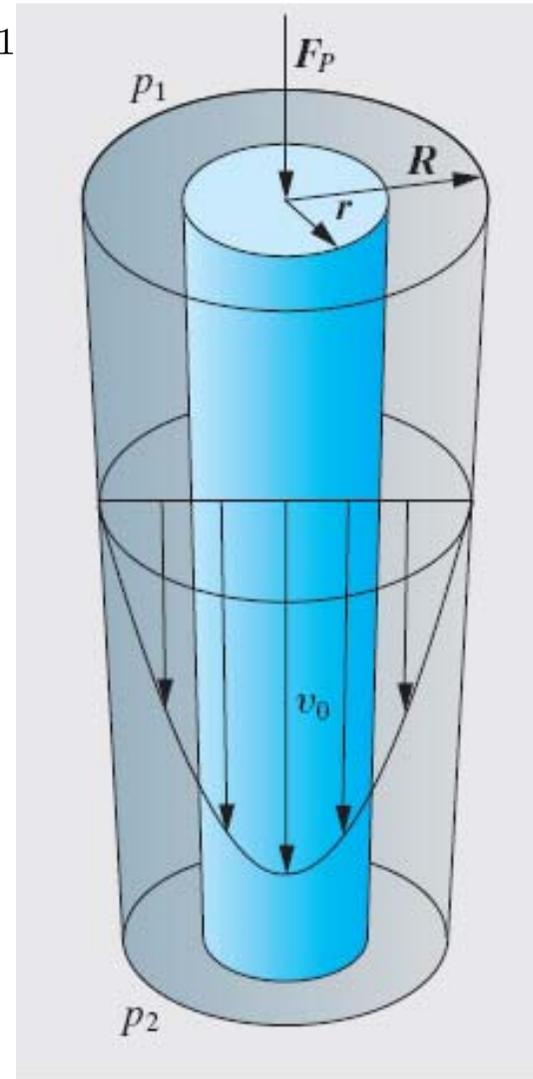
$$\text{Kraft auf } dV: \quad dF_P = \underbrace{\pi \cdot r^2}_A \cdot \Delta p \quad \Delta p = p_2 - p_1$$

$$\text{Reibungskraft: } dF_R = -\eta \cdot 2\pi r \cdot L \cdot \frac{du}{dr}$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dr} = -\frac{r}{2\eta L} \cdot \Delta p$$

$$u(r) = -\frac{r^2}{4\eta L} \cdot \Delta p + c_0$$

$$\text{Mit } u(R) = 0 \Rightarrow u(r) = \frac{R^2 - r^2}{4\eta L} \cdot \Delta p$$



[Gerthsen Physik]

Die Flüssigkeitsmenge, die pro Zeit durch einen Hohlzylinder fließt, ist:

$$\frac{dV}{dt} = 2\pi r \cdot dr \cdot u = \frac{2\pi r \, dr}{4\eta L} (R^2 - r^2) \Delta p$$

Durch Integration folgt

$$V = t \cdot \int_{r=0}^R 2\pi r u \, dr = \frac{\pi \cdot R^4 \cdot t}{8\eta} \cdot \frac{\Delta p}{L}$$

Allgemeiner also für die Flussstärke  $I = \frac{V}{t}$

$$I = \frac{\pi \cdot R^4}{8\eta} \cdot \vec{\nabla} p$$

**Gesetz von Hagen-Poiseuille**

Ein weiteres phänomenologisches Gesetz gibt die Reibungskraft auf umströmte Flüssigkeiten an:

$$F_R = -6\pi\eta r \cdot u$$

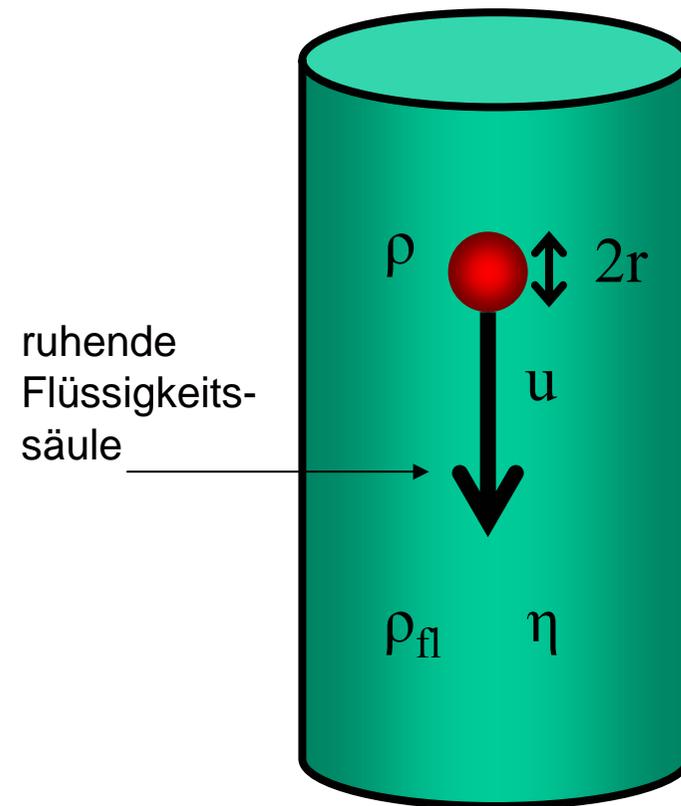
**Gesetz von Stokes**

Für eine in einem viskosen Medium fallende Kugel folgt also

$$(\rho - \rho_{fl}) \cdot \frac{4\pi}{3} r^3 \cdot g = 6\pi\eta r \cdot u$$

$$\Rightarrow u = \frac{2}{9} \cdot g \cdot \frac{r^2}{\eta} (\rho - \rho_{FL})$$

**Anwendung:** Messung von  $\eta$  Kugelviskosimeter

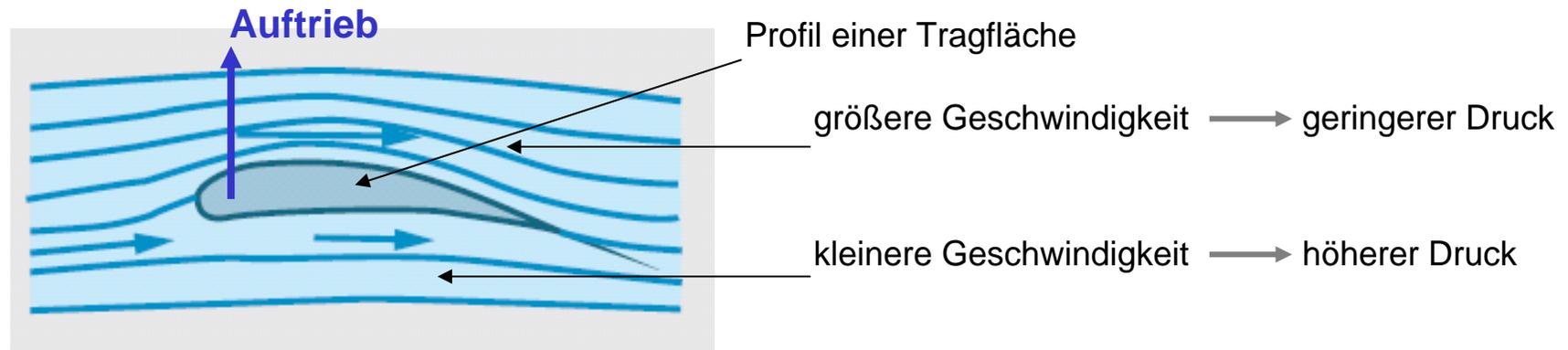


## Viskositäten einiger Flüssigkeiten

Substanz	$\eta$ in $10^{-3}$ Pa s	$\nu$ in $10^{-3}$ m <sup>2</sup> /s
Glas (400 °C)	$\approx 10^{19}$	$\approx 10^{16}$
Eis (-20 °C)	$\approx 10^{17}$	$\approx 10^{14}$
Teer	$\approx 10^{11}$	$\approx 10^8$
Lava (1300 ... 1600 °C)	$10^6 \dots 10^3$	$10^3 \dots 10$
Honig	3000	3
Glycerin (wasserfrei)	1500	1.19
Rizinusöl	990	1.03
Mineralöl (Mittelwert)	400	0.42
Olivenöl	84	0.092
Schwefelsäure	30	0.015
Quecksilber	1.55	0.000114
Ethylalkohol	1.21	0.00151
Wasser	1.002	0.001004
Tetrachlorkohlenstoff	0.96	0.000603
Benzol	0.65	0.00074
Ethyläther	0.24	0.00034
Argon	0.022	0.012
Sauerstoff	0.0204	0.0153
Helium	0.020	0.115
Luft	0.0179	0.0146
Stickstoff	0.0176	0.0152
Kohlendioxyd	0.0147	0.0080
Methan	0.011	0.0165
Wasserstoff	0.0088	0.105

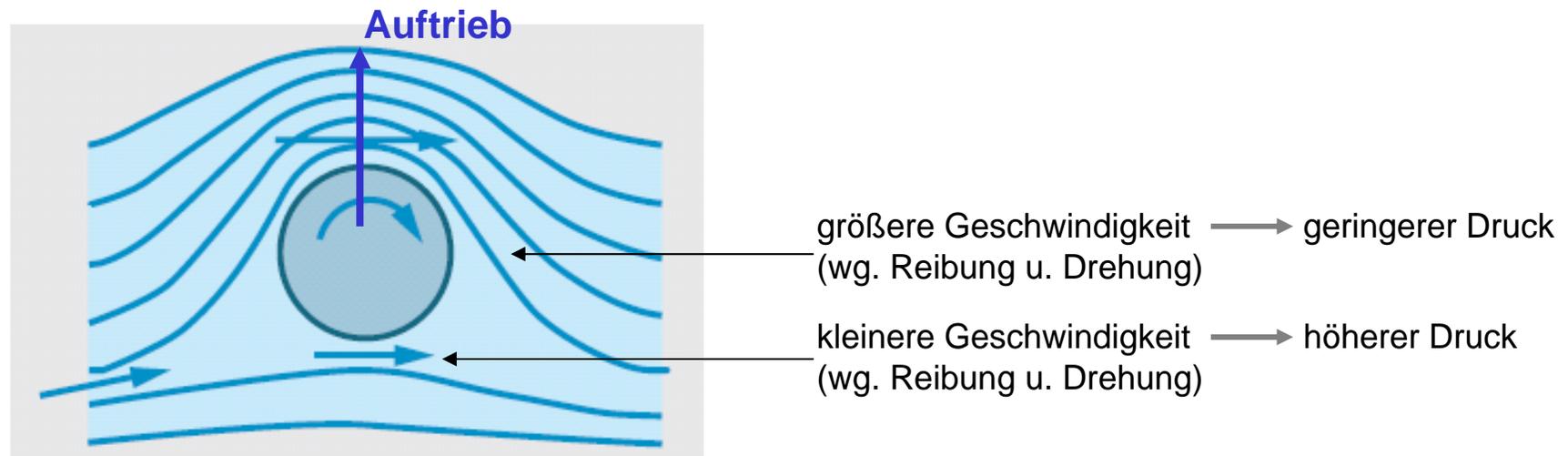
### 7.3.5 Turbulenz und Auftrieb

Die Bernoulli-Gleichung kann zur Erklärung des Auftriebs herangezogen werden.



[Gerthsen Physik]

Ebenso Magnus-Effekt

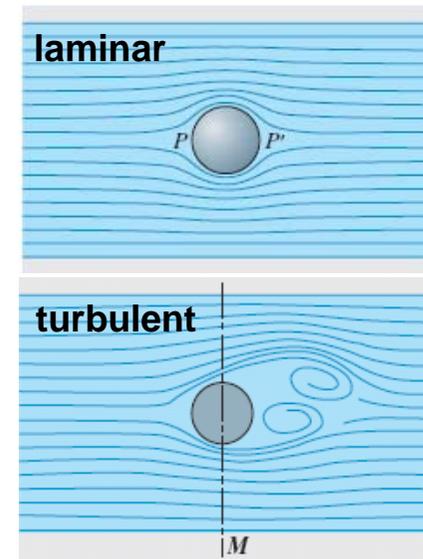


[Gerthsen Physik]

Die obigen Überlegungen galten für laminare Strömungen.

Strömungen in Luft (Aerodynamik) sind i.A. turbulent.

Turbulenzen dominieren den Reibungswiderstand in der Luft.



Es ergibt sich phänomenologisch als Reibungskraft:

$$F_R = c_W \cdot \frac{\rho}{2} \cdot u^2 \cdot A$$

Dichte

Strömungs-  
geschwindigkeit

Fläche

Mit dem  $c_W$  - oder Widerstandsbeiwert.

Der  $c_w$ -Wert hängt insbesondere auch von von der Form des umströmten Gegenstandes ab. Der  $c_w$ -Wert kann z.B. im Windkanal bestimmt werden.

**Typische  $c_w$ -Werte von Querschnittsformen**

Wert	Form
1,33	Halbkugelschale, konkave Seite, Fallschirm
1,1	runde Scheibe, quadratische Platte
0,8	Lkw
0,78	Mensch, stehend
0,7	Motorrad, unverkleidet
0,6	Gleitschirm im Normalflug
0,5	Cabrio offen, Motorrad verkleidet
0,45	Kugel ( $Re < 1,7 \times 10^5$ )
0,18	Kugel ( $Re > 4,1 \times 10^5$ )
0,4	Durchschnittlicher Roadster
0,34	Halbkugelschale, konvexe Seite
0,30	moderner, geschlossener PKW
0,20	optimal gestaltetes Fahrzeug
0,08	Tragflügel beim Flugzeug
0,05	Tropfenform, Stromlinienform
0,03	Pinguin



[Wikipedia]

## 8. Der Starre Körper

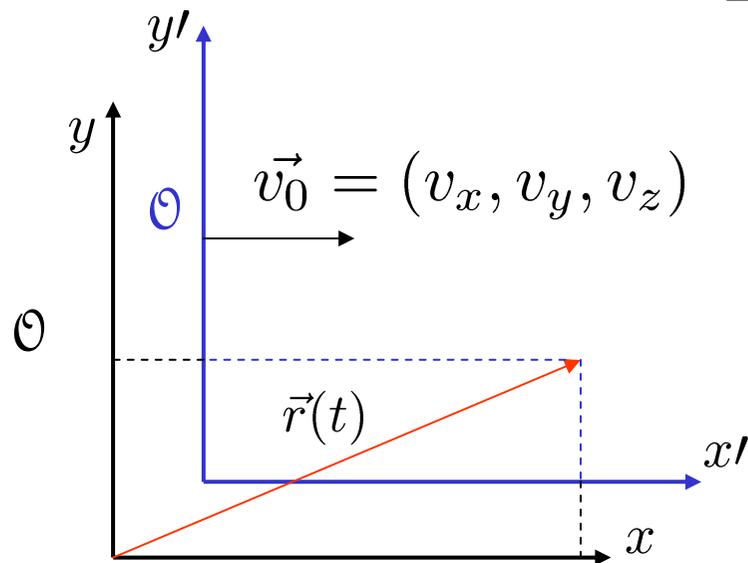
### 8.1 Trägheitskräfte, beschleunigte Bezugssysteme

Zwei mit konstanter Geschwindigkeit zueinander bewegte Bezugssysteme heißen Inertialsysteme.

Inertialsysteme sind für die Beschreibung physikalischer Gesetze äquivalent!

Zwischen Inertialsystemen gelten die folgenden Transformationen:

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= x(t)\hat{e}_x + y(t)\hat{e}_y + z(t)\hat{e}_z = x'(t)\hat{e}_{x'} + y'(t)\hat{e}_{y'} + z'(t)\hat{e}_{z'} \\ &= (x - v_x t)\hat{e}_{x'} + (y - v_y t)\hat{e}_{y'} + (z - v_z t)\hat{e}_{z'}\end{aligned}$$



$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}_0 \cdot t$$

Ähnliches gilt für:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}}(t) &= \dot{x}(t)\hat{e}_x + \dots = \dot{x}'(t)\hat{e}_{x'} + \dots \\ &= (\dot{x} - v_x)\hat{e}_{x'} + \dots\end{aligned}$$

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_0$$

Analog:

$$\vec{a}' = \vec{a}$$

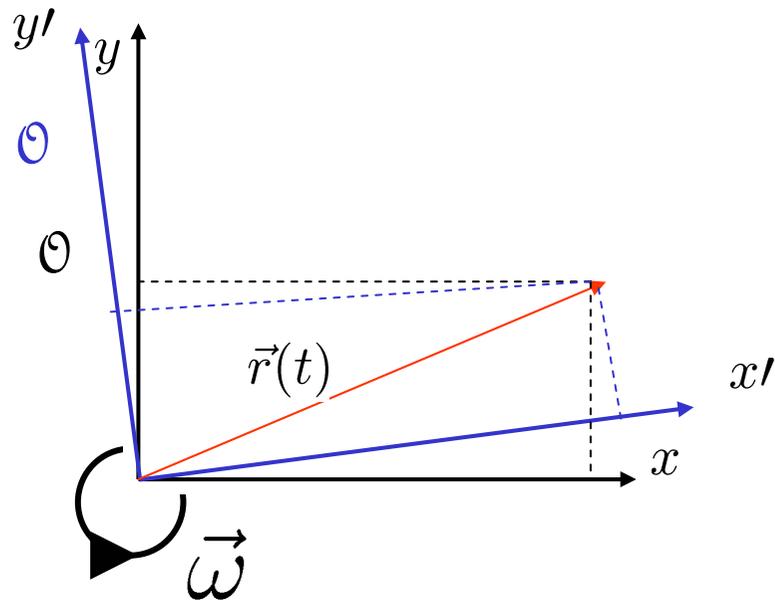
$$\dot{\hat{e}}_x = \dot{\hat{e}}_{x'} = 0$$

↑  
Die Basisvektoren  
ändern ihre Richtung nicht!

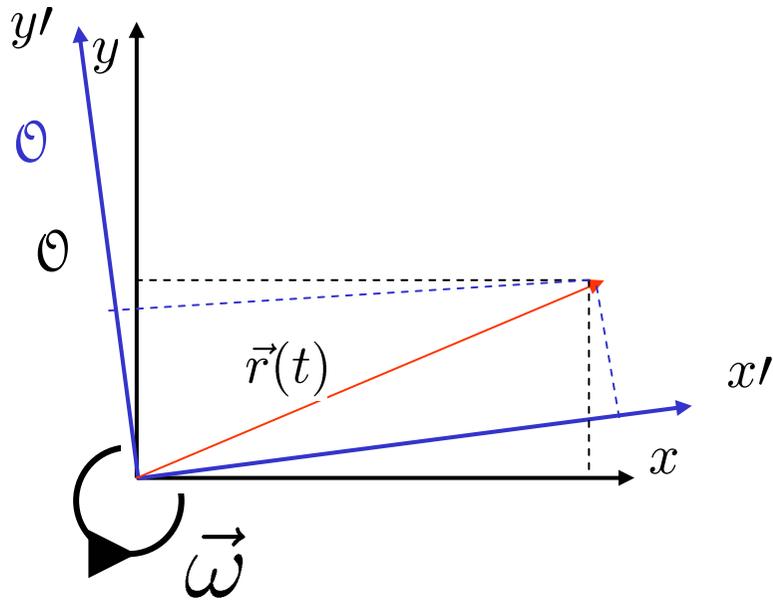
Insgesamt folgen also die Galilei-Transformationen:

$$\begin{aligned}\vec{r}' &= \vec{r} - \vec{v}_0 \cdot t \\ \vec{v}' &= \vec{v} - \vec{v}_0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a}' = \vec{a}; \quad \vec{F}' = \vec{F} \\ t' &= t\end{aligned}$$

Befindet sich ein Beobachter in einem beschleunigten Bezugssystem ( $\dot{\vec{v}}_0 \neq 0$ ), so muss er Scheinkräfte einführen, um seine Beobachtung in Einklang mit den Beobachtungen eines ruhenden Beobachters zu bringen.



$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}}' &= \dot{x}'(t)\hat{e}_{x'} + \dot{y}'(t)\hat{e}_{y'} + \dot{z}'(t)\hat{e}_{z'} + x'(t)\frac{d\hat{e}_{x'}}{dt} + y'(t)\frac{d\hat{e}_{y'}}{dt} + z'(t)\frac{d\hat{e}_{z'}}{dt} \\ &= \vec{v}' + \vec{u} \end{aligned}$$



Mit  $\frac{d\hat{e}_{j'}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{e}_{j'}$ , für  $j = x, y, z$

$$\Rightarrow u = -\vec{\omega} \times x' \hat{e}_{x'} - \vec{\omega} \times y' \hat{e}_{y'} - \vec{\omega} \times z' \hat{e}_{z'} = -\vec{\omega} \times r' = \vec{\omega} \times r$$

Somit:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Für die Beschleunigung folgt dann

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv'}{dt} + \left( \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right) \\ &= \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{v} \\ &= \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times [\vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}] \\ &= \vec{a}' + 2 \vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \\ \text{oder } \vec{a}' &= \vec{a} + 2 \cdot \vec{v}' \times \vec{\omega} + \vec{\omega} \times (\vec{r} \times \vec{\omega})\end{aligned}$$

Mit:

$\vec{a}_C = 2 \cdot \vec{v}' \times \vec{\omega}$	Coriolisbeschleunigung
$\vec{F}_C = m \cdot 2\vec{v}' \times \vec{\omega}$	Corioliskraft
$\vec{a}_{ZF} = 2\vec{\omega} \times (\vec{r} \times \vec{\omega})$	Zentrifugalbeschleunigung
$\vec{F}_{ZF} = 2m\vec{\omega} \times (\vec{r} \times \vec{\omega})$	Zentrifugalkraft

## 8.2 Massenschwerpunkt und Trägheitsmoment

Ein starrer Körper ist ein System von Massenpunkten  $(p_1, \dots, p_N)$  deren relative Lage  $\vec{r}_{ij}$  sich nicht verändert.

**Def.:** Die Dichte eines Volumenelementes  $\Delta V$  eines Körpers ist:

$$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V} \quad [\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

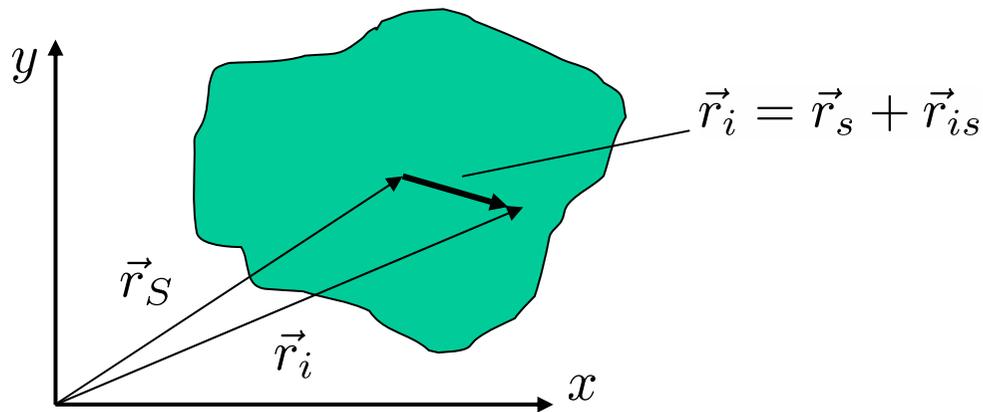
Die Gesamtmasse eines starren Körpers ergibt sich (im Grenzwert  $N \gg 1$ ) zu:

$$M = \int_V \rho(r) \, d\vec{r} = \int_V \rho(\vec{r}) \, dr$$

**Def.:** Der Massenschwerpunkt eines Körpers ist

$$\begin{aligned} r_S &= \frac{1}{M} \int_V r \cdot dm = \frac{1}{M} \int_V r \cdot \rho(r) dV \\ &\stackrel{\rho(r)=\text{const}}{=} \frac{1}{V} \int_V r dV \end{aligned}$$

Ein Körper mit konstanter Dichte heißt homogen.



Differentiation liefert die Geschwindigkeit des Massenpunktes am Ort  $r_i$ :

$$\vec{v}_i = \frac{d}{dt} \vec{r}_s + \frac{d}{dt} \vec{r}_{is}$$

da  $|\vec{r}_{is}|^2 = \text{const}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(\vec{r}_{is} \cdot \vec{r}_{is}) = 2 \cdot \vec{r}_{is} \vec{v}_{is} = 0$$

ist  $\vec{r}_{is} \perp \vec{v}_{is}$

somit kann man  $\vec{v}_{is}$  schreiben als

$$\frac{d}{dt} \vec{r}_{is} = \vec{v}_{is} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{is}$$

Somit:

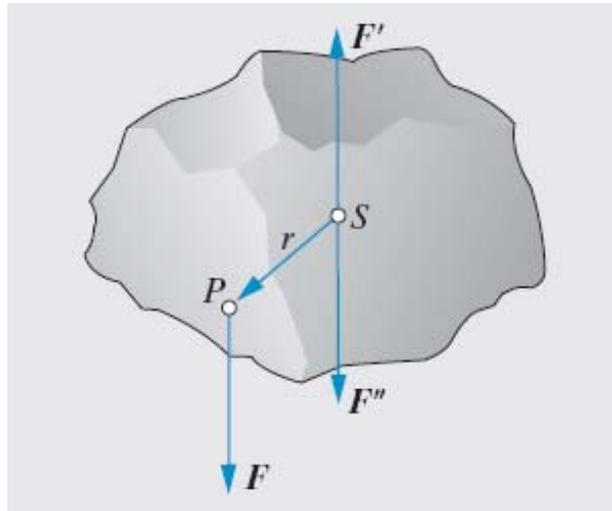
$$\vec{v}_i = \vec{v}_s + (\vec{\omega} \times \vec{r}_{is})$$

„Die Bewegung eines starren Körpers setzt sich zusammen aus einer Translation des Schwerpunktes und einer Rotation um den Schwerpunkt.“

Die Rotation und Translation haben jeweils 3 Freiheitsgrade

**Ein starrer Körper hat 6 Freiheitsgrade der Bewegung!**

Wirkung einer Kraft  $\vec{F}$  auf einen starren Körper:



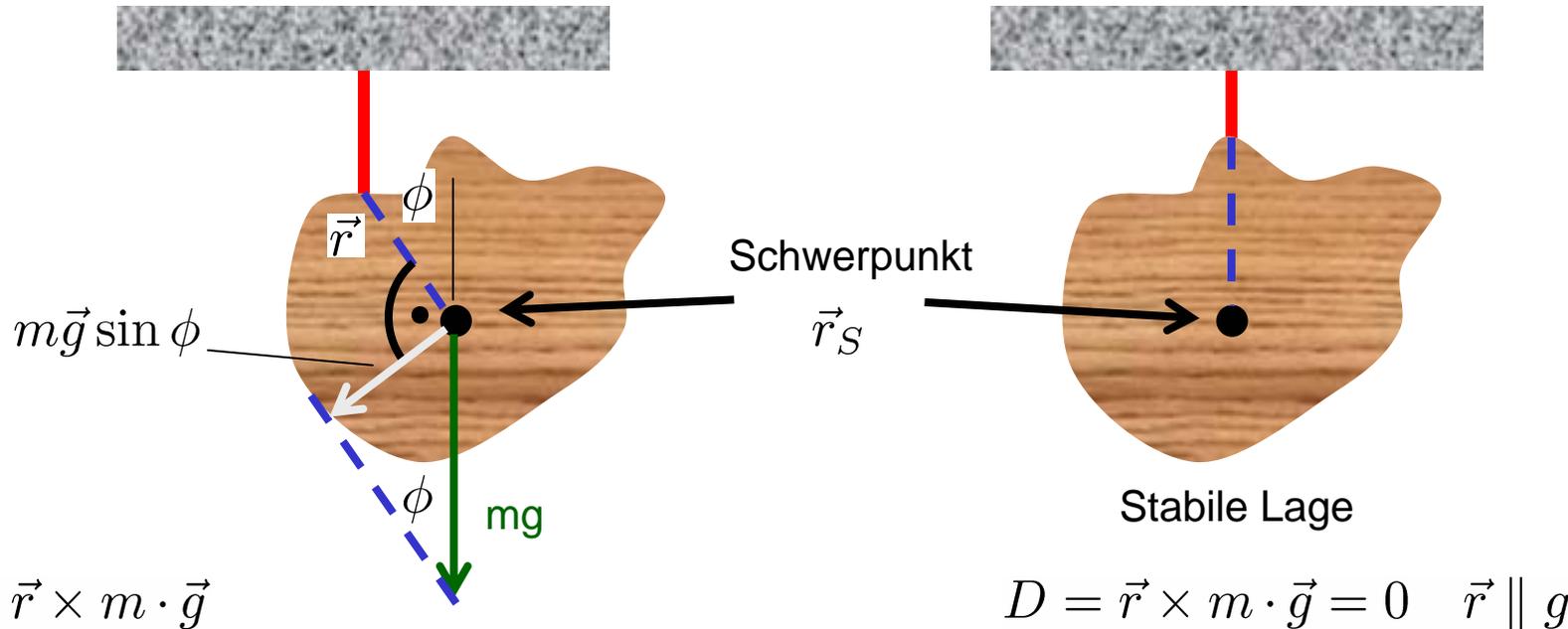
[Gerthsen Physik]

Das Kräftepaar  $\vec{F}$  und  $\vec{F}'$  bewirkt ein Drehmoment  $D = \vec{r} \times \vec{F}$

$\vec{F}''$  bewirkt eine Translation.

Bsp.: Bestimmung des Schwerpunktes:

[T. Lohse]

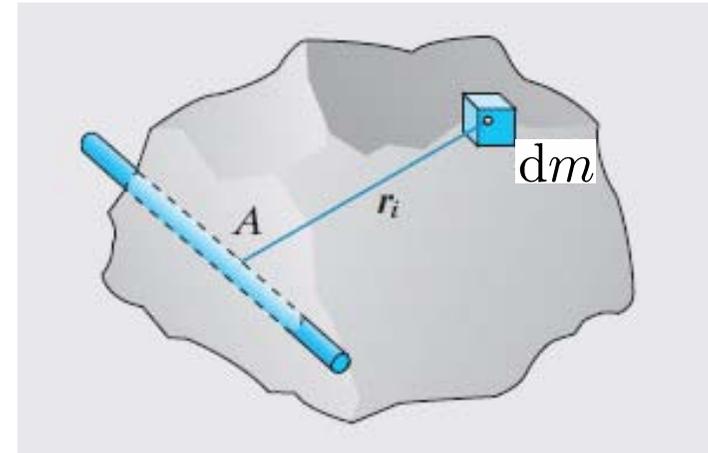


In der Ruhelage verläuft eine von einem beliebigen Aufhängungspunkt nach unten verlängerte Line durch den Schwerpunkt.

Aufhängung an 2 Punkten  $\longrightarrow$  Bestimmung des Schwerpunktes

Die kinetische Energie eines Massenelementes  $dm$  eines um die Achse A rotierenden Körpers ist

$$dE_K = \frac{1}{2} \cdot dm \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot dm \cdot r_i^2 \cdot \omega^2$$



[Gerthsen Physik]

Somit ergibt sich für die gesamte Rotationsenergie

$$E_R = \int \frac{1}{2} |\vec{r}_\perp|^2 \omega^2 dm = \frac{1}{2} \omega^2 \int_V |\vec{r}_\perp|^2 dm = \frac{1}{2} \omega^2 \int_V |\vec{r}_\perp|^2 \rho dV$$

**Def.:** Trägheitsmoment  $I = \int_V r_\perp^2 dm = \int_V r_\perp^2 \rho dV$   $[I] = kg \cdot m^2$

Somit ist die Rotationsenergie:

$$E_{\text{Rot}} = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Der Drehimpuls  $L$  bzgl. der Rotationsachse ist:

$$L = \int \vec{r}_{\perp} \times dm \cdot \vec{v} = \int r_{\perp}^2 \omega dm = I \cdot \omega$$

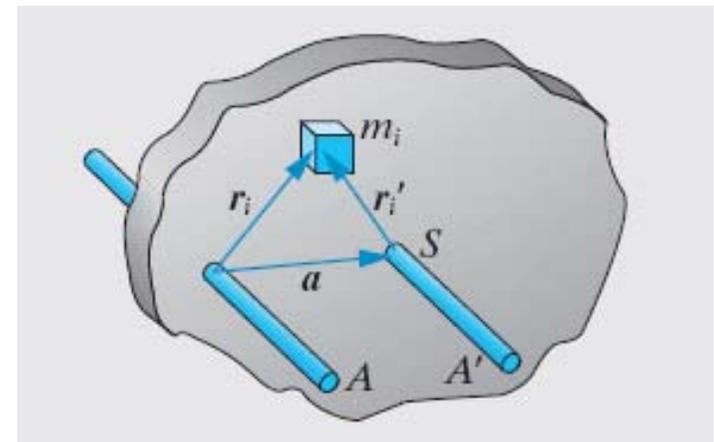
$$E_{\text{Rot}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{L^2}{I}$$

Das Trägheitsmoment  $I$  um eine beliebige Achse  $A$  lässt sich aus dem Trägheitsmoment  $I_S$  bzgl. einer zu  $A$  parallelen Achse  $A'$  durch den Schwerpunkt berechnen.

$$\begin{aligned} I &= \int_V |\vec{r}_{\perp}|^2 dm = \int_V |\vec{r}' + \vec{a}|^2 dm \\ &= \int_V |\vec{r}'|^2 dm + 2\vec{a} \int_V \vec{r}' dm + a^2 \int_V dm \\ &= I_s + a^2 \cdot M \end{aligned}$$

= 0 da bezogen auf Schwerpunkt

**Steinerscher Satz!**



[Gerthsen Physik]

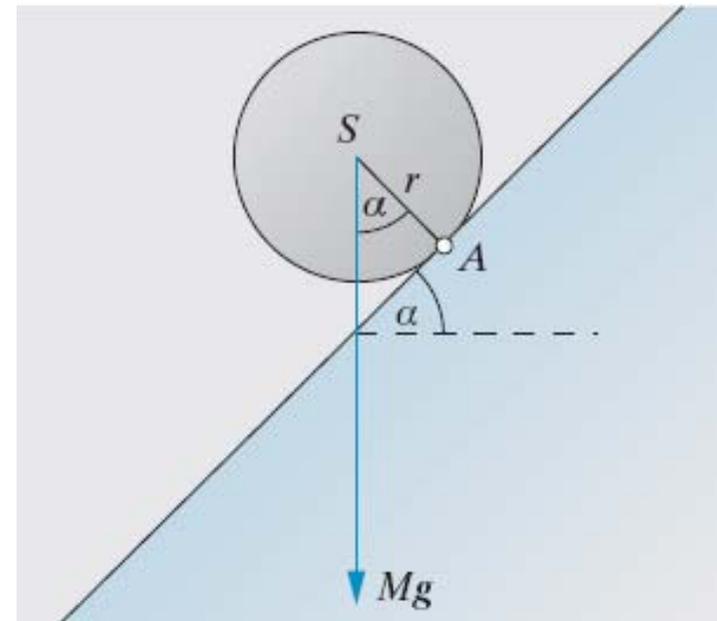
## Starrer Körper auf schiefer Ebene

$$M \cdot g \cdot r \cdot \sin \alpha = \text{Drehmoment um } \vec{A}$$

$$= \dot{L} = (I_s + Mr^2) \cdot \dot{\omega}$$

Somit folgt für die beschleunigte Schwerpunktsbewegung:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = r \cdot \dot{\omega} = \frac{g \cdot \sin \alpha}{1 + \frac{I_s}{Mr^2}}$$



[Gerthsen Physik]

Die Translationsbeschleunigung ist im Vergleich zu einem Massenpunkt derselben Masse reduziert um:

$$b = 1 + \frac{I_s}{Mr^2}$$

Es ist:

$$\text{Vollzylinder } b = 3/2 \quad g' = 2/3 g \cdot \sin \alpha$$

$$\text{Hohlzylinder } b = 2 \quad g' = 1/2 g \cdot \sin \alpha$$

$$\text{Kugel } b = 7/5 \quad g' = 5/7 g \cdot \sin \alpha$$

Die Kugel rollt am schnellsten!

Bsp.1: Trägheitsmoment eines Zylinders bzgl. z-Achse:

$$\begin{aligned} I &= \int_V r^2 \, dr = \int r^2 h \cdot \rho \cdot r \, d\varphi \\ &= \int_0^R h \cdot \rho \cdot 2\pi \cdot r^3 \, dr = \frac{\pi}{2} h \cdot \rho \cdot R^4 = \boxed{\frac{M}{2} R^2} \end{aligned}$$

Bsp.2: Trägheitsmoment eines sehr dünnen Hohlzylinders bzgl. z-Achse:

$$\begin{aligned} I &= \int_{R-d}^R h \cdot \rho \cdot 2\pi r^3 \, dr = \frac{\pi}{2} h \cdot \rho [R^4 - (R-d)^4] \\ d \ll R &\approx \frac{\pi}{2} h \cdot \rho \left[ R^4 - R^4 \left( 1 - 4 \frac{d}{R} \right) \right] \\ &= 2\pi h \cdot \rho \cdot R^3 \cdot d \\ &= \boxed{M \cdot R^2} \end{aligned}$$

Bsp.3: Trägheitsmoment einer Kugel bzgl. z-Achse:

$$\begin{aligned} I &= \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{\pi} r_{\perp}^2 \cdot \rho \cdot r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi \\ &= \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{\pi} (r \sin \theta)^2 \cdot \rho \cdot r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi \\ &= \frac{1}{5} \rho R^5 2\pi \int_{\theta=0}^{\pi} (\sin \theta)^3 \, d\theta = \boxed{\frac{2}{5} M R^2} \end{aligned}$$

Bewegungsgleichung der Rotation eines starren Körpers um eine raumfeste Achse A  
(ein Freiheitsgrad  $\varphi$  der Bewegung!)

$$D = I \cdot \frac{d\omega}{dt} = I \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \varphi(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{D}{I} \cdot t^2 + \omega_0 \cdot t + \varphi_0$$

### Translation

Ortskoordinate	$r$
Masse	$m$
Impuls	$p = m \cdot v$
Kraft	$\vec{F} = dp/dt$

Kinet. Energie  $E_K = \frac{m}{2} v^2$

Bewegungsgleichung:

$$x = \frac{1}{2} \frac{a}{m} t^2 + v_0 t + x_0$$

### Rotation

Winkelkoordinate	$\varphi$
Trägheitsmoment	$I$
Drehimpuls	$L = I \cdot \omega$
Drehmoment	$D = dL/dt$

Rotationsenergie  $E_R = \frac{1}{2} I \omega^2$

Bewegungsgleichung:

$$\varphi = \frac{1}{2} \cdot \frac{D}{I} t^2 + \omega_0 t + \varphi_0$$

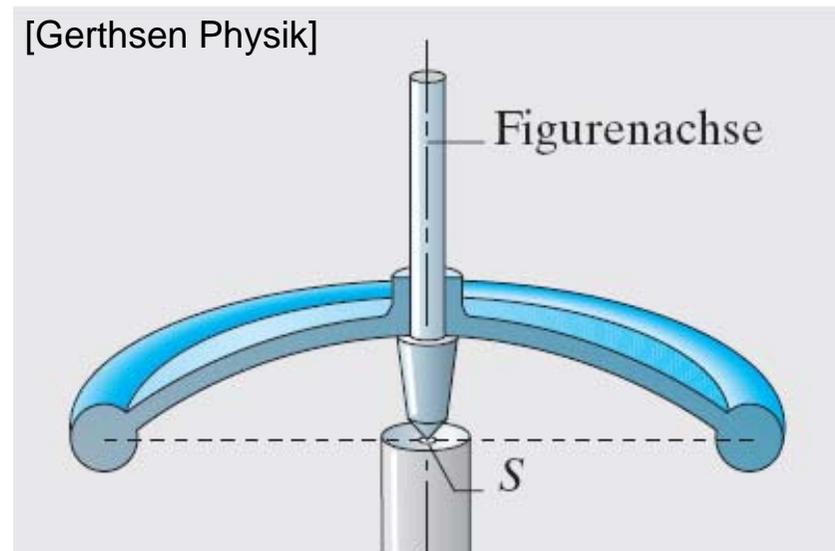
## 8.2 Dynamik des Starren Körpers, der Kreisel

Ist die Bewegung eines Körpers in einem Punkt festgehalten, so spricht man von einem Kreisel:

symmetrischer Kreisel	↔	zwei Hauptträgheitsmomente sind gleich
Kugelkreisel	↔	alle Hauptträgheitsmomente sind gleich

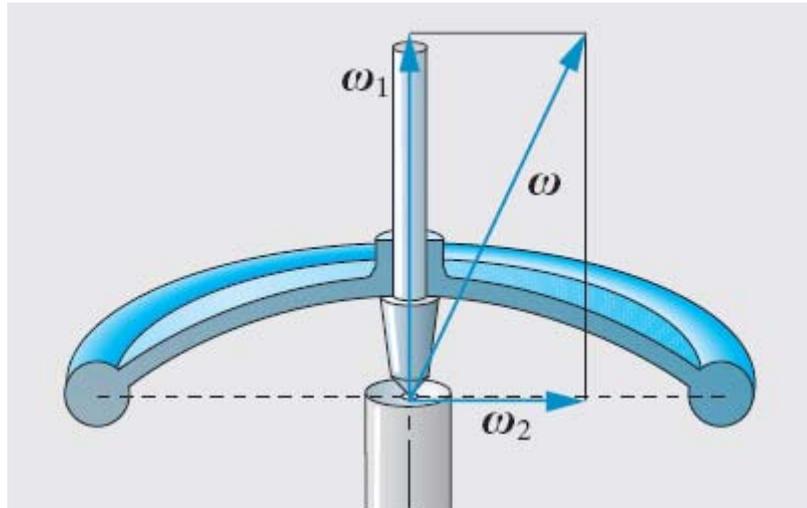
Wichtige Achsen:

- Drehimpulsachse  $\vec{L}$
- momentane Drehachse  $\vec{\omega}$
- Figurenachse  $\vec{f}$

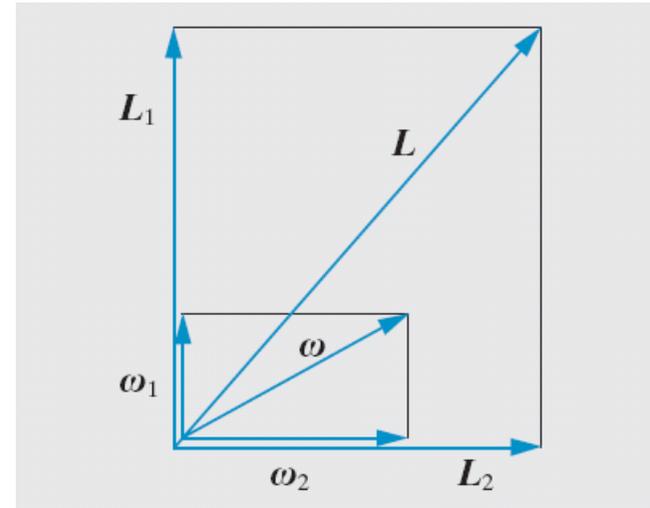


Im abgebildeten momentenfreien Kreisel fallen Drehimpuls-, momentane Dreh-, und Figurenachse zusammen.

## Nutationsbewegung (kräftefreie Bewegung)



[Gerthsen Physik]



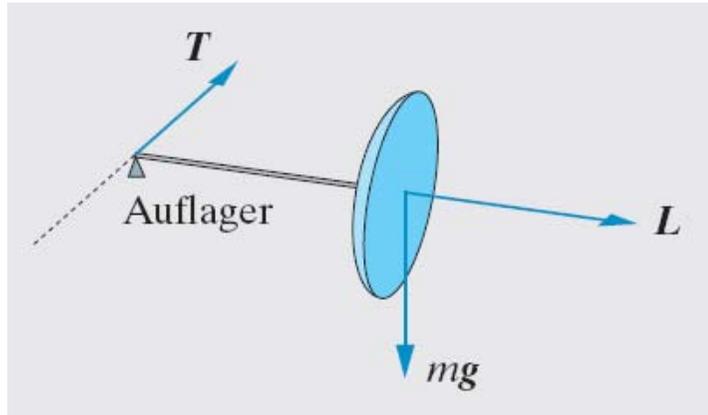
[Gerthsen Physik]

Bei der Nutation fallen die drei Achsen nicht zusammen.

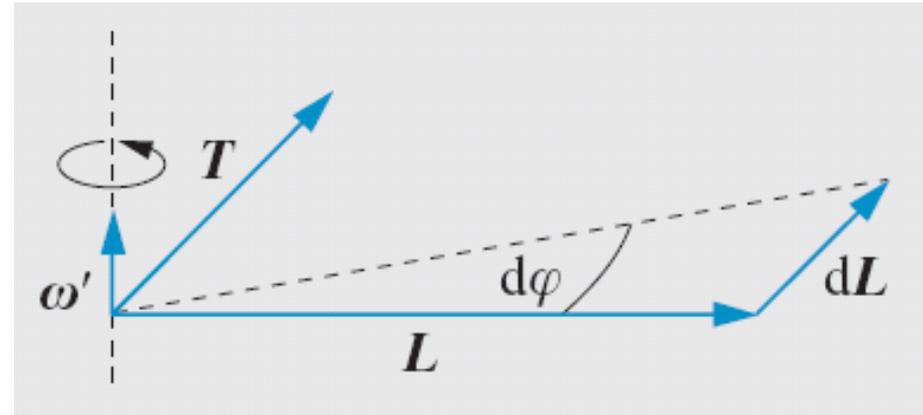
Eine Drehung um die Figurenachse mit  $\omega_1$  addiert sich mit einer Nutation des gesamten Kreisels mit  $\omega_2$  zur konstanten Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ .

Der Drehimpuls  $L$  ist ebenfalls konstant, aber nicht parallel zu  $\omega$ , da das Trägheitsmoment  $I$  ein Tensor ist.

## Präzession (Bewegung unter Einwirkung von Kräften)



[Gerthsen Physik]



[Gerthsen Physik]

Wirkt eine Kraft (und damit ggfs. ein Drehmoment) auf einen Kreisel, so rotiert der Kreisel (d.h. der Kreisel präzediert) zusätzlich mit der Präzessionsfrequenz  $\omega_p$  gemäß:

$$\omega_p = \frac{d\phi}{dt} = \frac{D}{L} = \frac{D}{I\omega}$$

Bildet die Kreiselachse einen Winkel  $\alpha$  mit der Vertikalen (nicht speziell  $90^\circ$  wie im obigen Bild, so ist:

$$D = mgr \sin \alpha \quad \text{und} \quad dL = |L| \sin \alpha d\phi \quad \text{oder (Teilen durch } dt): \quad D = |L| \sin \alpha \omega_p$$

$$\text{Somit: } \omega_p = \frac{mgr}{I\omega}$$

Die Präzessionsfrequenz ist unabhängig von  $\alpha$ !

