

## II. Grundlagen der Mechanik

### 1. Bewegung eines Massenpunktes

#### 1.1. Geschwindigkeit und Bewegung

Die Mechanik beschreibt, wie sich massive Körper unter dem Einfluss von Kräften in Raum und Zeit bewegen.

Eine Idealisierung ist die Bewegung von punktförmigen, massebehafteten Objekten.

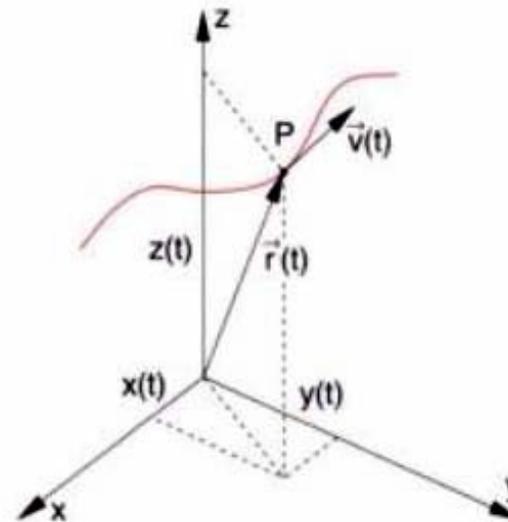
Bsp.: Planetenbewegung, da  $r_{\text{Planet}} \ll r_{\text{Bahn}}$  (Idealisierung wird später gerechtfertigt.)

Ein Massepunkt bewegt sich auf einer Bahnkurve. In der klass. Mechanik kann der Ort  $\vec{r}$  zum Zeitpunkt  $t$  genau angegeben werden.

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

Bahnkurve

$\vec{r}$  ist eine vektorielle Größe



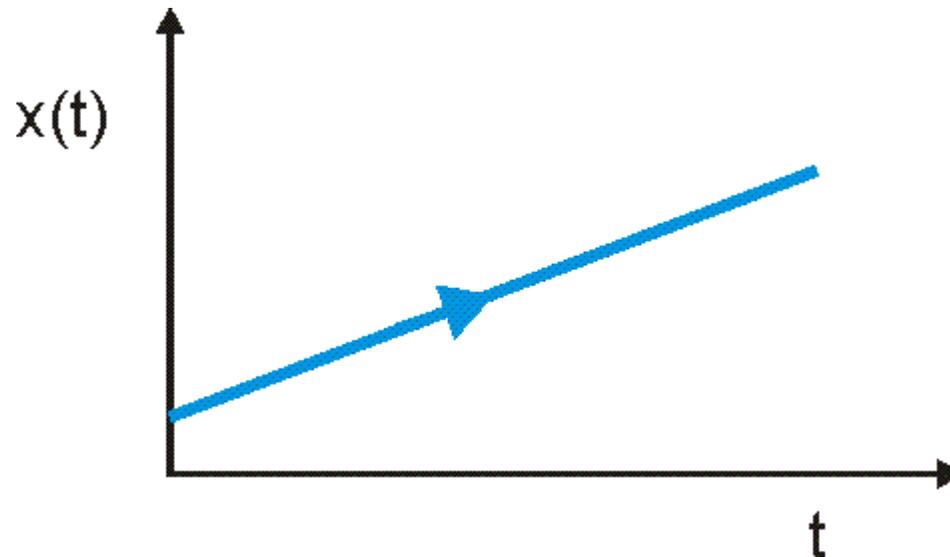
[Demtröder]

Beispiele:

1) Bewegung bei konstanter Geschwindigkeit (Definition folgt) in einer Dimension

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} v \cdot t = x \\ 0 = y \\ 0 = z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot v \cdot t = \hat{x} \cdot v \cdot t$$

Diagramm:

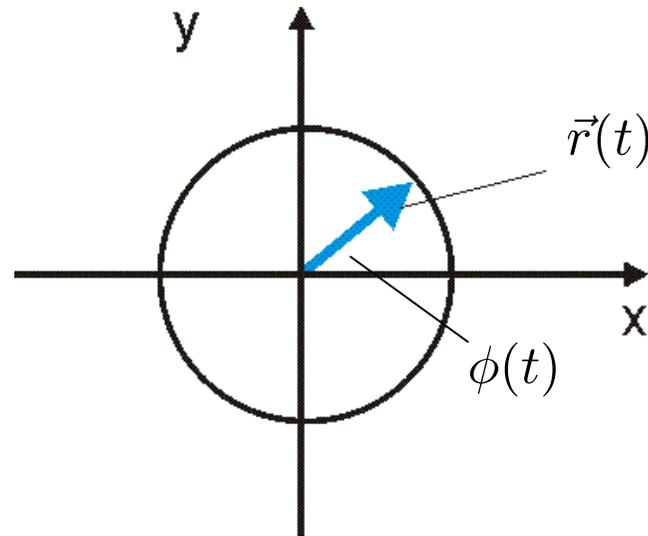


## 2) Kreisbewegung in 2 Dimensionen

$$x = R \cdot \cos(\omega t) \quad y = R \cdot \sin(\omega t) \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} R \cdot \cos(\omega t) \\ R \cdot \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

mit konstantem  $R$  und  $\omega = \frac{d\phi}{dt}$

Diagramm:



Offensichtlich ist:

$$x^2 + y^2 = R^2 (\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)) = R^2 = \text{const.}$$

Bewegungen in den 3 Raumrichtungen lassen sich beliebig überlagern (vektorielle Addition).

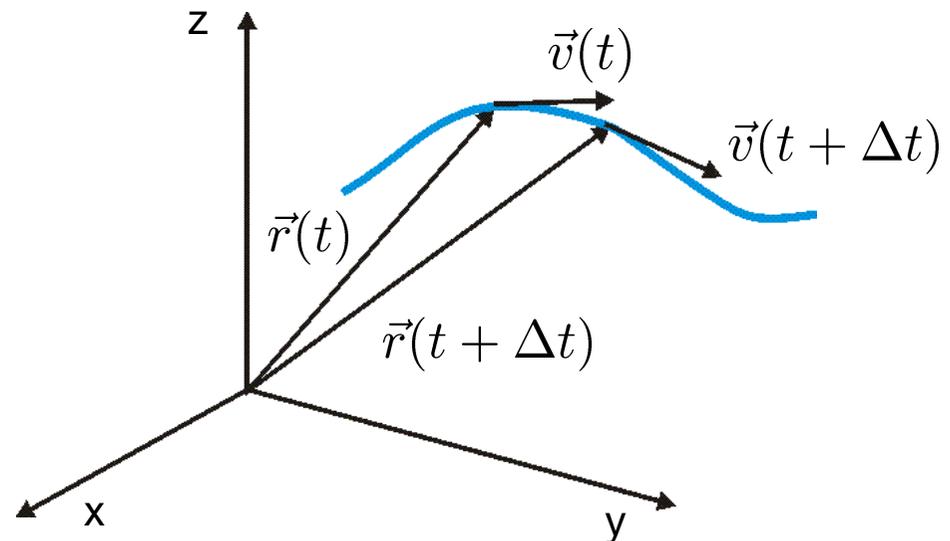
Ein Massepunkt lege in einer Zeit  $\Delta t$  die Wegstrecke  $\Delta r$  zurück.

**Def.:**  $\bar{v} = \frac{\Delta r}{\Delta t}$  ist die mittlere Geschwindigkeit

Man bildet nun den Grenzwert  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r(t + \Delta t) - r(t)}{\Delta t} = \frac{dr}{dt} = \dot{r}$

**Def.:** Die (Momentan-) Geschwindigkeit eines Massepunktes ist die zeitliche Ableitung der Weg-Zeit-Funktion  $r = r(t)$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} \quad [v] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



Die Geschwindigkeit  $v(t)$  ist die Tangente der Bahnkurve am Punkt  $r(t)$ . Ihr Betrag  $|\vec{v}(t)| = \sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}$  gibt die Steigung der Bahnkurve an.

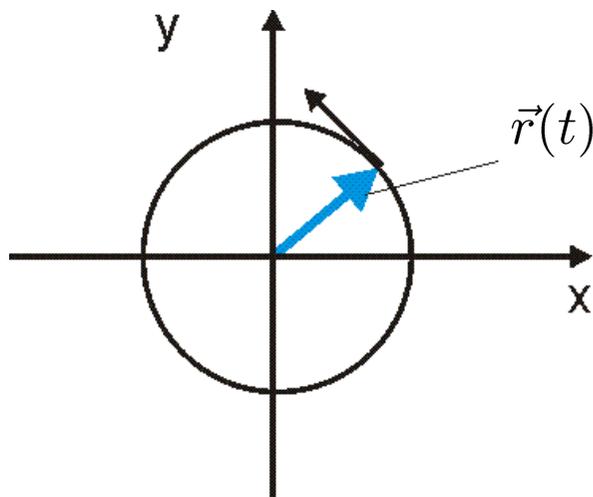
Bsp. 1: Konstante Geschwindigkeit in einer Dimension

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} v \cdot t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v}(t) = \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \text{const.}$$

„gleichförmig geradlinige Bewegung“

Bsp. 2: Kreisbewegung

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R \cdot \cos(\omega t) \\ R \cdot \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v}(t) = \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} -\omega R \cdot \sin(\omega t) \\ \omega R \cdot \cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$



Der Betrag der Geschwindigkeit ist konstant, aber ihre Richtung ändert sich ständig.

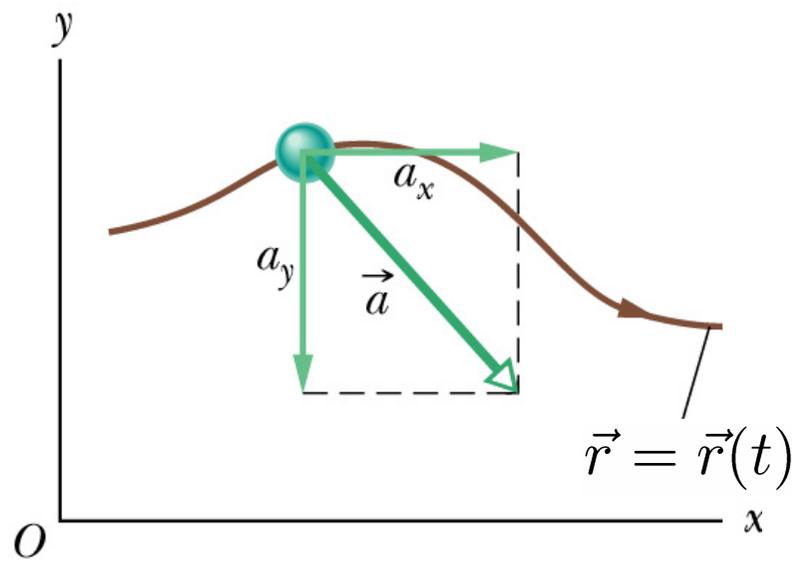
**Def.:** Die Beschleunigung eines Massepunktes ist die zeitliche Ableitung der Geschwindigkeits-Orts-Funktion  $\vec{v} = \dot{\vec{r}}(t)$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \dot{\vec{v}}(t) \quad [a] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Die Beschleunigung ist die zweite zeitliche Ableitung der Weg-Zeit-Funktion:

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}(t)$$

Interpretation: Die Beschleunigung gibt die Krümmung der Weg-Zeit-Funktion  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  an.



[Halliday]

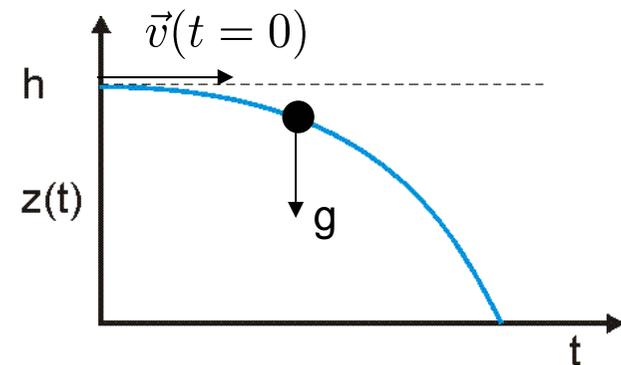
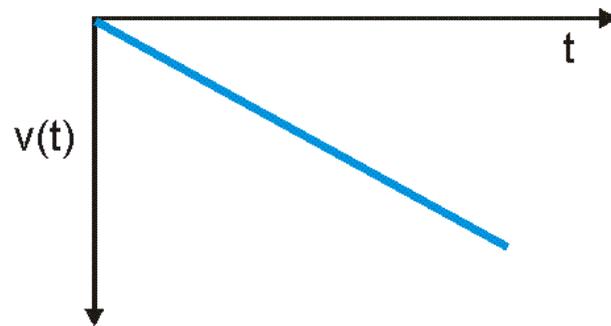
## 1.2. Einfache Bewegungsabläufe

Die Bahnkurve  $\vec{r}(t)$  kann durch Integration von  $\vec{v}(t)$  bzw.  $\vec{a}(t)$  gewonnen werden.

$$\vec{v}(t) = \int_{t_0}^t \vec{a}(t') dt'$$

$$\vec{r}(t) = \int_{t_0}^t \vec{v}(t') dt' = \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} \vec{a}(t'') dt''$$

**Der freie Fall:**



$$a = \begin{pmatrix} a_x = 0 \\ a_y = 0 \\ a_z = -g \end{pmatrix} \quad \text{mit } g = -9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

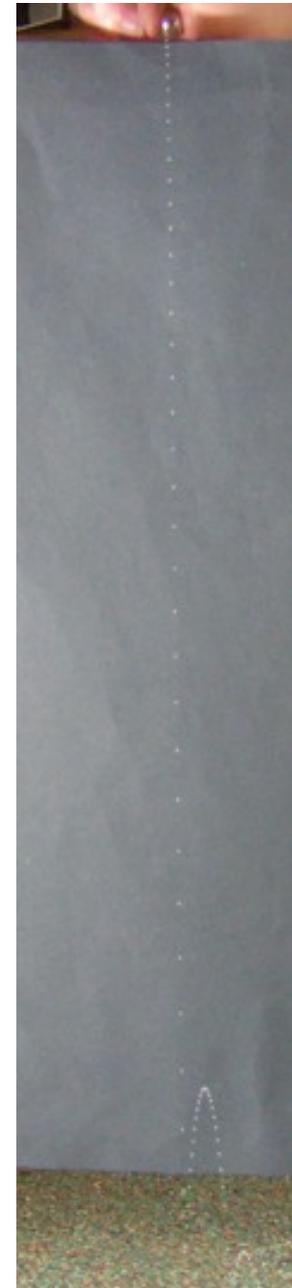
Als Anfangsbedingung sei  $\vec{v}(t=0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix}$  und  $\vec{r}(t=0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix}$

Eine zweifache Integration unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen liefert die Geschwindigkeits-Zeit-Kurve und die Bahnkurve:

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \cdot t \end{pmatrix} \\ \vec{r}(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}gt^2 + h \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Fallzeit und die Endgeschwindigkeit für eine Anfangshöhe  $h$  sind somit

$$\begin{aligned} t_F &= \sqrt{\frac{2h}{g}} \\ v_F &= \sqrt{2hg} \end{aligned}$$



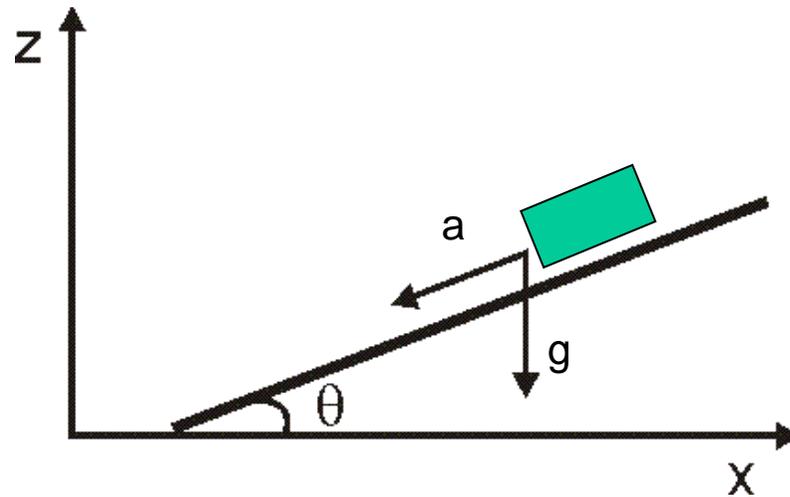
## Die schiefe Ebene:

Der Massepunkt bewegt sich entlang der schiefen Ebene gemäß der Beschleunigung  $|a| = g \cdot \sin \theta$

Die „Fallzeit“ für eine Höhe  $z(t = 0) = h$

$$z(t) = h - \frac{1}{2}(g \cdot \sin \theta)t^2$$
$$\rightarrow t_{FS} = \sqrt{\frac{2h}{g \cdot \sin \theta}}$$

Galilei erfand die schiefe Ebene, um bei Fallversuchen für länger Zeit (und damit genauer) messen zu können!



## Wurfparabel:

Den allgemeinen Fall eines Wurfes im Schwerfeld kann man in 2 Dimensionen beschreiben.

Anfangsbedingung:

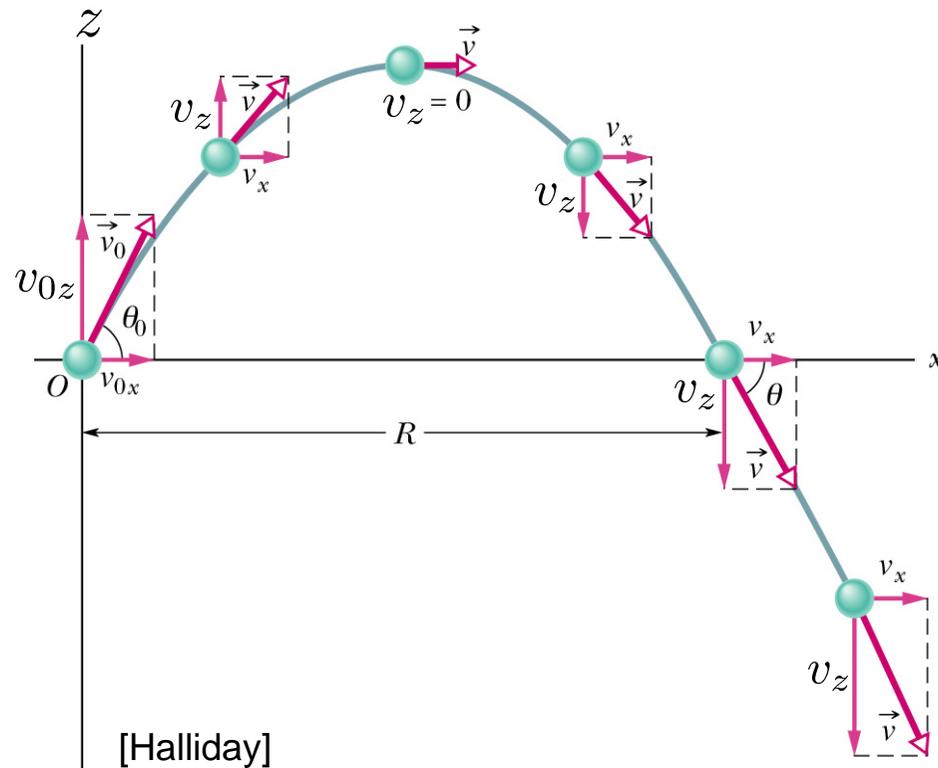
$$\vec{r}(t = 0) = \vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix} \quad \vec{v}(t = 0) = \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_{x0} \\ 0 \\ v_{z0} \end{pmatrix}$$

Es folgt nach Integration

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} v_{x0} \cdot t \\ 0 \\ h - \frac{1}{2}gt^2 + v_{z0} \cdot t \end{pmatrix}$$

Umformen liefert die Wurfparabel:

$$z(x) = -\frac{1}{2} \frac{g}{v_{x0}^2} \cdot x^2 + \frac{v_{z0}}{v_{x0}} \cdot x + h$$

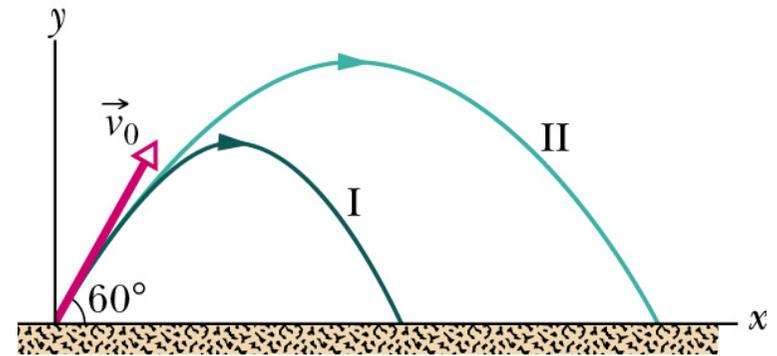


Für die Wurfweite folgt:

$$\begin{aligned}x_w &= \frac{v_{x0} \cdot v_{z0}}{g} \pm \sqrt{\left(\frac{v_{x0} \cdot v_{z0}}{g}\right)^2 + \frac{2v_{x0}^2}{g}h} \\ &= \frac{v_0^2}{2g} \cdot \sin(2\phi) \left[ 1 + \left(1 + \frac{2gh}{v_0^2 \sin^2 \phi}\right)^{1/2} \right]\end{aligned}$$

Für die größte Wurfweite folgt aus  $\frac{dx_w}{d\phi} = 0$

$$\phi_{\text{opt}} = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2 + \frac{2gh}{v_0^2}}}\right)$$



[Halliday]

Für  $h=0$  ist dies  $\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$  oder  $\phi = 45^\circ$

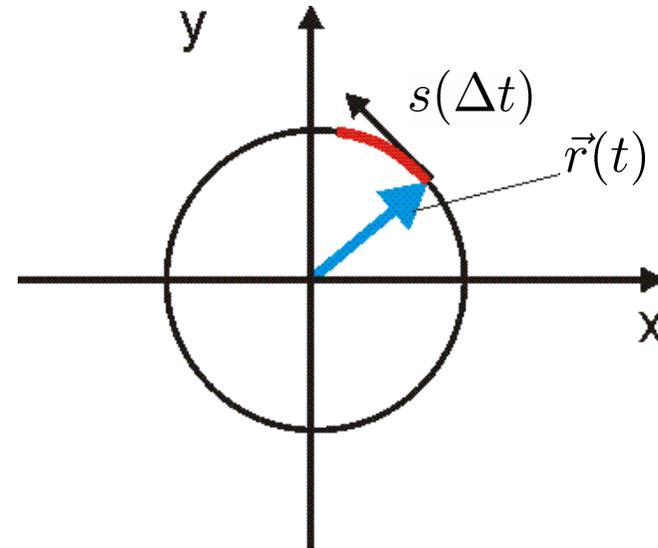
### 1.3. Die gleichförmige Kreisbewegung

Bei einer gleichförmigen Kreisbewegung ändert sich nur die Richtung nicht der Betrag der Geschwindigkeit!

Die zur Zeit  $\Delta t$  zurückgelegte Strecke ist ein Kreissegment  $s(\Delta t)$ .

Somit ist:

$$v = \frac{ds}{dt} = R \cdot \frac{d\phi}{dt} = R \cdot \omega$$



<b>Def.:</b> $\omega = \frac{d\phi}{dt} = \text{Winkelgeschwindigkeit}$ $[\omega] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
--

Die Geschwindigkeit ist immer tangential und kann somit als  $\vec{v} = R \cdot \omega \cdot \hat{e}_t$  mit dem Einheitsvektor  $\hat{e}_t$  geschrieben werden.

Also ist:  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (|\vec{v}| \cdot \hat{e}_t) = |\vec{v}| \cdot \frac{d}{dt}(\hat{e}_t) = R \cdot \omega \cdot \frac{d}{dt}(\hat{e}_t)$

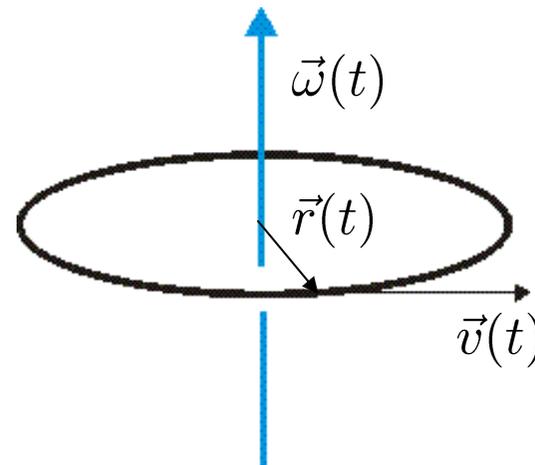
Da  $\vec{a} \perp \vec{v}$  ändern sich beide mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit:

$$a = v \cdot \frac{d}{dt}(\hat{e}_t) = -R \cdot \omega^2 \cdot \hat{r}$$

**Def.:**  $a = -R\omega^2\hat{r}$       $[a] = \text{m} \left( \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2$  Zentripetalbeschleunigung

Man kann die Winkelgeschwindigkeit allgemeiner als einen Vektor schreiben, der senkrecht auf der Bewegungsebene steht.

$$\vec{v} = (\vec{\omega} \times \vec{r}) \text{ oder } \vec{\omega} = \vec{r} \times \vec{v} / |\vec{r}|^2$$



## 1.4. Die einfache Schwingung

### Das Fadenpendel

Bei einer Vernachlässigung des Gewichts des Fadens kann man die Kugel als Massenpunkt an einem masselosen Faden idealisieren: mathematisches Pendel

Auf die Kugel mit der Masse  $m$  im Schwerfeld wirkt die tangentielle Beschleunigung:  $-g \sin \phi$

Es ergibt sich somit für die Bewegungsgleichung

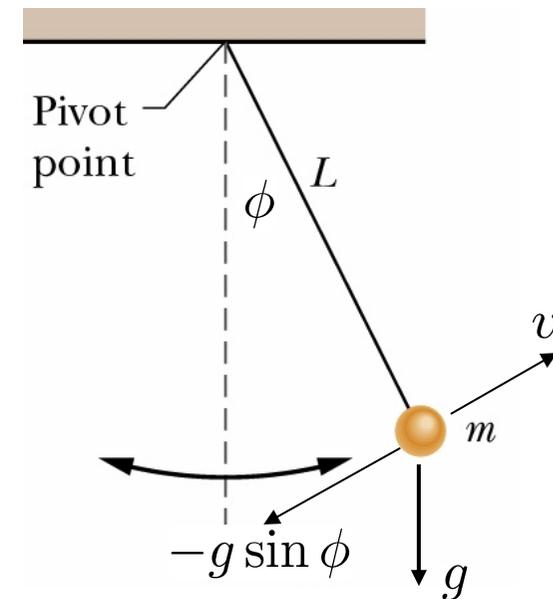
$$a(t) = -g \sin \phi = \dot{v}(t) = \frac{d}{dt} (L\dot{\phi}) = L\ddot{\phi} \quad \text{oder}$$

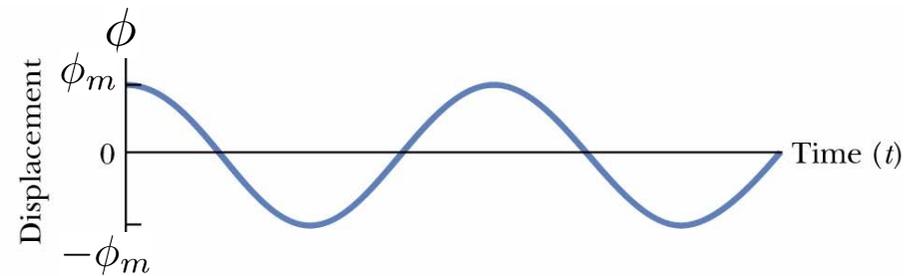
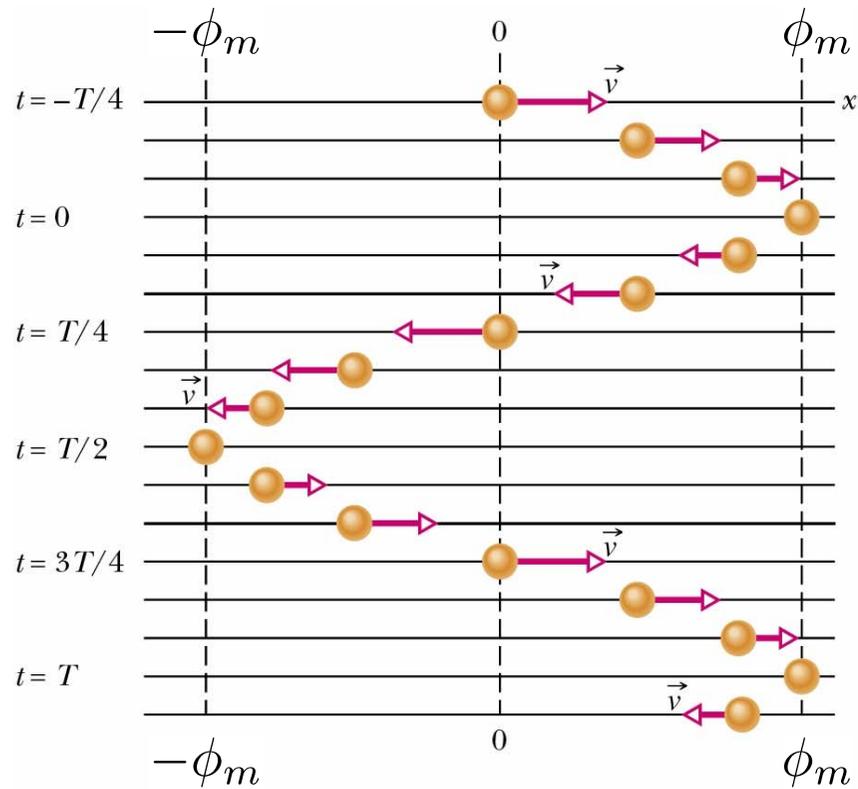
Für kleine Winkel mit  $\sin \phi \approx \phi$  folgt:

$$\ddot{\phi} + (g/L) \phi = 0$$

Es ist leicht zu sehen, dass sich mit der Anfangsbedingung  $\phi(0) = 0$  ergibt:

$$\phi(t) = A \sin \left( \sqrt{g/L} t \right)$$





$$\phi(t) = A \sin\left(\sqrt{g/L}t\right)$$

Das Pendel führt eine periodische Bewegung durch, mit der Schwingungsdauer

$$T = 2\pi\sqrt{L/g}$$

$T$  kann zur Bestimmung von  $g$  genutzt werden:

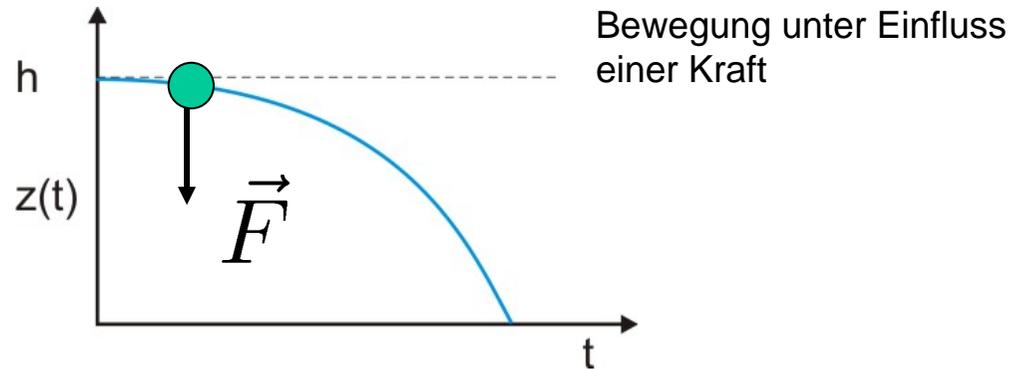
$$g = L/(T/2\pi)^2$$

## 2. Die Newtonschen Axiome

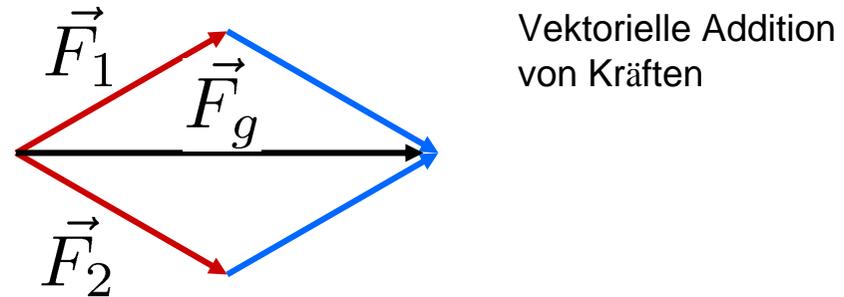
### 2.1. Die Axiome

**Erfahrungstatsachen:**

**Kräfte** sind die Ursache von Bewegungsänderungen

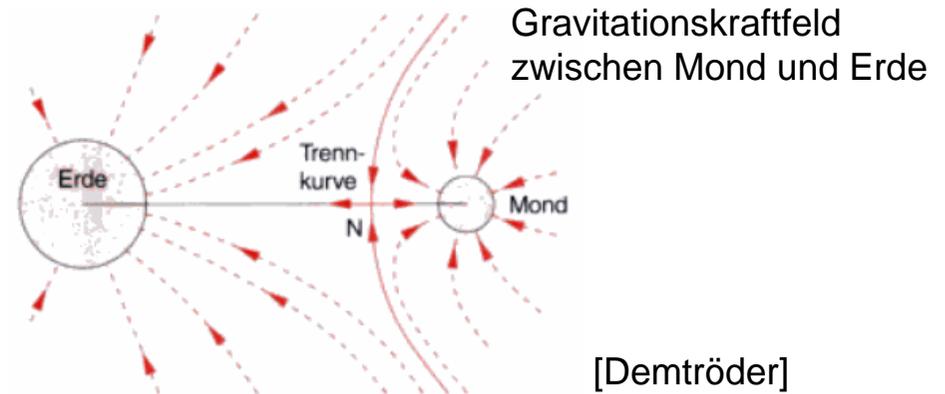


Eine **Kraft** ist eine vektorielle Größe.



Ein **Kraft**  $\vec{F}$  kann in jedem Raumpunkt  $\vec{r}$  charakterisiert werden:

**Kraftfeld**  $\vec{F}(\vec{r})$



[Demtröder]

Newton veröffentlichte in seinem Werk *Philosophiae naturalis – Principia Mathematica* Axiome, zur Quantifizierung von Kräften und der Bewegung unter ihrem Einfluss. Diese Axiome sind Grundgleichungen der Mechanik.

**Axiom 1:** Jeder Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder gleichförmigen geradlinigen Bewegung, solange keine Kraft auf ihn wirkt.

(gilt in Inertialsystemen)

**Def.:** Der Impuls  $\vec{p}$  eines Körpers ist das Produkt aus seiner Masse und seiner Geschwindigkeit.

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} \quad [\vec{p}] = \text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

**Axiom 2:** Die Impulsänderung eines Körpers ist gleich der auf ihn wirkenden Gesamtkraft. Die Änderung liegt in der Richtung der wirkenden Kraft  $\vec{F}$ .

Somit: 
$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \dot{\vec{p}}$$

$$[\vec{F}] = \text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = N$$

Die Kraft misst man in Newton

Bei konstanter Masse  $m$  folgt speziell:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m \cdot \vec{v}) = \vec{v} \cdot \frac{dm}{dt} + m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = m \cdot \vec{a}$$

**Axiom 3:** Die Kräfte, die zwei Körper aufeinander ausüben sind gleich groß und entgegengesetzt.

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Beispiel für zwei wechselwirkende Teilchen:

$$\dot{\vec{p}}_1 = \vec{F}_1 = -\vec{F}_2 = \dot{\vec{p}}_2 \iff \dot{\vec{p}}_1 + \dot{\vec{p}}_2 = 0$$



Die Summe der Impulsänderungen ist null, insofern keine äußeren Kräfte wirken!

Die auftretende skalare Größe *Masse* wurde bislang nicht definiert.

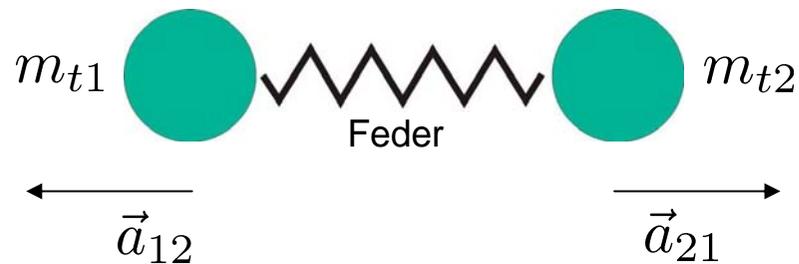
Mit Hilfe des 2. Newtonschen Axioms folgt:

$$\vec{F} = m\dot{\vec{v}} = m\vec{a} \quad \text{und somit} \quad \vec{F}/m_t = \vec{a} \quad \longleftarrow \text{messbare Größe!}$$

Mit Hilfe des 3. Newtonschen Axioms lassen sich nun Massen vergleichen, d.h. messen:

$$m_{t1}\vec{a}_{12} = \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = -m_{t2}\vec{a}_{21} \quad \text{somit} \quad m_{t1}/m_{t2} = |\vec{a}_{21}|/|\vec{a}_{12}|$$

Vergleich zweier Massen:



**Def.:** Die Skalare Größe  $m_t$  bezeichnet man als träge Masse.  $[m_t] = \text{kg}$

## 2.2. Träge und schwere Masse

Die Eigenschaft eines Körpers in Ruhe oder geradlinig gleichförmiger Bewegung zu verharren bezeichnet man als Trägheit.

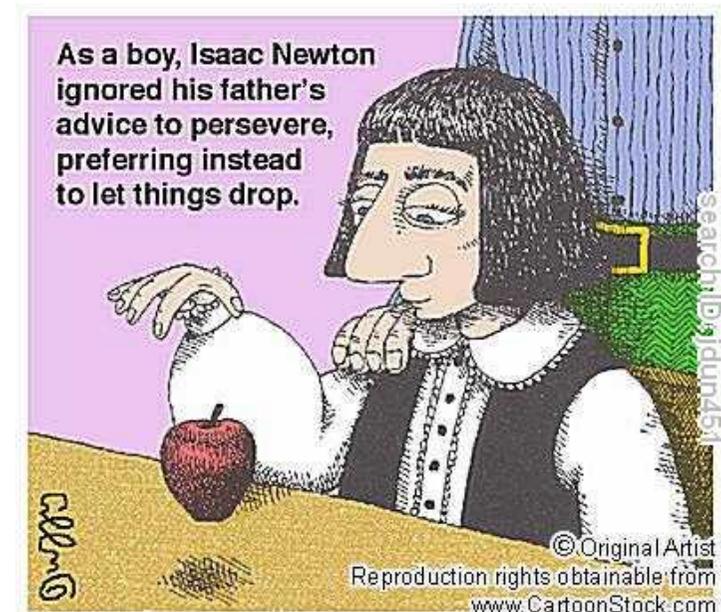
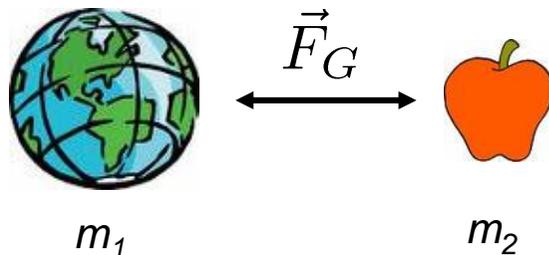
Die zur Impulsänderung notwendige Kraft ist proportional zur trägen Masse  $m_t$  eines Körpers.

Massebehaftete Körper üben eine Anziehung aufeinander aus.

Das Kraftgesetz für diese Gravitationskraft ist

$$\vec{F}_G = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r_{12}^2} \cdot \hat{r}_{12}$$

Die skalaren Größen  $m_1$  und  $m_2$  bezeichnen jeweils die schwere Masse.



Auf der Erdoberfläche gilt für einen Körper der schweren Masse  $m$ :

$$\vec{F}_g = G \cdot \frac{M_{\text{Erde}}}{r^2} \cdot m = \vec{g} \cdot m$$

$$|\vec{g}| = g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$(G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}, M_E = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}, r = 6380 \text{ km})$$

Somit gilt für die Bewegung eines Körpers im Schwerfeld:

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F}_g$$

$$m_t \cdot \dot{\vec{v}} = m_s \cdot \vec{g}$$

Man kann den Proportionalitätsfaktor zwischen schwerer und träger Masse gleich eins setzen.

In Präzisionsexperimenten wurde gezeigt, dass die rel. Abweichung zwischen schwerer und träger Masse kleiner als  $10^{-10}$  ist.

## 2.3. Kräfte

Es gibt nur 4 Arten von Kräften in der Natur:

**1. Die Gravitationskraft**

**2. Die elektromagnetische Kraft**

**3. Die starke Kernkraft (hadronische Kraft)**

**4. Die schwache Kernkraft**

Wegen ihrer Langreichweitigkeit nimmt man alltäglich nur 1. und 2. war.  
Die Gravitationskraft ist die bei weitem schwächste Kraft.

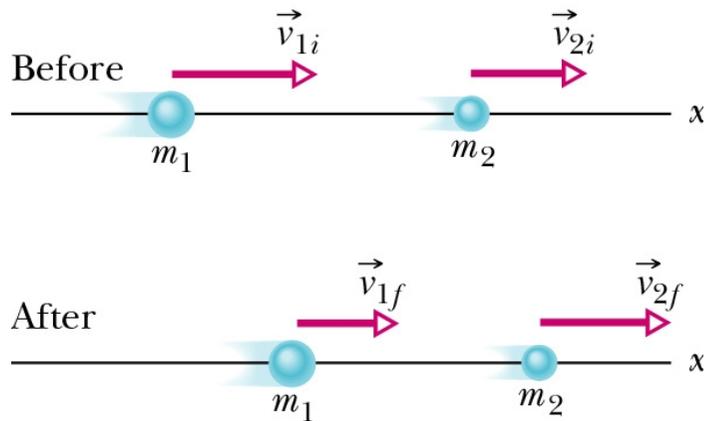
Zahlenbeispiel für die relative Stärke von Gravitation und Coulomb-Kraft im Wasserstoffatom:

$$\begin{aligned} F_g &= G \cdot \frac{m_p \cdot m_e}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r^2} \\ \Rightarrow \frac{F_g}{F_e} &= \frac{G \cdot m_p m_e}{e^2} \cdot 4\pi\epsilon_0 \\ &= \frac{6,7 \cdot 10^{-11} \cdot 1,6 \cdot 10^{-27} \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}}{(1,6 \cdot 10^{-19})^2} \cdot 4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \\ &\approx \frac{10^{-10} \cdot 10^{-27} \cdot 10^{-30}}{10^{-38}} \cdot 10^{-10} \approx 10^{-39} \end{aligned}$$

In speziellen mechanischen Problemen benennt man zweckmäßigerweise weitere Kräfte:

- **Kontaktkraft**

Beispiel: Stoß zwischen zwei Kugeln

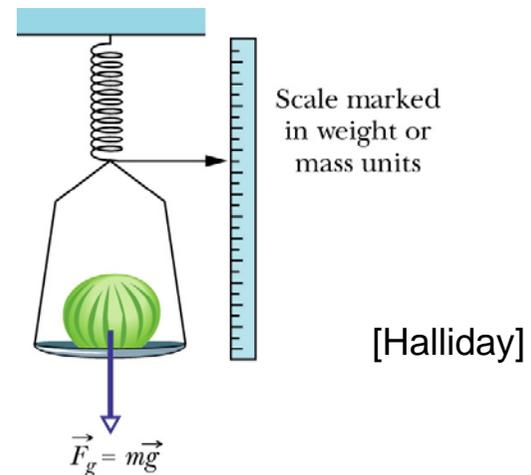


[Halliday]

- **Federkraft**

Auslenkung einer Feder um  $\Delta x$ :

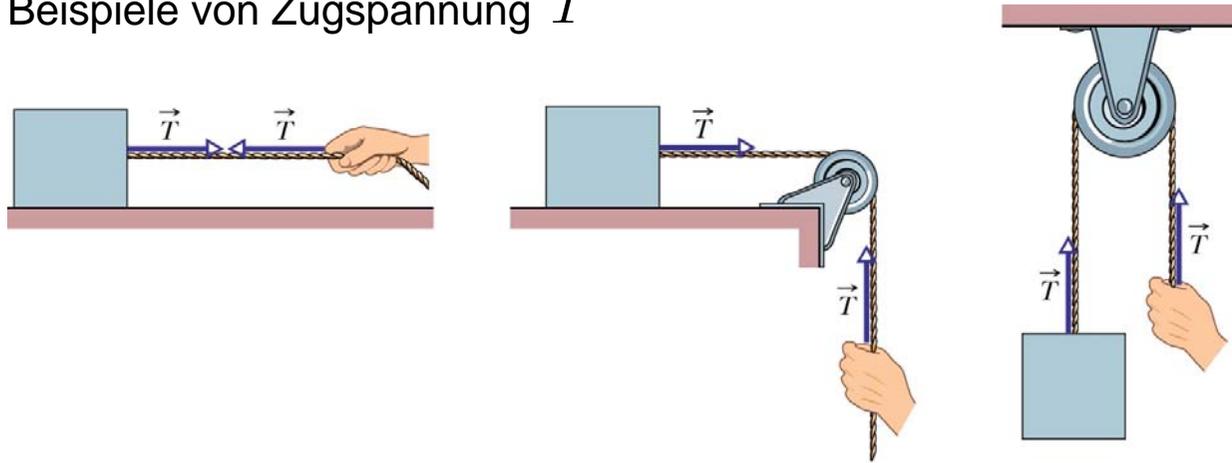
$$F = -\kappa \cdot \Delta x \quad \text{Hookesches Gesetz}$$



[Halliday]

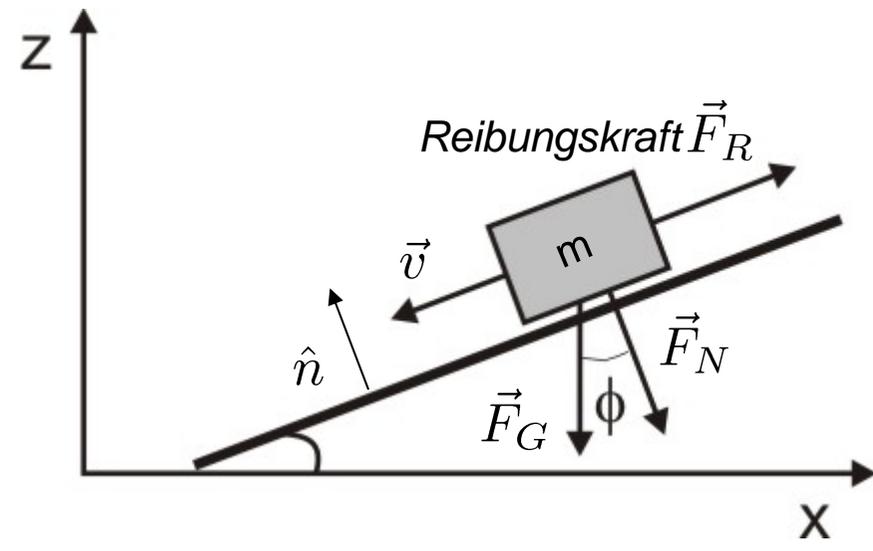
- **Zugspannung**

Beispiele von Zugspannung  $\vec{T}$



- **Reibungskraft**

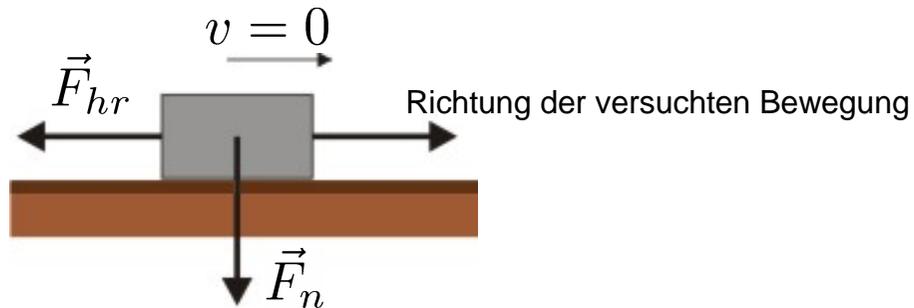
Beispiel:  
Reibung bei schiefer Ebene



**Def.:** Die Kraft  $\vec{F}_n$  heißt Normalkraft. Sie ist parallel zur Flächennormale  $\hat{n}$

Bei der Reibungskraft unterscheidet man die Fälle der

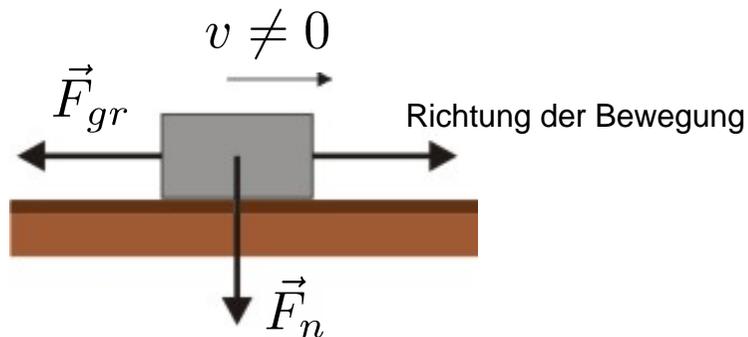
- **Haftreibung**, wenn der Körper ruht und bewegt werden soll und



$$\vec{F}_{hr} = \mu_{hr} |\vec{F}_N| \cdot \hat{e}_{hr}$$

Haftreibungskoeffizient

- **Gleitreibung**, wenn sich der Körper bereits in Bewegung befindet. Die Gleitreibung hängt nicht von der Geschwindigkeit ab!

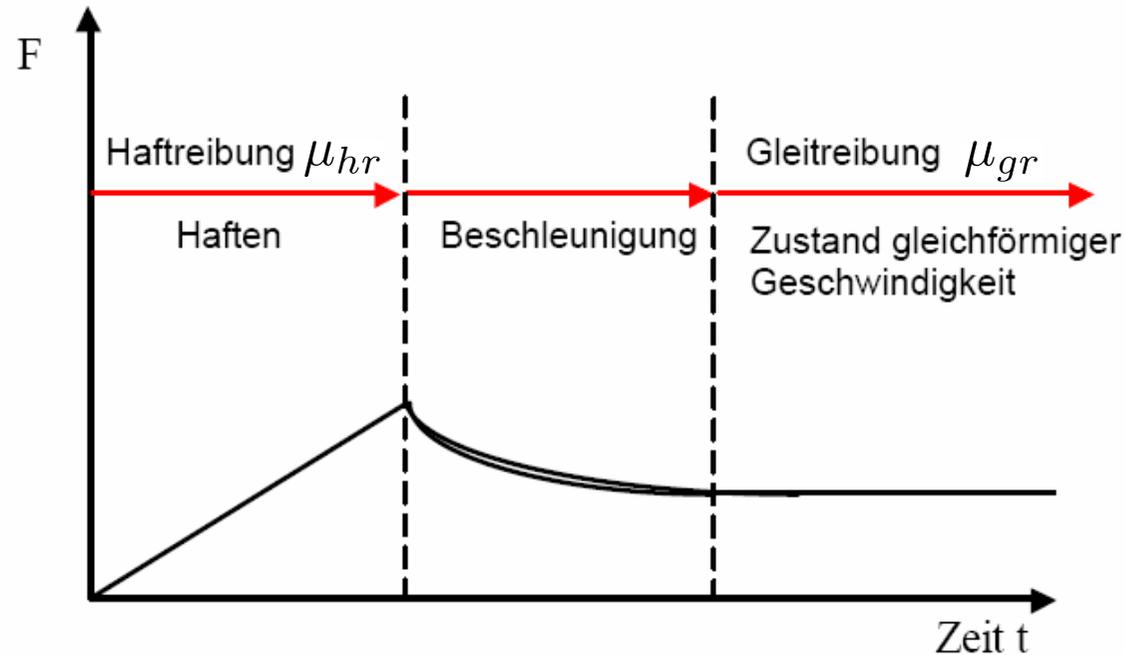


$$\vec{F}_{gr} = \mu_{gr} |\vec{F}_N| \cdot \hat{e}_{gr}$$

Gleitreibungskoeffizient

Es ist  $\mu_{HR} \geq \mu_{GR}$

Bei der gleichmäßigen Erhöhung der Zugkraft an einem anfangs ruhenden Gegenstand ergibt sich folgender Verlauf der Kraft:



Kontakt	$\mu_{hr}$	$\mu_{gr}$
Stahl/ Eis	0,027	0,014
Stahl/ Stahl	0,45-0,8	0,4-0,7
Stahl/ Teflon	0,04	
Leder/ Metall	0,4	

Beispiele von Reibungskoeffizienten

Kontakt-, Feder- und Reibungskraft sowie die Zugspannung können auf die elektromagnetische Kraft zurückgeführt werden.

## 2.4. Bewegung unter Einwirkung von Kräften

Die Weg-Zeit-Funktion für einen Massenpunkt kann für beliebige Krafteinwirkungen durch Integration gewonnen werden:

$$\dot{\vec{p}} = m \cdot \dot{\vec{v}} = \vec{F} \quad \text{und} \quad m = \text{const.}$$

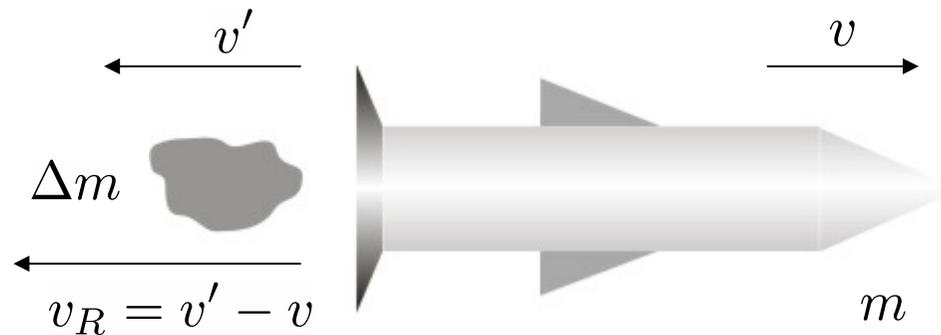
$$\Rightarrow v(t) = \frac{1}{m} \int_{t_0}^t F(t') dt' + v_0$$

$$\text{und} \quad r(t) = \frac{1}{m} \cdot \int_{t_0}^t dt'' \left\{ \int_{t_0}^{t''} F(t') dt' \right\} + v_0(t - t_0) + r_0$$

Für konstante Kräfte folgt mit  $t_0=0$  sofort:

$$r(t) = \frac{1}{2} \frac{F}{m} \cdot t^2 + v_0 \cdot t + r_0$$

Interessant ist der Fall nicht-konstanter Masse, der in der sog. Raketengleichung auftritt:



- $v'$  Ausströmgeschwindigkeit relativ zur Erde
- $v$  Geschwindigkeit der Rakete
- $v_R = v' - v$  Ausströmgeschwindigkeit des Gases relativ zur Rakete

In der Zeit  $\Delta t$  strömt die Masse  $\Delta m$  aus. Dadurch nimmt die Gesamtmasse um  $m - \Delta m$  ab, und  $v$  um  $\Delta v$  zu; somit gilt für die Impulsänderung:

$$\Delta p = p(t + \Delta t) - p(t) = (m - \Delta m) \cdot (v + \Delta v) + \Delta m \cdot v' - m \cdot v$$

und

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = -\frac{\Delta m}{\Delta t} \cdot v + \frac{\Delta v}{\Delta t} \cdot m - \frac{\Delta m \cdot \Delta v}{\Delta t} + \frac{\Delta m}{\Delta t} \cdot v'$$

Und im Grenzübergang

$$\frac{dp}{dt} = v_R \cdot \frac{dm}{dt} + m \cdot \frac{dv}{dt}$$

Da  $\frac{dp}{dt} = -m \cdot g$  ist, folgt:  $dv = -g \cdot dt - v_R \cdot \frac{dm}{m}$

Durch Integration folgt

$$v(t) = v_0 + v_R \cdot \ln \left( \frac{m_0}{m(t)} \right) - g \cdot t$$

Ein möglichst großes Verhältnis zwischen Anfangsmasse und Endmasse ist mit einstufigen Raketen schlecht zu erreichen.



[Wikipedia]

### 3. Arbeit und Energie

#### 3.1. Arbeit und Leistung

**Def.:** Wird ein Körper um ein Wegstück  $\Delta\vec{r}$  bewegt und wirkt dabei auf ihn die Kraft  $\vec{F}(r)$  so heißt die skalare Größe

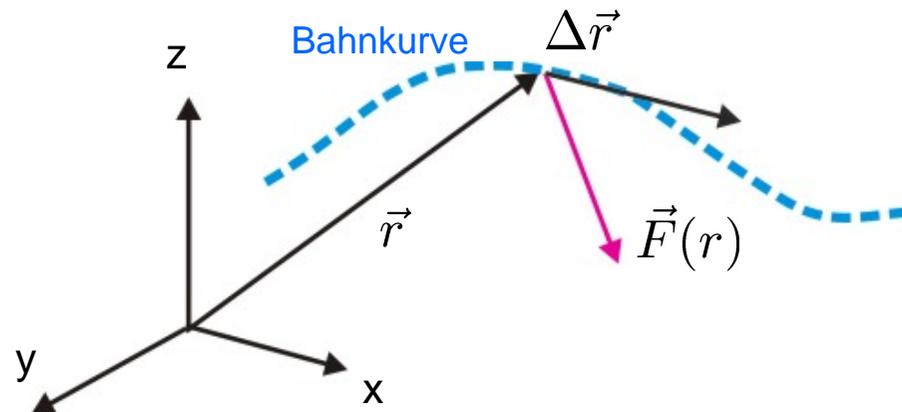
$$\Delta W = \vec{F}(\vec{r}) \cdot \Delta\vec{r} \quad [\Delta W] = \text{N} \cdot \text{m} = \text{Joule} = \text{J}$$

die Arbeit.

Stehen  $\vec{F}(r)$  und  $\Delta\vec{r}$  senkrecht aufeinander, so ist das Skalarprodukt und somit die Arbeit null!

Infinitesimal gilt:

$$dW = \vec{F}(r) \cdot d\vec{r} \quad \text{und}$$
$$W = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}(r) \cdot d\vec{r}$$

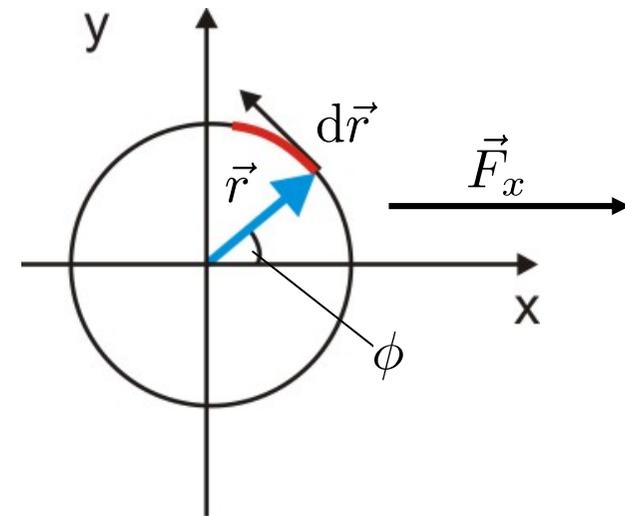


Bsp. für Berechnung eines Wegintegrals

$$d\vec{r} = R \cdot d\vec{\phi} = R \cdot d\phi \cdot \hat{\phi} = R \cdot d\phi \cdot \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix}$$

$$\vec{r} = R \cdot \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix} \quad \vec{r} \perp d\vec{r}$$

$$\vec{F} = F \cdot \hat{x}$$



$$\begin{aligned} W &= \int_{\phi_1}^{\phi_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\phi_1}^{\phi_2} F \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot R \cdot d\phi \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix} \\ &= -F \cdot R \cdot \int_{\phi_1}^{\phi_2} \sin \phi \, d\phi = F \cdot R \cdot [\cos \phi]_{\phi_1}^{\phi_2} \end{aligned}$$

Die Arbeit ist **positiv**, wenn eine Vektorkomponente der Kraft **parallel** zum Weg ist.

Die Arbeit ist **negativ**, wenn eine Vektorkomponente der Kraft **anti-parallel** zum Weg ist.

Welche Arbeit wird benötigt, um einen Körper von der Geschwindigkeit  $v_0$  auf die Geschwindigkeit  $v_1$  zu bringen?

$$\begin{aligned} W &= \int_{r_0}^{r_1} m \cdot \frac{dv}{dt} \cdot dr = \int_{r_0}^{r_1} m \cdot dv \cdot \frac{dr}{dt} = \int_{v_0}^{v_1} m \cdot v \cdot dv \\ &= \frac{1}{2} m \cdot v_1^2 - \frac{1}{2} m \cdot v_0^2 = \frac{1}{2} m \cdot (v_1^2 - v_0^2) \end{aligned}$$

**Def.:** Der skalare Ausdruck

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{p^2}{2m} \quad [E_{\text{kin}}] = \text{N} \cdot \text{m} = \text{Joule} = \text{J}$$

heißt kinetische Energie.

**Def.:** Die zeitliche Ableitung der Arbeit (Arbeit pro Zeit) ist die Leistung  $P$ :

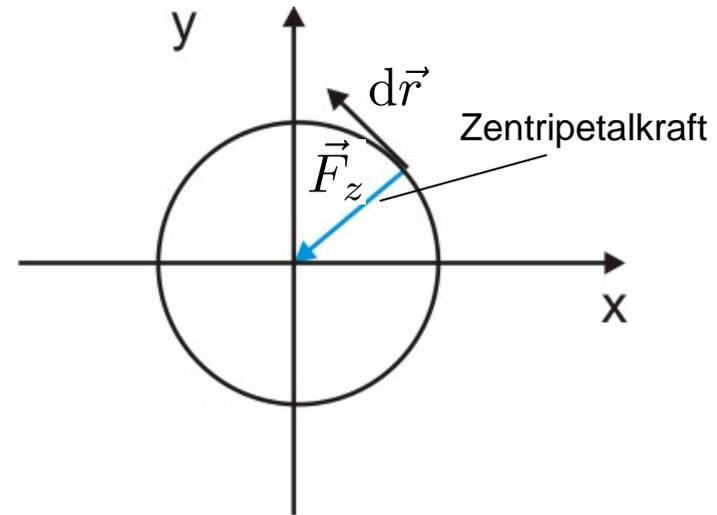
$$P = \frac{dW}{dt} \quad [P] = \frac{\text{J}}{\text{s}} = \text{W} = \text{Watt}$$

Beispiele:

1.) Gleichförmige Kreisbewegung

Es ist stets  $d\vec{r} \perp \vec{F}_z$

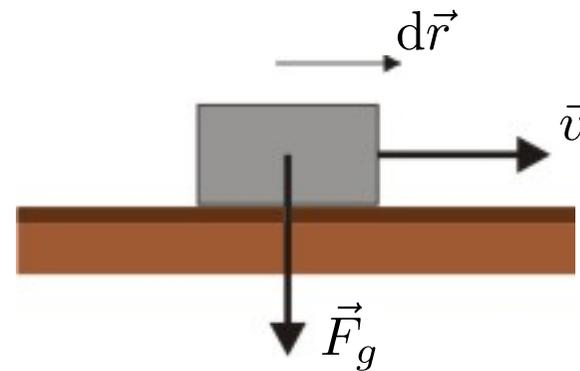
Somit  $\Rightarrow W = d\vec{r} \cdot \vec{F}_z = 0$



2. Gleichförmige Bewegung (ohne Reibung)

Es gilt ebenfalls

$d\vec{r} \perp \vec{F}_g \Rightarrow dW = \vec{F}_g \cdot d\vec{r} = 0$



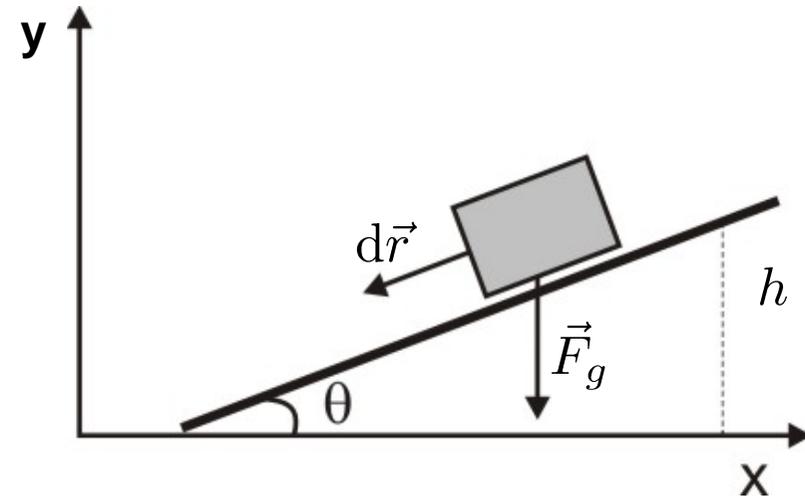
### 3. Schiefe Ebene

Es ist:

$$\begin{aligned}dW &= +m \cdot g \cdot \sin \vartheta \, dr \\ &= mg \sin \vartheta \cdot (dy / \sin \vartheta) \\ &= m \cdot g \, dy\end{aligned}$$

Somit:

$$W = + \int_{y=0}^{y=h} m \cdot g \, dy = m \cdot g \cdot h$$



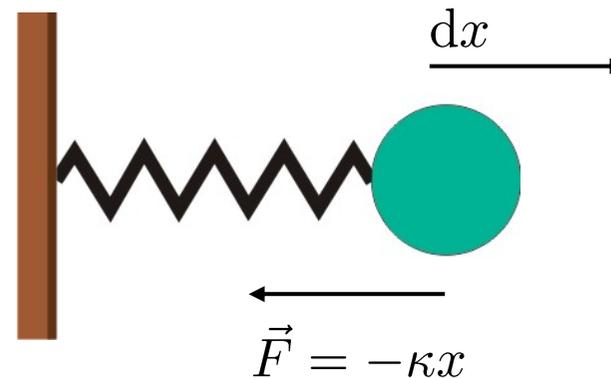
### 4. Feder

Es ist:

$$\vec{F} = -\kappa x$$

Somit:

$$W = - \int_{x_0}^{x_1} \kappa x \, dx = -\frac{1}{2} \kappa (x_1^2 - x_0^2)$$



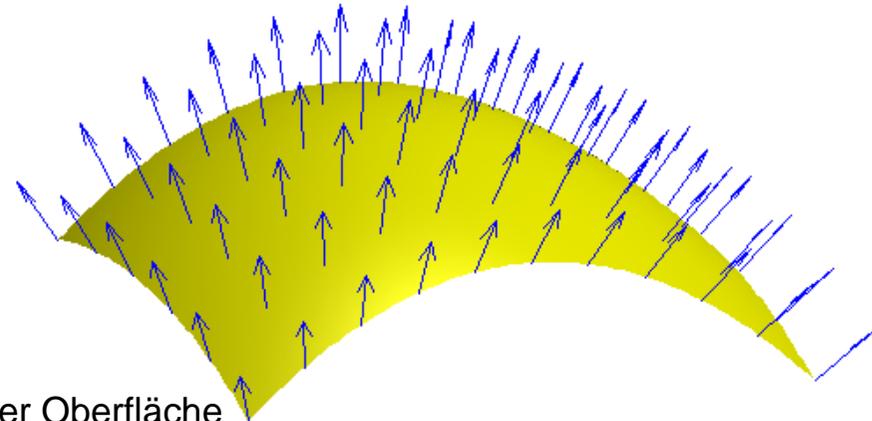
## 3.2. Konservative Kraftfelder

Die Funktion  $\vec{F}(\vec{r})$  ordnet jeden Raumpunkt  $\vec{r}$  ein Feld  $\vec{F}(\vec{r})$  zu.

$\vec{F}(\vec{r})$  bezeichnet man als Kraftfeld.

Zur Zeit Newtons war die Vorstellung einer Kraftübertragung über eine Distanz (Fernwirkung) schwer vorstellbar.

Das Kraftfeld galt allein als eine mathematische Beschreibungsmöglichkeit.

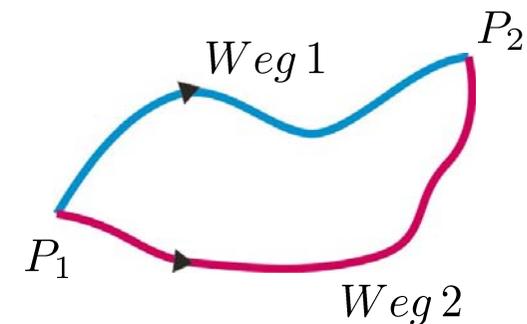


Darstellung eines Feldes auf einer Oberfläche

**Def.:** Ist bei der Bewegung eines Körpers die Arbeit

$$W = \int_{\text{Weg}} \vec{F}(r) d\vec{r}$$

wegunabhängig, so heißt  $\vec{F}(\vec{r})$  konservativ.



Äquivalente Definition:

In konservativen Kraftfeldern ist die Arbeit bei der Bewegung eines Massepunktes auf einem geschlossenen Weg null.

$$\Rightarrow \oint_{\text{geschl. Weg}} \vec{F}(\vec{r}) \, d\vec{r} = 0$$

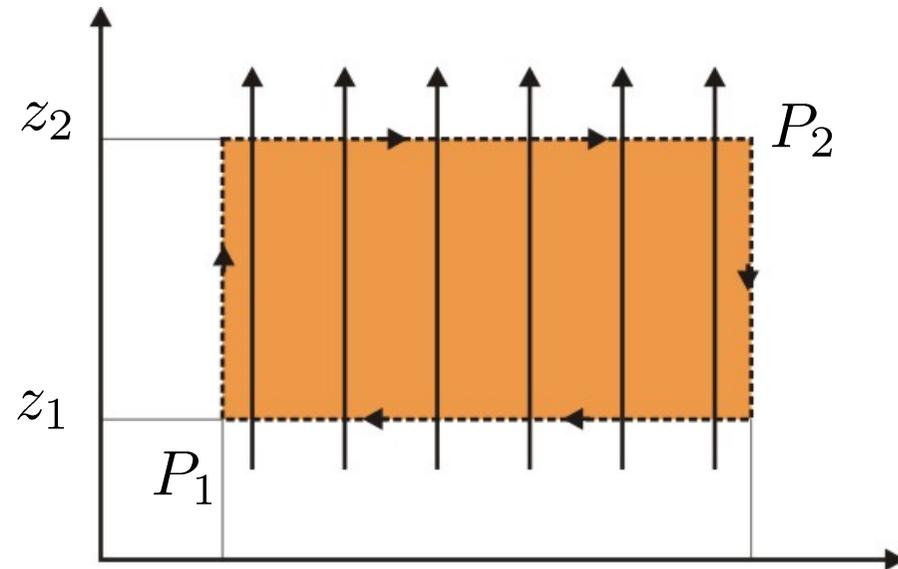


Bsp.: Homogenes Feld

$$\vec{F} d\vec{r} = F_z dz$$

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} d\vec{r} = \int_{z_1}^{z_2} F_z dz$$

$$= - \int_{z_2}^{z_1} F_z dz \Rightarrow \oint \vec{F} d\vec{r} = 0$$

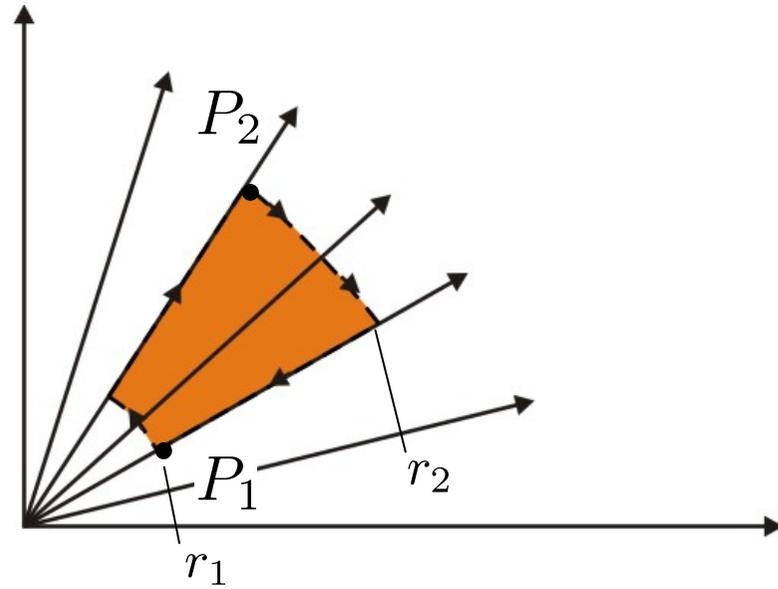


Bsp.: Zentralkraftfeld

$$\vec{F} d\vec{r} = F_r dr$$

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} F_r dr$$

$$= - \int_{r_2}^{r_1} F_r dr \Rightarrow \oint \vec{F} d\vec{r} = 0$$

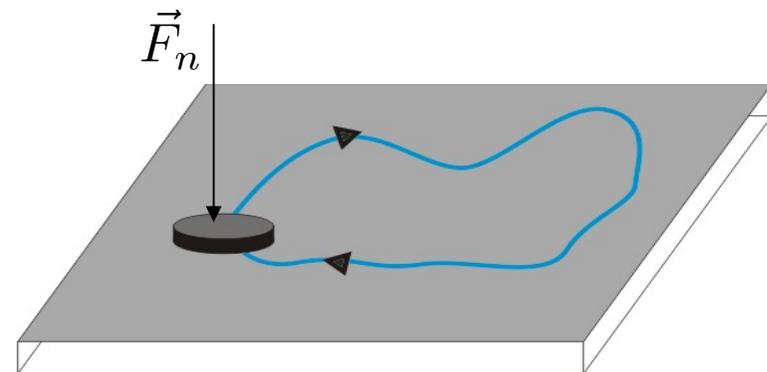


Bsp.: Reibungskraft

$$F_R = \mu_{gr} \cdot F_n$$

$$W = \oint \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} = \oint \mu_{gr} \cdot F_n dr$$

$$= \mu_{gr} \cdot F_n \cdot \underbrace{\oint d\vec{r}}_{\text{Weglänge } L} \neq 0$$



Reibungskräfte sind keine konservativen Kräfte!

### 3.3. Potentielle Energie

Für konservative Kraftfelder hängt die Arbeit bei Verschiebung eines Massenpunktes zwischen Raumpunkten  $\vec{r}_1$  und  $\vec{r}_2$  nicht vom Weg ab, d.h.

$$W = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}(\vec{r}) \, d\vec{r}$$

ist nur eine Funktion von  $\vec{r}_1$  und  $\vec{r}_2$ .

Legt man einen der Punkte fest, z.B.,  $|\vec{r}_2| = \infty$ , so ergibt sich eine skalare Größe  $E_{pot}(\vec{r})$  die nur vom Raumpunkt  $\vec{r}$  abhängt.

**Def.:**

$$E_{pot}(\vec{r}) = \int_r^{\infty} \vec{F}(\vec{r}) \, d\vec{r}$$

heißt potentielle Energie.

Bemerkung:  $E_{pot}$  wird manchmal auch **Potential**  $V$  genannt (manchmal nur, wenn  $V$  auf eine Probemasse bezogen wird).

Bemerkungen:

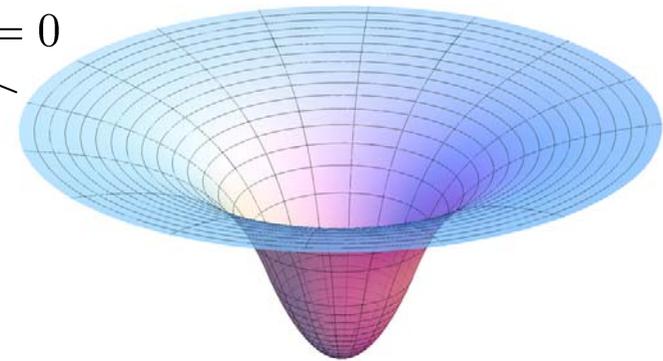
- a) Die Definition der potentiellen Energie macht nur für konservative Kraftfelder einen Sinn.
- b) Der Bezugspunkt kann beliebig gewählt werden, da nur Potentialdifferenzen messbare Größen sind.

Beispiel: Potentielle Energie des Gravitationsfeldes der Erde.

$$E_{pot}(r) = -G \frac{M}{r}$$

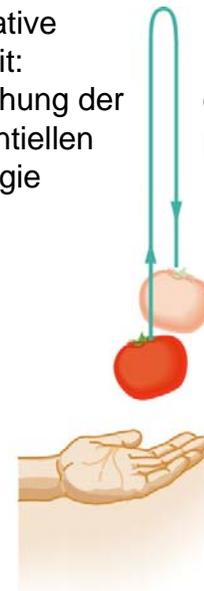
- c) Das Vorzeichen wird so gewählt, dass  $\Delta W = E_{pot}(\vec{r}_2) - E_{pot}(\vec{r}_1)$  positiv ist, wenn der Körper arbeit leistet, und negativ, wenn am Körper Arbeit geleistet wird.

$$E_{pot}(\infty) = 0$$



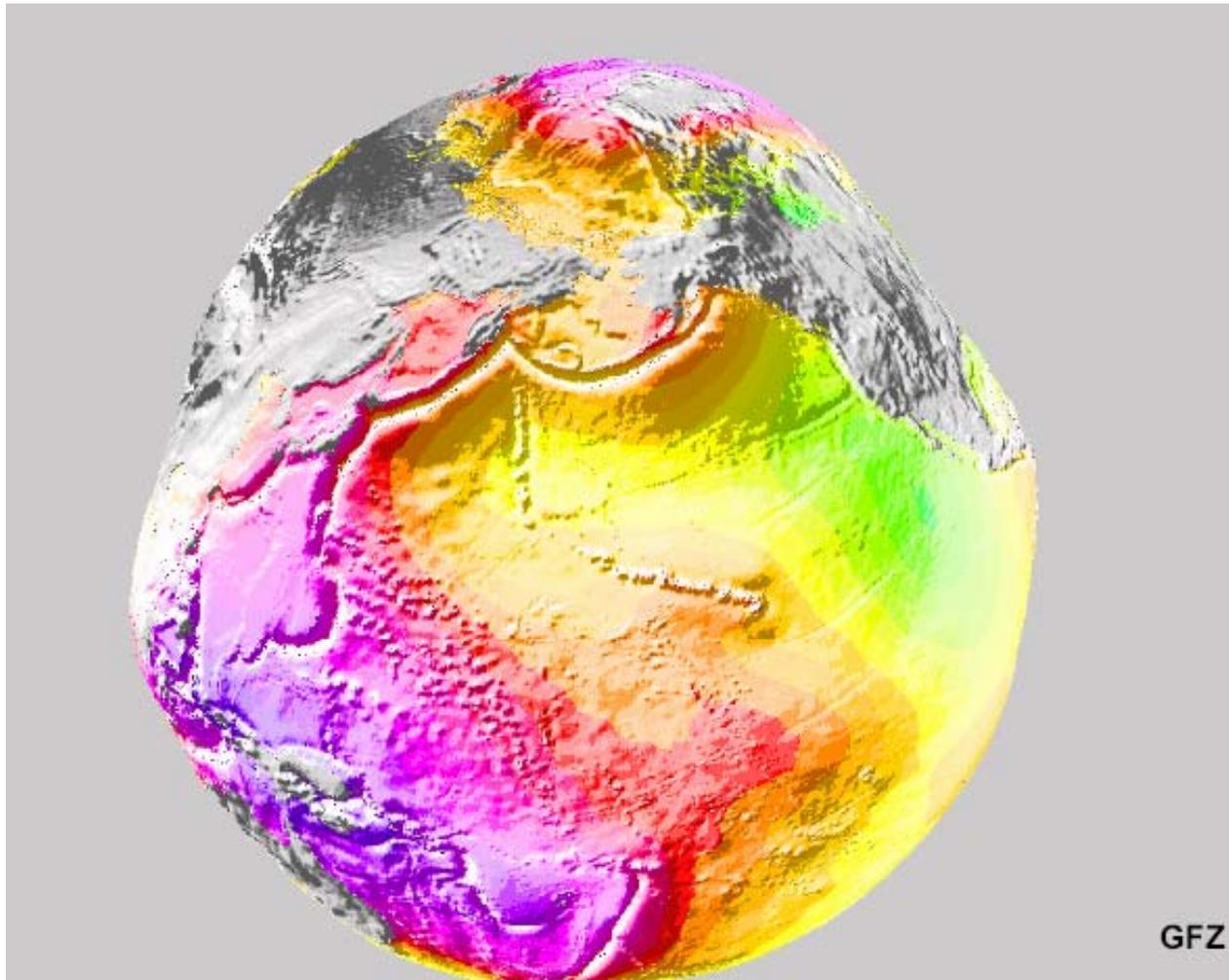
Negative Arbeit:  
Erhöhung der  
potentiellen  
Energie

Positive Arbeit:  
Erniedrigung  
der  
potentiellen  
Energie



[Halliday]

Beispiel: Überhöhte Darstellung des Schwerefeldes der Erde



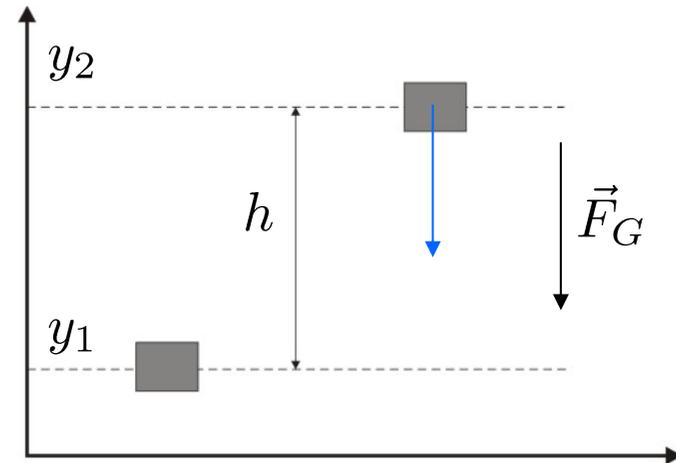
[GFZ Potsdam]

### Beispiel: Anheben eines Körpers im Schwerfeld

$$E_{pot}(y_1) = m \cdot g \cdot y_1 ; E_{pot}(y_2) = m \cdot g \cdot y_2$$

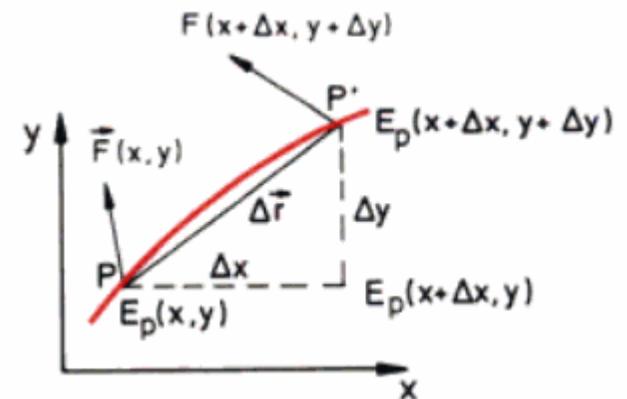
$$\begin{aligned} \Delta W &= E_{pot}(y_2) - E_{pot}(y_1) = mg(y_2 - y_1) \\ &= mgh \end{aligned}$$

Man muss die Arbeit  $m \cdot g \cdot h$  leisten, um den Körper anzuheben, d.h. die potentielle Energie wird um den gleichen Betrag erhöht!



Bei der Verrückung eines Massenpunktes in einem konservativen Kraftfeld um ein Wegstück  $\Delta r = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$  ändert sich die potentielle Energie  $E_{pot}(x, y, z)$

$$\begin{aligned} \Delta E_{pot} &= \frac{E_{pot}(x + \Delta x, y, z) - E_{pot}(x, y, z)}{\Delta x} \Delta x \\ &+ \frac{E_{pot}(x, y + \Delta y, z) - E_{pot}(x, y, z)}{\Delta y} \Delta y \\ &+ \frac{E_{pot}(x, y, z + \Delta z) - E_{pot}(x, y, z)}{\Delta z} \Delta z \end{aligned}$$



[Demtröder]

Im Grenzfall  $\lim_{\Delta r \rightarrow 0}$  folgt

$$dE_{pot} = \frac{\partial E_{pot}}{\partial x} dx + \frac{\partial E_{pot}}{\partial y} dy + \frac{\partial E_{pot}}{\partial z} dz = -\vec{F} \cdot d\vec{r}$$

→  $F_x = -\frac{\partial E_{pot}}{\partial x}$  ;  $F_y = -\frac{\partial E_{pot}}{\partial y}$  ;  $F_z = -\frac{\partial E_{pot}}{\partial z}$

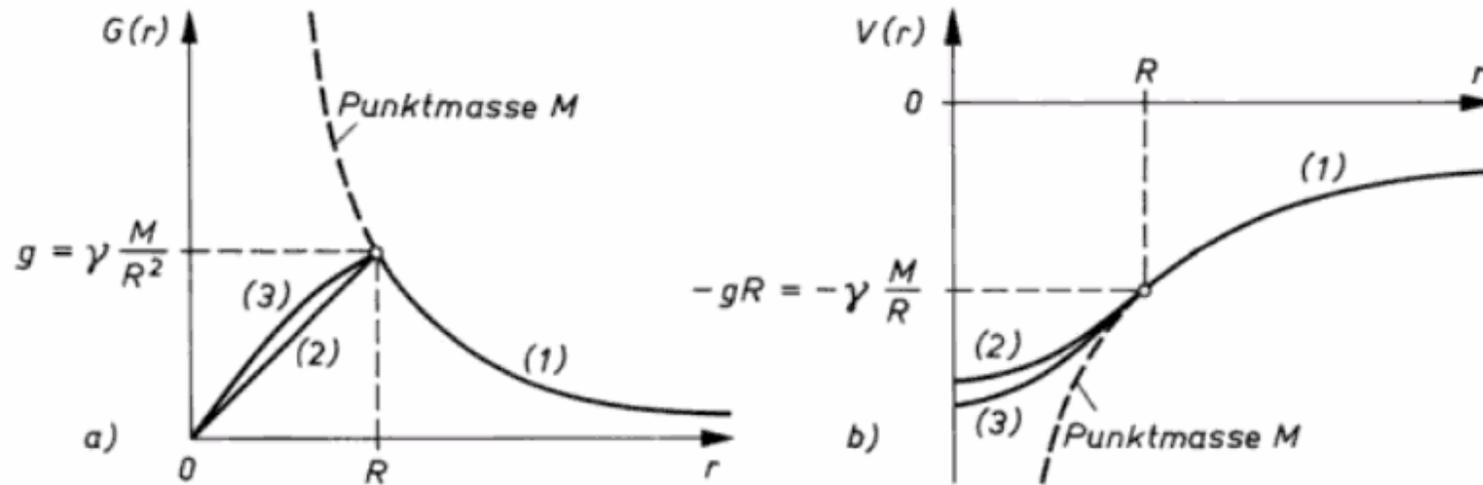
Somit:

$$\vec{F} = -\text{grad}E_{pot} = -\vec{\nabla} E_{pot} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial E_{pot}}{\partial x} \\ \frac{\partial E_{pot}}{\partial y} \\ \frac{\partial E_{pot}}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Die Kraft ist antiparallel zum Gradienten der potentiellen Energie.

Flächen gleicher potentieller Energie heißen **Äquipotentialflächen**.

Entlang Äquipotentialflächen wirken keine Kräfte.



Gravitationsfeldstärke (links) und Gravitationspotential (rechts) einer Massekugel mit dem Radius  $R$ .

(1) Verlauf außerhalb der Kugel (gleich dem einer Punktmasse)

(2) Idealer Verlauf bei konstanter Dichte

(3) Realer Verlauf infolge einer Dichtezunahme von außen nach innen (z.B. bei der Erde)

## 4. Erhaltungssätze

### 4.1. Energieerhaltung

Aus den Newtonschen Axiomen lässt sich mit obigen Definitionen für die kinetische und die potentielle Energie der Energiesatz der Mechanik ableiten:

$$F = m \cdot \frac{dv}{dt}$$

$$\Rightarrow \int F \cdot v \, dt = \int m \cdot \frac{dv}{dt} \cdot v \, dt$$

$$\Rightarrow \int F \, dr = \int m \cdot v \, dv$$

$$\Rightarrow - (E_{\text{pot}}(r_2) - E_{\text{pot}}(r_1)) = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \Delta E_{\text{kin}}$$

### Energiehaltungssatz:

$$E_{\text{pot}}(r_2) + E_{\text{kin}}(v_2) = E_{\text{pot}}(r_1) + E_{\text{kin}}(v_1) = E_G$$

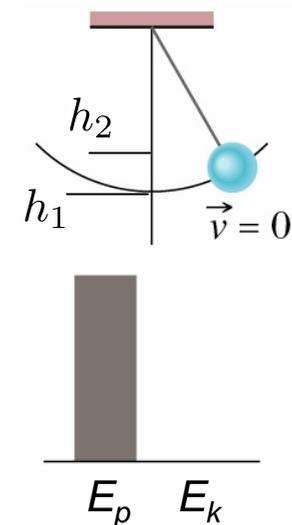
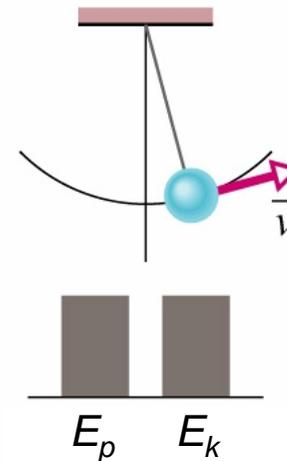
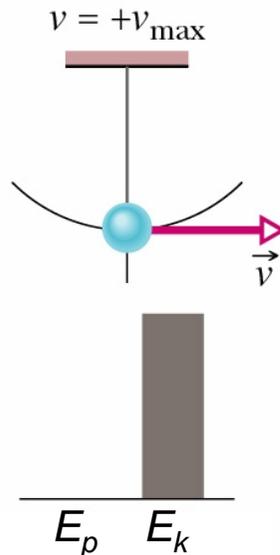
Die mechanische Gesamtenergie  $E_G$  ist eine Erhaltungsgröße.

Beispiel.: Pendel

Anfängliche kinetische Energie ( $E_k$ ) wird vollständig in potentielle Energie ( $E_p$ ) umgewandelt.

Stets gilt:

$$\begin{aligned}\Delta E_{\text{pot}} &= m \cdot g(h_2 - h_1) \\ &= \Delta E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2\end{aligned}$$



## 4.2. Impulserhaltung

Ein weiterer Erhaltungssatz folgt unmittelbar aus dem Newtonschen Axiomen:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$
$$\Rightarrow \dot{\vec{p}}_1 + \dot{\vec{p}}_2 = 0$$

$$\Rightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{P}_G = \text{konstant}$$

### **Impulserhaltungssatz:**

$$\vec{P}_G = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{konstant}$$

Wirkt auf ein System von 2 Massepunkten keine äußere Kraft, so bleibt der Gesamtimpuls erhalten.

Die Erhaltungssätze lassen sich leicht auf beliebig viele Massepunkte erweitern.

Energie- und Impulssatz sind sehr fundamentale Gesetzmäßigkeiten.

Wie in der theoretischen Physik gezeigt wird, hängen Erhaltungssätze eng mit Symmetrieeigenschaften physikalischer Systeme zusammen.

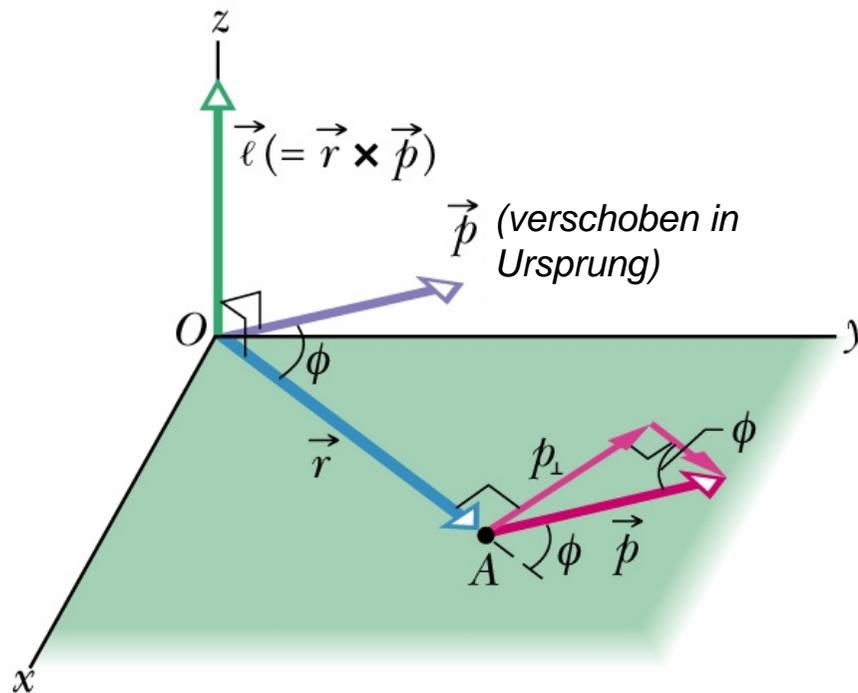
### 4.3. Drehimpuls und Drehimpulserhaltung

Ein Massepunkt mit dem Impuls  $\vec{p} = m\vec{v}$  bewege sich auf einer beliebigen Bahn  $\vec{r}(t)$ .

**Def.:** Die vektorielle Größe

$$L = \vec{r} \times \vec{p} = m \vec{r} \times \vec{v} \quad [L] = \text{kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

heißt Drehimpuls.



Der Vektor  $L$  steht senkrecht auf  $r$  und auf  $v$ . Seine Richtung ergibt sich aus der „Rechte Hand Regel“.

## Drehmoment

Differenziert man die Definitionsgleichung für den Drehimpuls, so erhält man

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dt} &= \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \\ &= \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F} \\ &= \vec{r} \times \vec{F}\end{aligned}$$

**Def.:** Die vektorielle Größe

$$D = \vec{r} \times \vec{F} \quad [D] = \text{kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = \text{N} \cdot \text{m}$$

heißt Drehmoment

Analogie:  $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}; \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{D}$

Bei konstantem Drehimpuls  $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$  verläuft die Bewegung in einer Ebene.

## Beispiel: Drehimpuls bei der gleichförmigen Kreisbewegung

Verläuft die Bewegung in einer Ebene, so kann man die Geschwindigkeit in Polarkoordinaten zerlegen:

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\phi$$

parallel zu  $\hat{r}$       parallel zu  $\hat{\phi}$

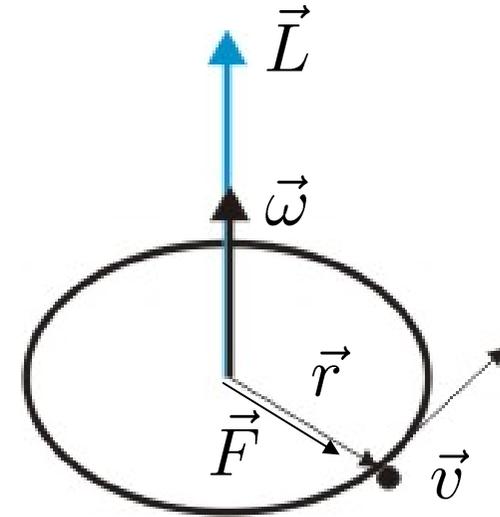
Somit:

$$\vec{L} = m [\vec{r} \times (\vec{v}_r + \vec{v}_\phi)] = m \vec{r} \times \vec{v}_\phi$$

$$|\vec{L}| = mr^2 \dot{\phi} = mr^2 \omega$$

Der Drehimpuls ist parallel zur Winkelgeschwindigkeit.

Offensichtlich ist:  $\vec{D} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$



### Beispiel: Drehimpuls bei Zentralkraftfeldern

Da in Zentralfeldern gilt  $\vec{F}(\vec{r}) = f(r) \cdot \hat{r}$  folgt:

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times f(r) \cdot \hat{r} \\ &= f(r)(\vec{r} \times \hat{r}) \\ &= 0 = \dot{\vec{L}}\end{aligned}$$

In Zentralkraftfeldern ist der Drehimpuls eine Erhaltungsgröße.

Schließlich gilt als weiterer Erhaltungssatz:

#### **Drehimpulserhaltungssatz:**

Falls keine äußeren Drehmomente wirken, gilt:

$$\begin{aligned}\vec{D} = 0 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 &= \frac{d}{dt} (\vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2) = 0 \\ &= \frac{d}{dt} (\vec{L}_1 + \vec{L}_2) = 0\end{aligned}$$

## 5. Der harmonische Oszillator

### 5.1. Die ungedämpfte Schwingung

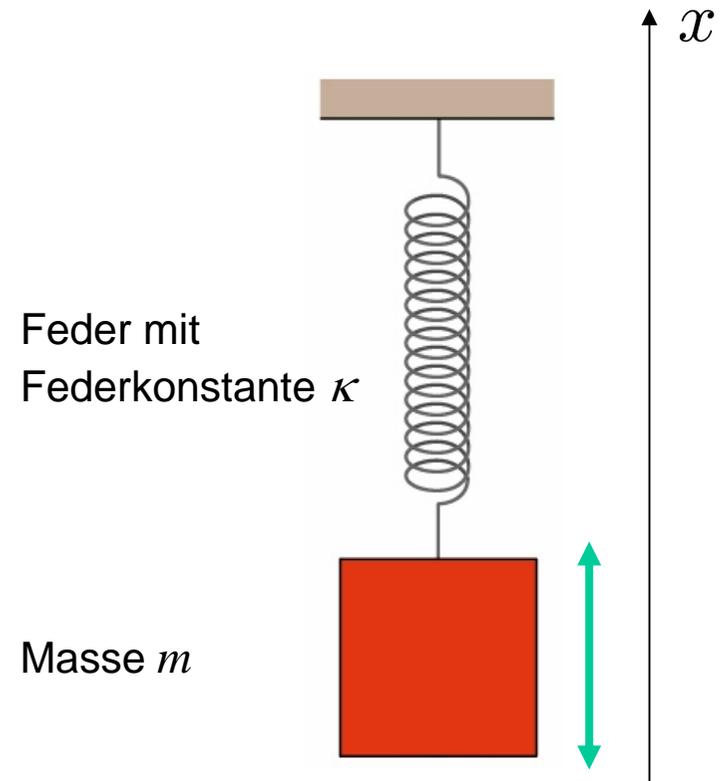
Bei einem harmonischen Kraftgesetz ist die Kraft  $\vec{F}$  der Auslenkung  $x$  proportional:

$$F = -\kappa \cdot x \cdot \hat{x}$$

rücktreibend!

Beispiel 1: Federpendel (Hookesches Gesetz)

$$F = -\kappa \cdot x = m \cdot \ddot{x}$$
$$\ddot{x} + \frac{\kappa}{m} \cdot x = 0$$



Beispiel 2: Fadenpendel

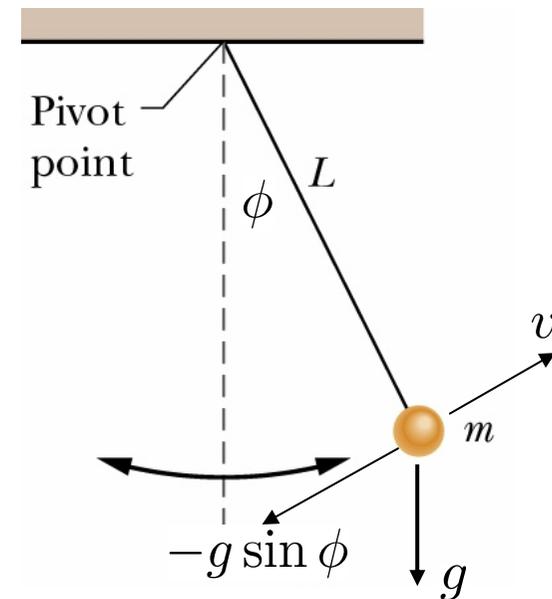
$$F = -\kappa' \cdot \varphi \cdot \hat{\varphi}$$
$$\approx -m \cdot g \cdot \varphi \cdot \hat{\varphi}$$

Bewegungsgleichung

$$F \approx -\kappa' \cdot \varphi \cdot \hat{\varphi}$$
$$\approx -m \cdot g \cdot \varphi \cdot \hat{\varphi}$$

Schwingungsgleichung eines harmonischen Oszillators

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$



$\omega_0$  ist die Schwingungs- oder **Kreisfrequenz**.

In den Beispielen:

1. Federpendel:  $\omega_0 = \sqrt{\frac{\kappa}{m}}$

2. Fadenpendel:  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$

Die allgemeine Lösung der Schwingungsgleichung ergibt sich aus einer Linearkombination zweier linear unabhängiger Lösungen.

Ansatz:

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t)$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = -\omega_0^2 \cdot A \cdot \cos(\omega_0 t)$$

$A$  heißt **Amplitude** der Schwingung!

2. Lösung:  $x(t) = B \cdot \sin(\omega_0 t)$

Allgemeine Lösung:

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t) + B \cdot \sin(\omega_0 t)$$

$$x_0 = x(t=0) = A$$

$$v_0 = \dot{x}(t=0) = B \cdot \omega_0$$

$$\Rightarrow x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \cdot \sin(\omega_0 t)$$

Alternative:  $x(t) = \tilde{A} \cos(\omega_0 t + \varphi)$   
 $= \tilde{A} \cdot \cos(\omega_0 t) \cdot \cos \varphi - \tilde{A} \cdot \sin(\omega_0 t) \cdot \sin \varphi$

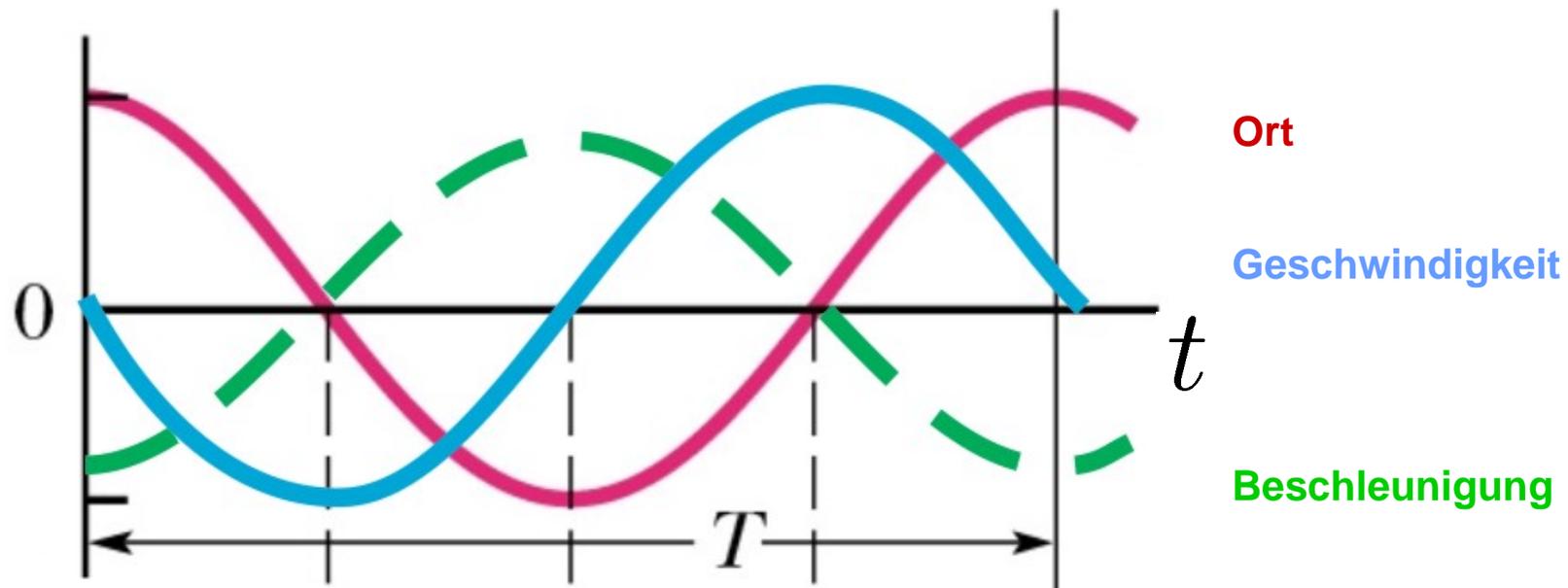
$\varphi$  heißt die **Phase** der Schwingung.

$$\Rightarrow A = \tilde{A} \cos \varphi ; B = -\tilde{A} \cdot \sin \varphi$$

$$\tan \varphi = -\frac{B}{A} = -\frac{v_0}{\omega_0 \cdot x_0}$$

$$\tilde{A} = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2}$$

Definitonen:  $A$  = Amplitude der Schwingung  
 $\varphi$  = Phase der Schwingung  
 $\omega_0$  = Kreisfrequenz der Schwingung  
 $\nu$  =  $\frac{\omega_0}{2\pi}$  = Frequenz der Schwingung  
 $T$  =  $\frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega_0}$  = Schwingungsdauer der Schwingung



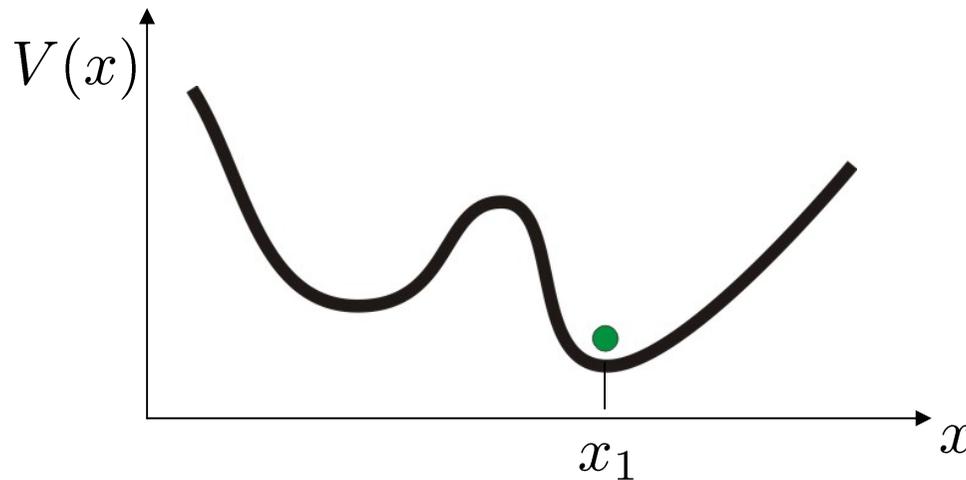
Bemerkung: Warum ist die harmonische Schwingung von herausragender Bedeutung?

Es ist:

$$F = -\kappa \cdot x \Rightarrow \frac{dV}{dx} = +\kappa \cdot x$$

$$V = \frac{1}{2} \kappa x^2$$

Das harmonische Potential ist parabelförmig.



Beliebiges Potential mit  
Körper in Gleichgewichtslage

Taylorentwicklung um  $x_I$ :

$$V(x_1) = 0 + \underbrace{\frac{dV}{dx}}_{=0} \cdot \Delta x + \frac{1}{2} \frac{d^2V}{dx^2} \cdot \Delta x^2 = \frac{1}{2} \kappa \cdot \Delta x^2$$

In der Nähe der Gleichgewichtslage ist das Potential ein harmonisches Potential.

Kleine Schwingungen sind harmonisch.

## Überlagerung von Schwingungen

Schwingungen können sich beliebig überlagern.

Allgemeiner Fall (in einer Dimension):  $x(t) = \sum_n a_n \cdot \cos(\omega_n \cdot t + \varphi_n)$

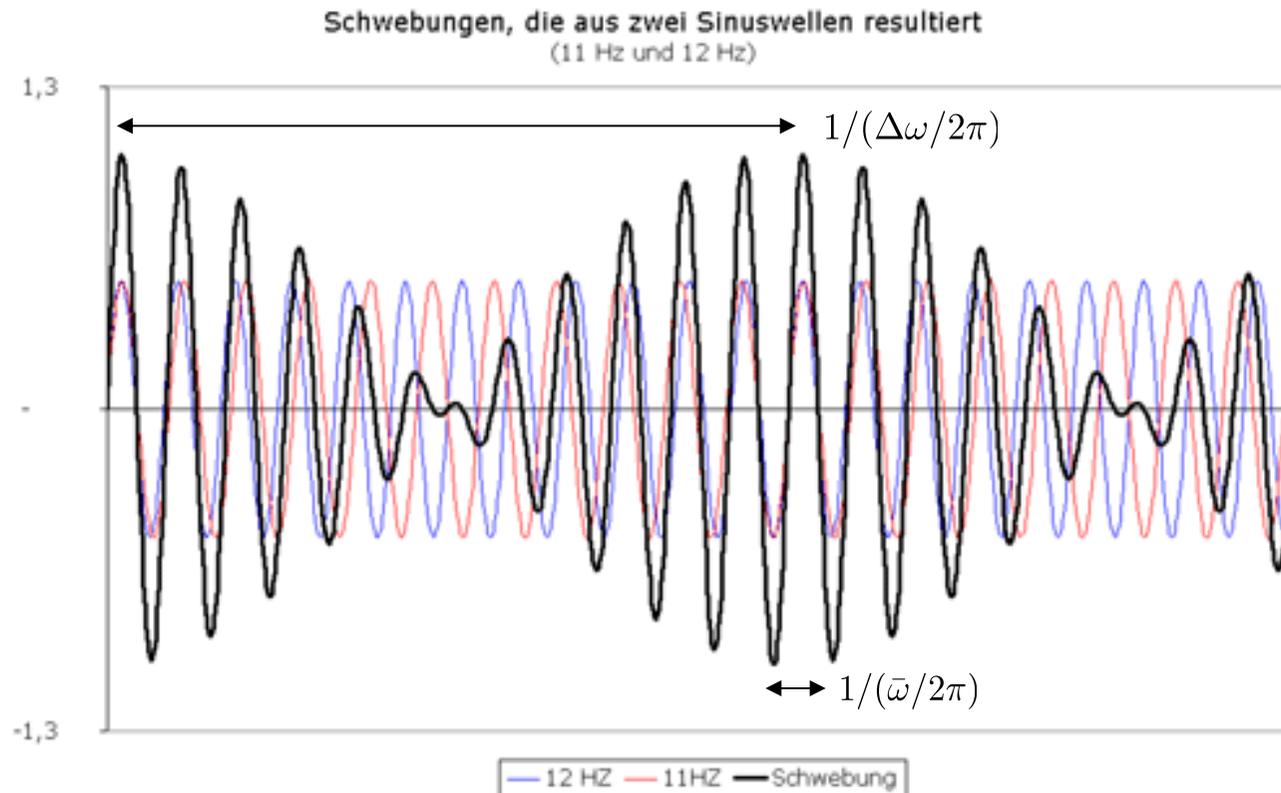
Beispiel: Überlagerung von 2 Schwingungen gleicher Amplitude und ähnlicher Frequenz

$$x_1(t) = a_1 \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \quad \varphi_1 = \varphi_2 = 0$$

$$x_2(t) = a_2 \cdot \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \quad a_1 = a_2 = a$$

Mit  $\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t = 2 \cdot \cos \frac{\omega_1 t - \omega_2 t}{2} \cdot \cos \frac{\omega_1 t + \omega_2 t}{2}$

$$\Rightarrow x_1(t) + x_2(t) = x(t) = 2a \cdot \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \cdot \cos \bar{\omega} \cdot t$$



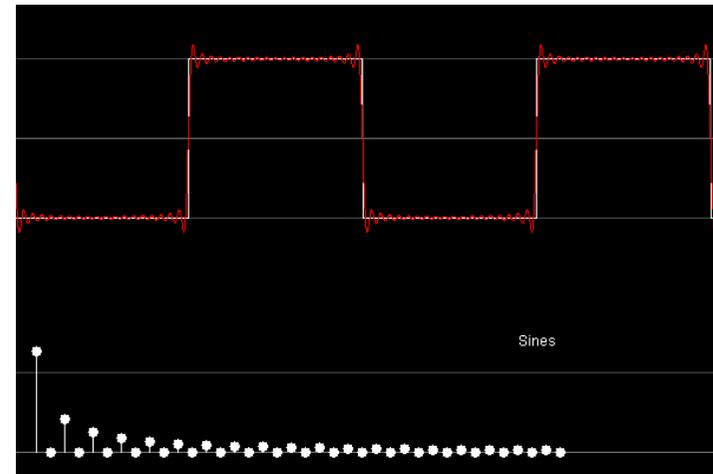
Hierbei ist  $\bar{\omega}$  die mittlere Frequenz und  $\Delta\omega$  die Schwebungsfrequenz.

Für  $\Delta\omega \ll \bar{\omega}$  spricht man vom Phänomen der **Schwebung**.

Den allgemeinen Fall einer Überlagerung von Schwingungen beschreibt man mit der Fourieranalyse.

Theorem: Jede periodische Funktion  $f(t)$  lässt sich schreiben als Summe von sin- bzw. cos-Funktionen der Frequenzen  $n \cdot \omega_0$

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n \cdot \omega_0 \cdot t + \varphi_n)$$



Bem.: Je steiler die Funktion  $f(t)$  im Zeitverlauf (z.B. steile Flanken, Pulse) desto höhere Harmonische werden in der Fourierreihe benötigt!  $\Delta\omega \cdot \Delta t \geq 2\pi$

<http://www.falstad.com/fourier/>

## 5.2. Die gedämpfte Schwingung

Jede Form von Reibung führt zu einer Dämpfung der harmonischen Schwingung.

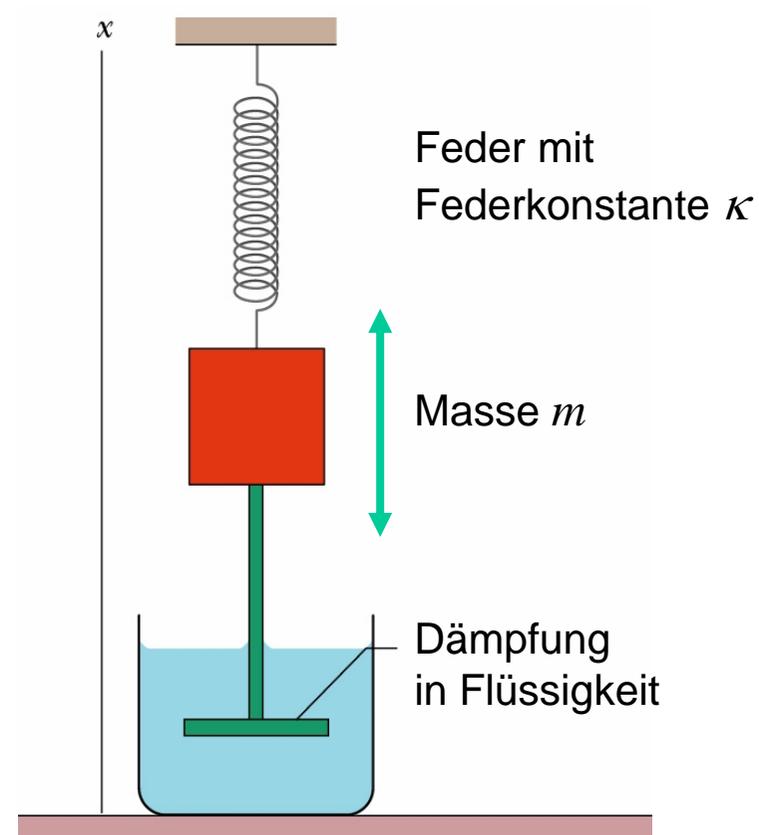
z.B. durch Stokes-Reibung

$$F_R = -6\pi\eta r v$$

Allgemein gilt:

$$\ddot{x} + 2\gamma \cdot \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$\gamma =$  Dämpfungskonstante



Gedämpfter harmonischer Oszillator

**a) Schwache Dämpfung:**  $\gamma < \omega_0$

Testansatz:

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi) \cdot e^{-\gamma \cdot t}$$

$$\dot{x}(t) = -A \cdot \omega \cdot \sin(\omega t + \varphi) \cdot e^{-\gamma t} - A \cdot \gamma \cdot \cos(\omega t + \varphi) \cdot e^{-\gamma t}$$

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) = & -A \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega t + \varphi) \cdot e^{-\gamma t} + A \cdot \gamma \cdot \omega \cdot \sin(\omega t + \varphi) \cdot e^{-\gamma t} \\ & + A \cdot \gamma \cdot \omega \cdot \sin(\omega t + \varphi) \cdot e^{-\gamma t} + A \cdot \gamma^2 \cdot \cos(\omega t + \varphi) \cdot e^{-\gamma t} \end{aligned}$$

Einsetzen in DGL und Aufsammeln aller sin- und cos-Terme:

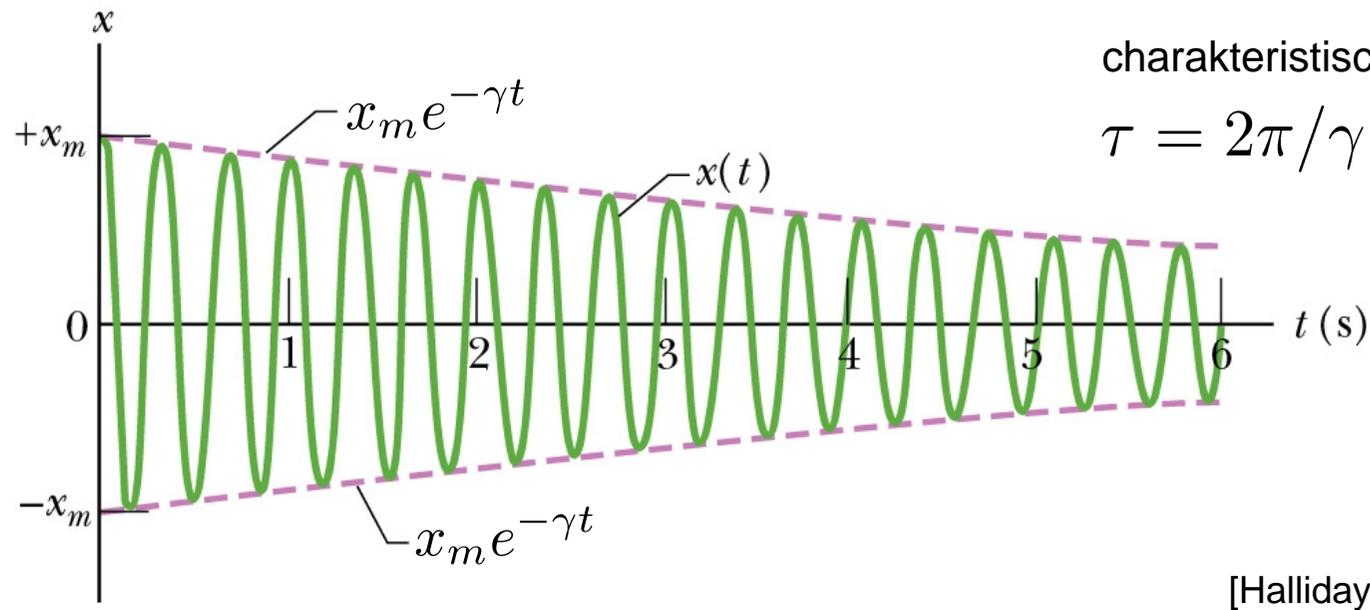
$$\sin(\omega t + \varphi) e^{-\gamma t} [-A \cdot 2\gamma \cdot \omega + 2 \cdot A \cdot \omega \cdot \gamma] = 0$$

$$A \cdot \cos(\omega t + \varphi) e^{-\gamma t} [\omega_0^2 - 2\gamma^2 - \omega^2 + \gamma^2] = 0 \Leftrightarrow \omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$$

Lösung für den Fall schwacher Dämpfung:

$$\Rightarrow x(t) = A \cdot \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \cdot t + \varphi\right) e^{-\gamma t}$$

$$x(t) = A \cdot \cos \left( \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \cdot t + \varphi \right) e^{-\gamma t}$$



Die Schwingungsfrequenz  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$  ist kleiner als  $\omega_0$  !

Nach einer Schwingung ist  $x(t + T) = e^{-\gamma \cdot T} \cdot x(t)$

**b) Starke Dämpfung:**  $\gamma > \omega_0$

Ansatz:  $x(t) = A \cdot \cosh\left(\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \cdot t + \phi\right) \cdot e^{-\gamma t}$

Motivation:  $\cosh\left(\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \cdot t\right) = \cos\left(i\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \cdot t\right)$

$x(t)$  löst die DGL. In diesem Fall tritt keine Schwingung mehr auf.

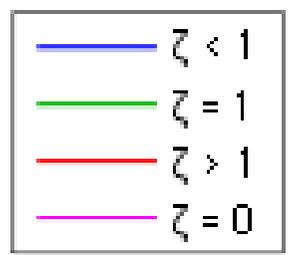
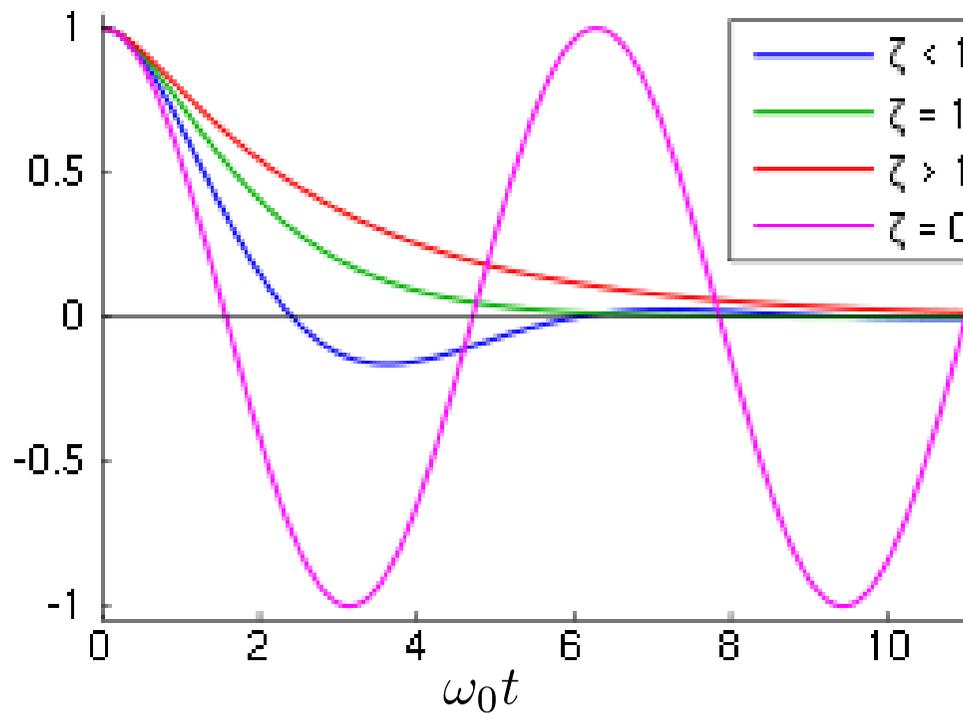
**c) Aperiodischer Grenzfall (kritische Dämpfung):**  $\gamma = \omega_0$

Bei gegebener Auslenkung  $A$  erreicht  $x(t)$  am schnellsten den Grenzwert  $x(\infty)$  !

Ein Ansatz für  $x(t)$  ist  $x(t) = f(t) \cdot e^{-\gamma t}$  ( $\omega_0 = \gamma$ )

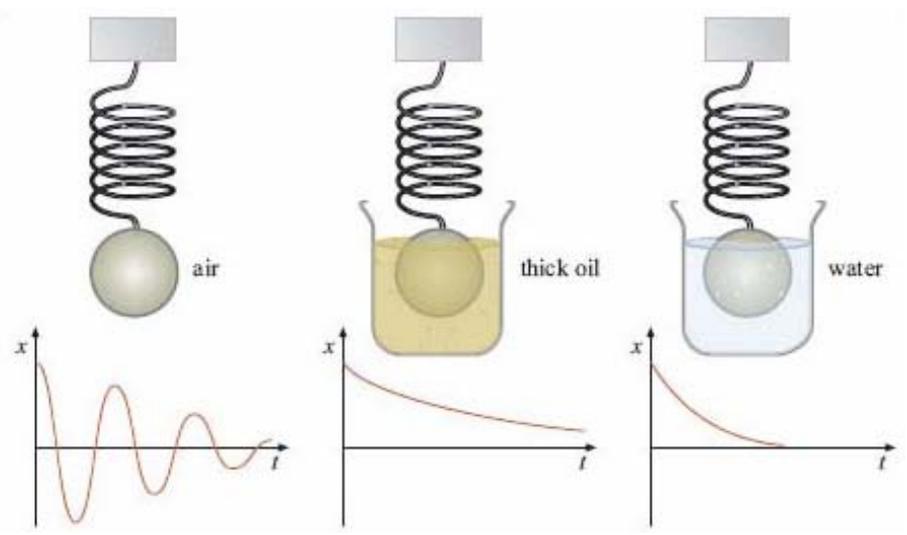
mit der Lösung  $f(t) = A(1 + \gamma \cdot t)$

Somit  $x(t) = A(1 + \gamma \cdot t) \cdot e^{-\gamma t}$



- $\zeta < 1$  unterkritisch gedämpft
- $\zeta = 1$  kritisch gedämpft
- $\zeta > 1$  überkritisch gedämpft
- $\zeta = 0$  ungedämpft

$$\zeta = \gamma / \omega_0$$



Beispiel für  
experimentelle  
Realisierungen

### 5.3. Die erzwungene Schwingung, Resonanz

Ein weiterer Term tritt zur DGL des harmonischen Oszillators hinzu, wenn dieser periodisch angetrieben wird.

$$\ddot{x} + 2\gamma \cdot \dot{x} + \omega_0^2 x = A_0 \cdot \cos \omega t$$

Amplitude

periodisch getriebener  
harmonischer Oszillator

Die Lösung der DGL ergibt sich aus einer allgemeinen Lösung der harmonischen Gleichung und einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung.

Ein Ansatz ist

$$x(t) = \underbrace{A_1 \cdot e^{-\gamma t} \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi_1)}_{\text{Einschwingvorgang}} + \underbrace{A \cdot \cos(\omega t + \varphi)}_{\text{stationäre Lösung}}$$

Die Werte für  $A$  und  $\phi$  können durch Einsetzen gefunden werden. Dies ist wesentlich eleganter in einem komplexen Ansatz.

Man findet:

$$\text{Für die Phase: } \tan \varphi = -\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Die Phasenverschiebung ist negativ, d.h. die erzwungene Schwingung „hinkt“ der Erregerschwingung hinterher.

$$\text{Für die Amplitude: } A(\omega) = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}$$

Die Amplitude ist maximal, wenn:  $\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$

Dann ist:

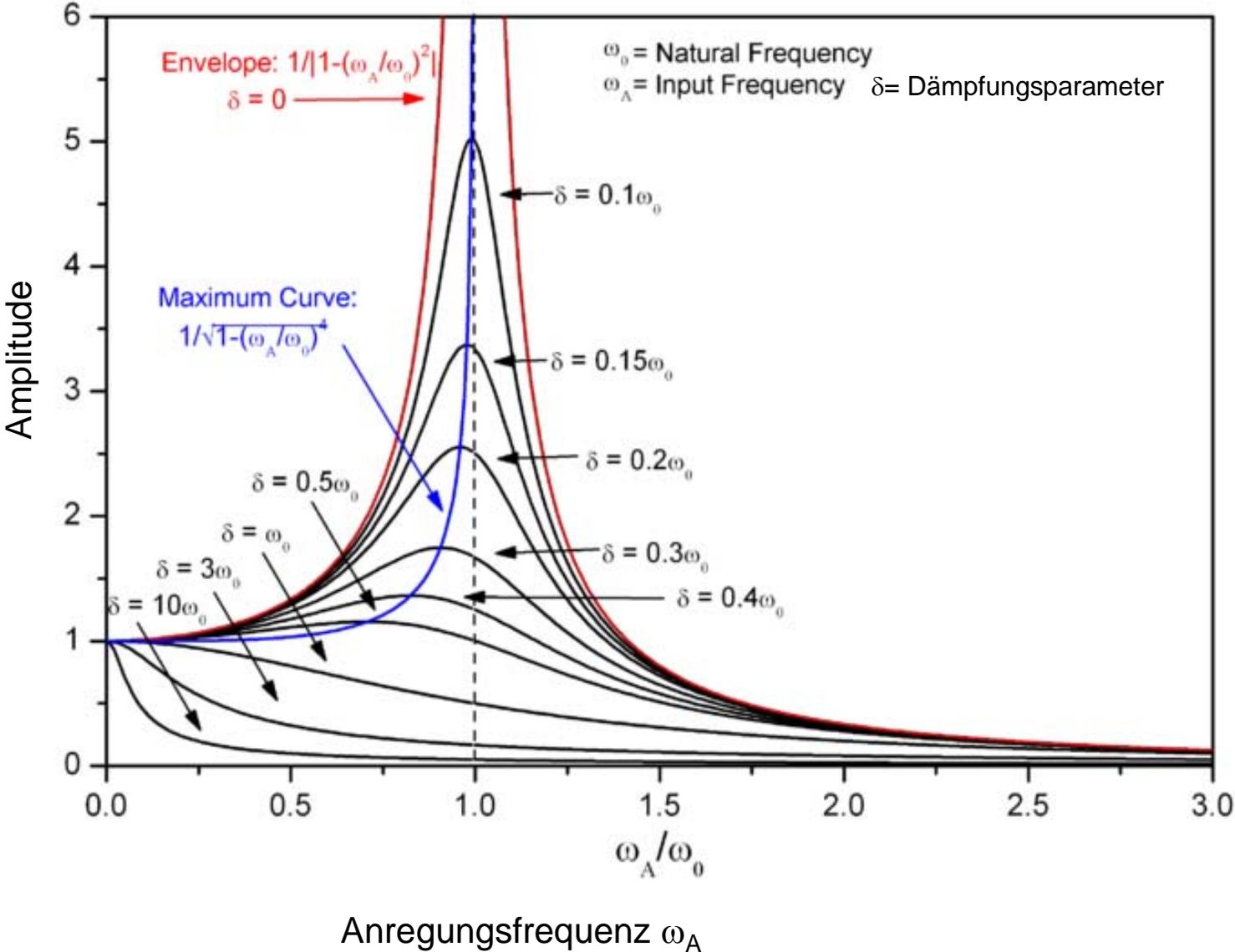
$$A_R(\omega_R) = \frac{A_0}{2\gamma \cdot \omega_0}$$

Man spricht von **Resonanz**.

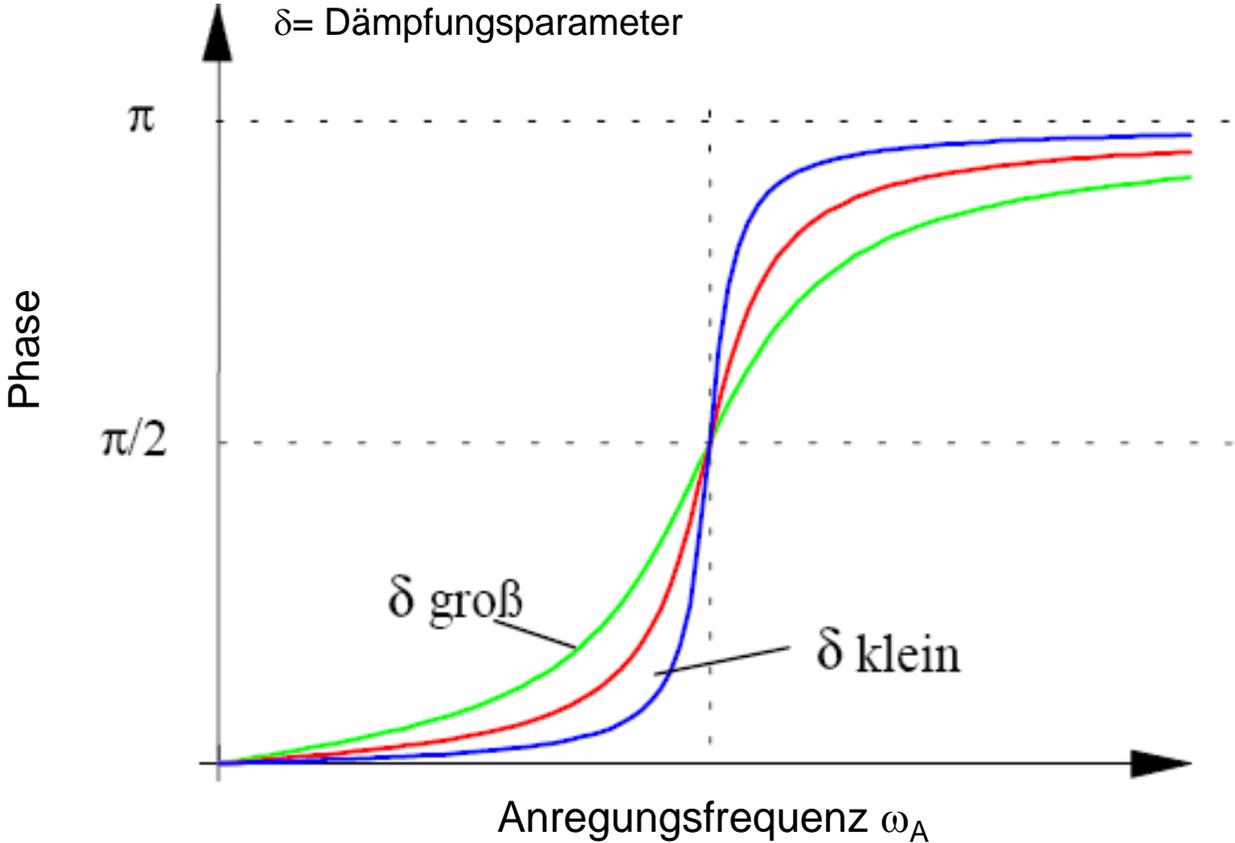
Die Resonanzfrequenz ist bei Dämpfung etwas kleiner als die Frequenz  $\omega_0$  der freien Schwingung.

Falls:  $\omega_0 \gg \gamma$  folgt  $\omega_R \approx \omega_0$

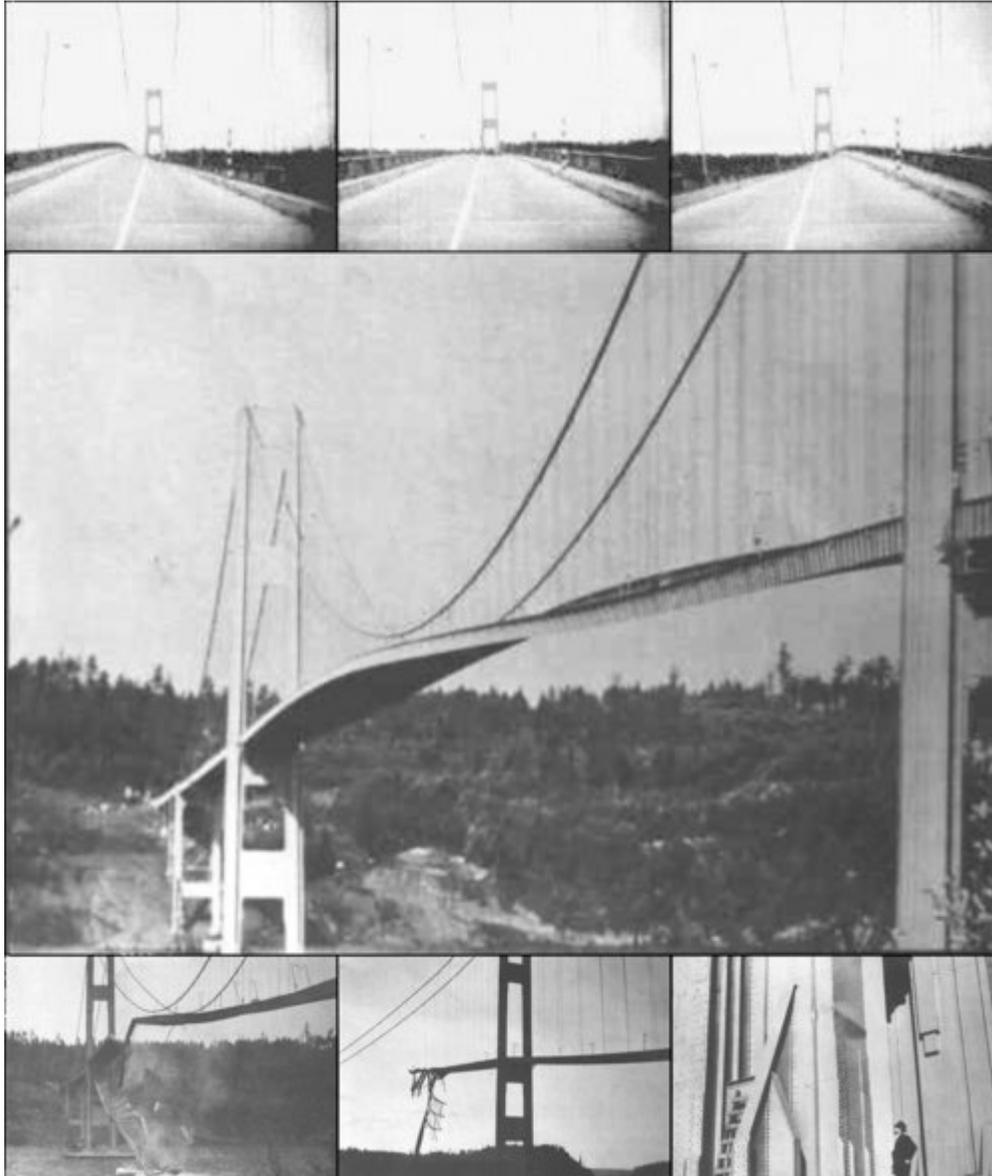
# Maximale Amplitude und Phänomen der Resonanz



Relative Phase der erzwungenen Schwingung im Resonanzfall



## Destruktive Wirkung von Resonanz:



1940 geriet die Tacoma Narrows Brücke in den USA durch starken Wind in eine resonante Schwingung und wurde zerstört.

Eine ähnliches „Resonanzproblem“ entstand bei der Eröffnung der Millenium Bridge in London.

## 5.4. Energiebilanz im harmonischen Oszillator

Die Gesamtenergie des harmonischen Oszillators setzt sich zusammen aus dem Anteil der kinetischen Energie

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

und dem Anteil der potentiellen Energie:

$$E_{\text{pot}} = \int_0^x F \, dx = \int_0^x m \cdot \omega_0^2 \cdot x \, dx = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2$$

Für eine harmonische Bewegung

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

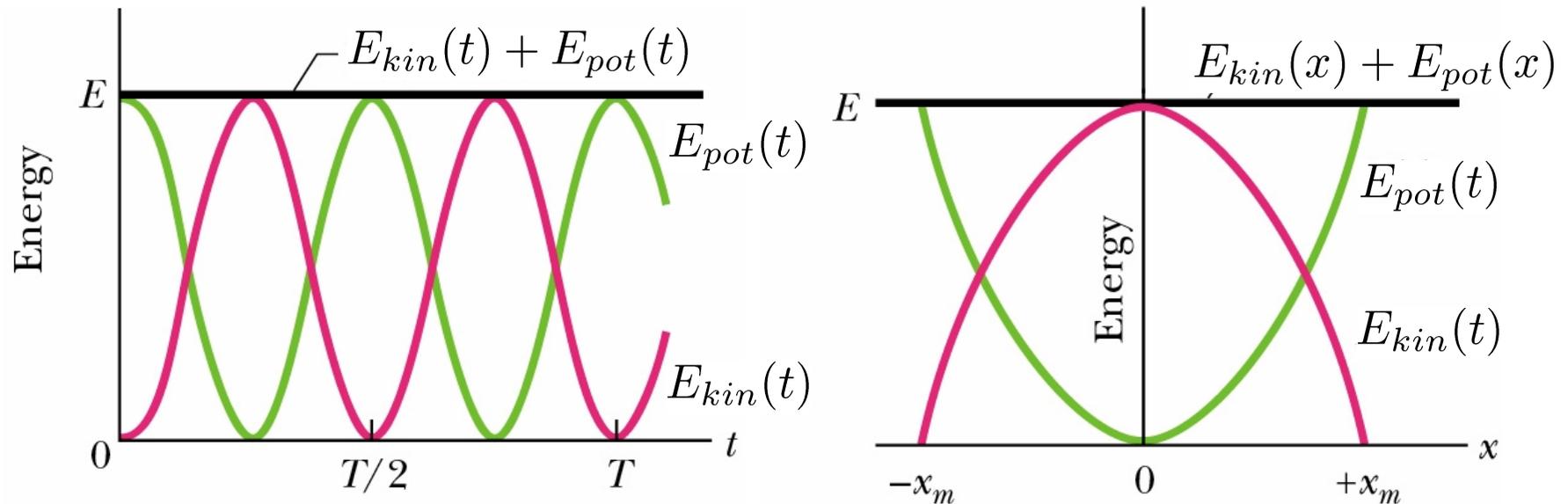
folgt:

$$\begin{aligned} E_{\text{ges}} &= \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi) \\ &= \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2 = \text{const.} \end{aligned}$$

Für die Mittelwerte über eine Schwingungsperiode  $T$  ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 \langle E_{\text{kin}} \rangle &= \int_0^T \frac{1}{2} m \dot{x}^2 dt = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 \int_0^T \sin^2(\omega t + \varphi) dt \\
 &= \frac{1}{4} m \omega_0^2 A^2 \\
 &= \langle E_{\text{pot}} \rangle
 \end{aligned}$$

Kinetische und potentielle Energie als Funktion der Zeit und des Ortes:



## 6. Systeme von Massenpunkten

### 6.1. Grundgrößen

Obwohl im folgenden nur Stöße zwischen zwei Körpern betrachtet werden, ist es nützlich einige allgemeine Begriffe für Systeme von  $N$  Massepunkten zusammenzustellen:

**Def.:** Der Schwerpunkt  $\vec{r}_s$  eines Systems von  $N$  Massenpunkten ist

$$\vec{r}_s = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i$$

**Def.:** Der Gesamtimpuls  $\vec{P}$  eines Systems von  $N$  Massenpunkten ist

$$\begin{aligned} P = M \cdot \vec{v}_s &= M \cdot \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{M} = \sum \vec{p}_i \\ &= M \cdot \frac{\sum m_i \dot{\vec{r}}_i}{M} = M \dot{\vec{r}}_s \end{aligned}$$

Wirken auf das System keine äußeren Kräfte (abgeschlossenes System), so ist  $P$  zeitlich konstant.

Wirkt eine äußere Kraft  $\vec{F}$  auf das System, so ist

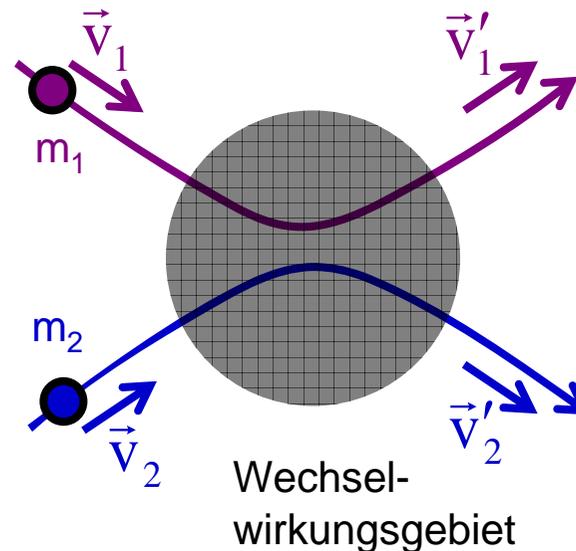
$$\vec{F} = \frac{d}{dt} \sum \vec{p}_i = \frac{d\vec{p}}{dt} = M \cdot \dot{\vec{v}}_s$$

Der Schwerpunkt eines beliebigen Systems von Massenpunkten bewegt sich wie ein einziger massiver Körper der Masse  $M = \sum m_i$ .

## Stoß zwischen zwei Teilchen

Prinzipielles Problem der Wechselwirkung zwischen zwei Teilchen.

Asymptotisch:  
Zweiteilchen-Stoßproblem



Die Grundgleichungen für Stöße zwischen zwei Teilchen sind Spezialfälle des Energie- und des Impulserhaltungssatzes:

**Impulserhaltungssatz:**  $p'_1 + p'_2 = p_1 + p_2$

**Energieerhaltungssatz:**  $\frac{p'^2_1}{2m} + \frac{p'^2_2}{2m} = \frac{p^2_1}{2m} + \frac{p^2_2}{2m} + Q$

Hierbei ist  $Q$  die innere Energie der Stoßpartner:

- $Q$  ist nur relevant bei Vorliegen einer inneren Struktur der Stoßpartner.
- $Q$  kann z.B. eine Erwärmung der stoßenden Körper sein

Man unterscheidet:

$Q = 0$  elastische Stoß

$Q < 0$  inelastischer Stoß

$Q > 0$  superelastischer Stoß

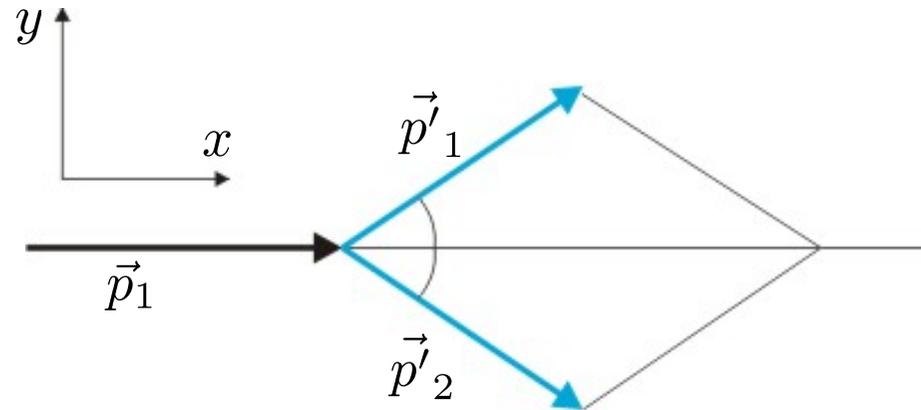
## 6.2. Elastische Stöße

O. B. d. A. sei der zweite Stoßparameter anfangs in Ruhe.

Es ist

$$p_1 = p'_1 + p'_2$$

$$\frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_2}$$



Wegen der Erhaltung des Drehimpulses ist die Bewegung in einer Ebene (x-y-Ebene).

Es ist nun in dem gewählten Koordinatensystem

$$p'_{2,x} + p'_{2,y} = p_2' \quad \text{und}$$
$$(p_1 - p'_{2,x})^2 + p_2'^2 = p_1^2$$



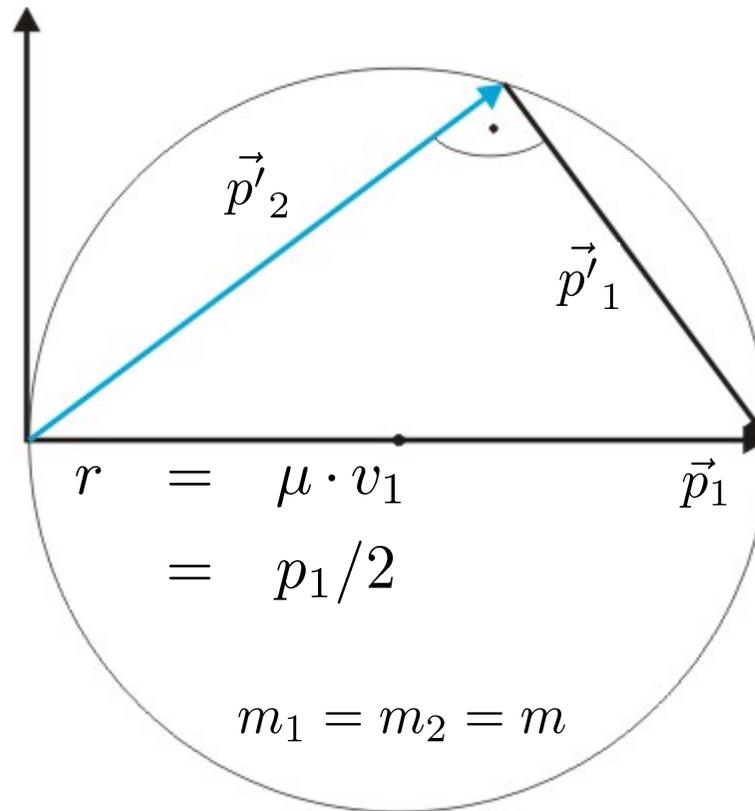
### Spezialfälle:

$$m_1 = m_2 = m$$

In diesem Fall ist

$$\mu = \frac{1}{2}m$$

$$r = \frac{p_1}{2}$$



$p_2'$  und  $p_1'$  stehen senkrecht aufeinander.

Für zentrale Stöße ist  $p_1' = 0$

Somit ist das erste Teilchen nach dem Stoß in Ruhe, d.h. es existiert ein Impulsaustausch.

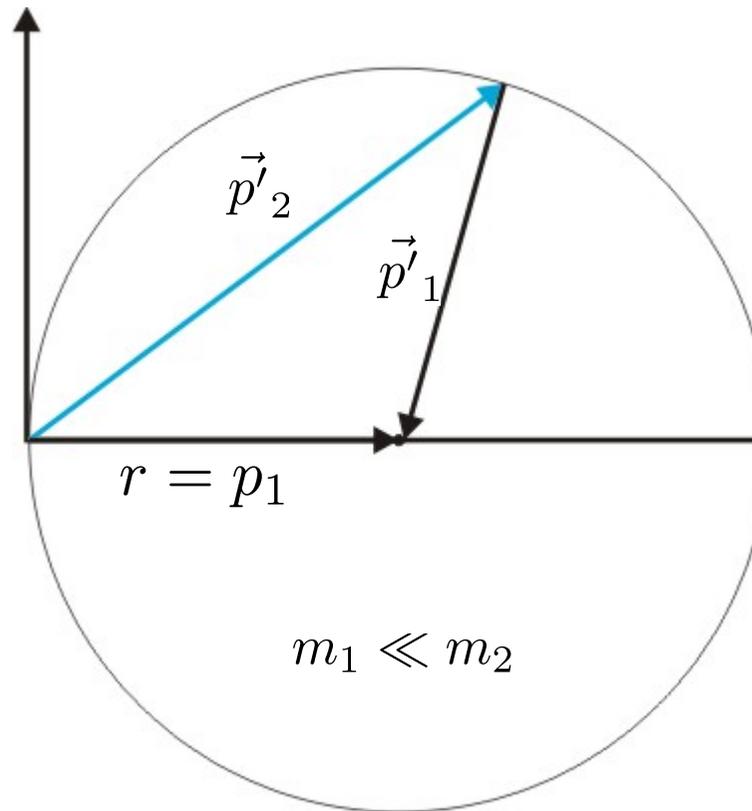
### Spezialfälle:

$$m_1 \ll m_2$$

In diesem Fall ist

$$\mu \approx m_1$$

$$r \approx p_1$$



Der maximale Impulsübertrag ist  $|p'_2|_{max} = 2r = 2p_1$

Die maximal übertragene kinetische Energie ist  $E_k^{max} = \frac{(2p_1)^2}{2m_2} = 4 \frac{m_1}{m_2} E_{k1}$

Ein Spezialfall ist die Reflexion eines Teilchens an einer Wand.

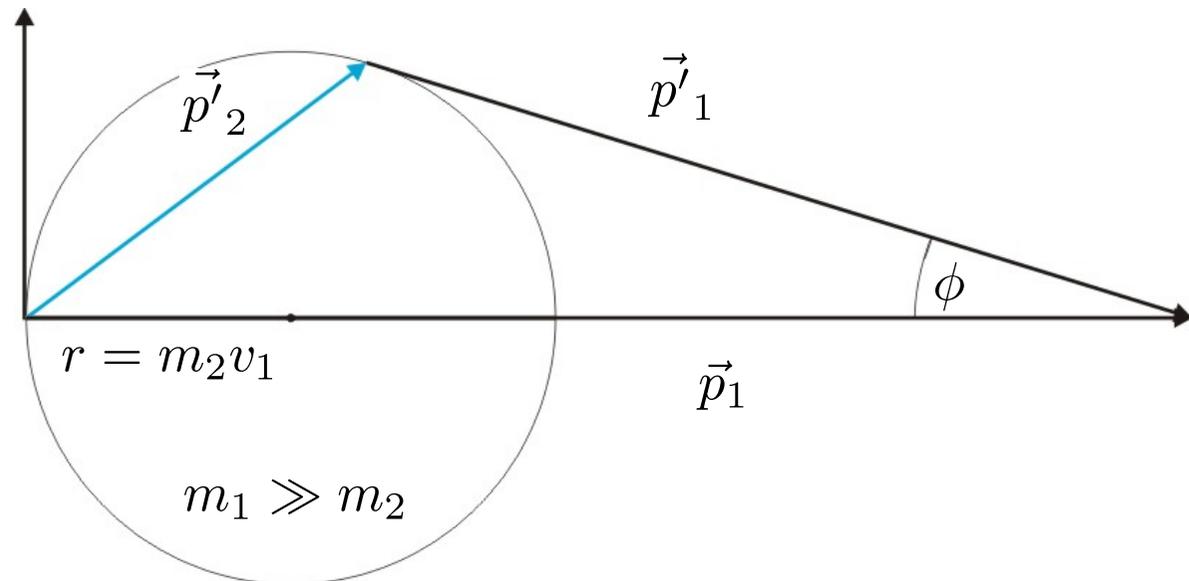
### Spezialfälle:

$$m_1 \gg m_2$$

In diesem Fall ist

$$\mu \approx m_2$$

$$r \approx m_2 v_1$$



Bei einem zentralen Stoß ist  $v_2' = 2v_1$

Die in diesem Fall übertragene kinetische Energie ist  $E_k = \frac{m_2}{2} v_2'^2 = 4 \frac{m_2}{m_1} E_{k1}$

Es existiert ein maximaler Ablenkwinkel  $\sin \phi = \frac{m_2}{m_1}$

## Schwerpunktsystem:

Falls keiner der Stoßpartner vor dem Stoß ruht, erlaubt eine Transformation in das Schwerpunktsystem eine einfachere Beschreibung.

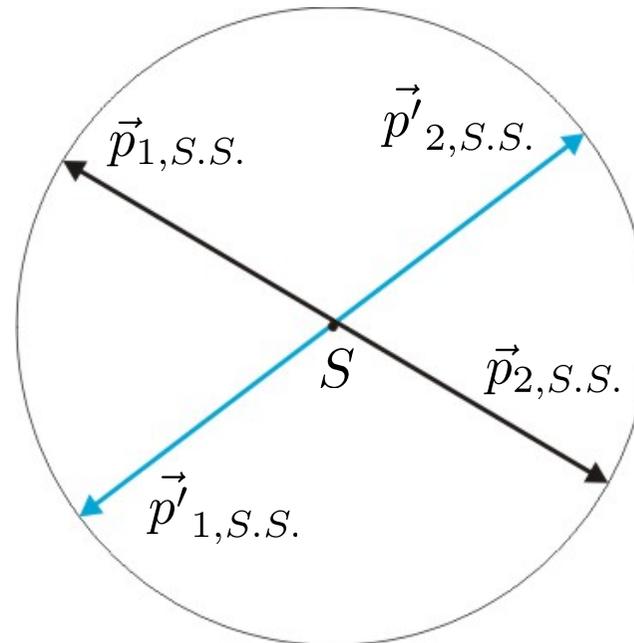
Die Impulse der Stoßpartner müssen geeignet in das S.S. transformiert werden.

Da im S.S. der Gesamtimpuls verschwindet ist:

$$\vec{p}_{1,S.S.} = -\vec{p}_{2,S.S.}$$

$$\vec{p}'_{1,S.S.} = -\vec{p}'_{2,S.S.}$$

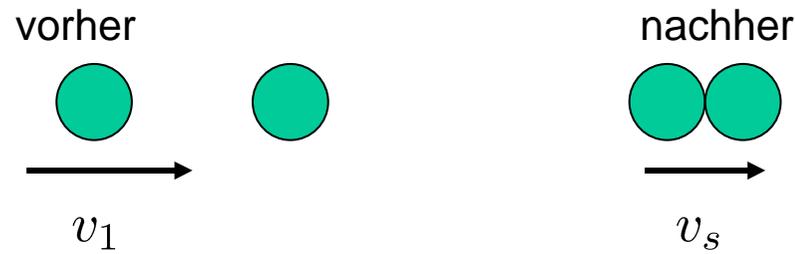
Somit kann ein elastischer Stoß durch eine reine Drehung der Impulsvektoren dargestellt werden.



## 6.3. Inelastische Stöße

Es gelten Impulserhaltung und der Energiesatz mit  $Q < 0$

Im Grenzfall des maximal inelastischen Stoßes bleiben die Stoßparameter nach dem Stoß zusammen:



Sie bewegen sich somit nach dem Stoß mit der Schwerpunktgeschwindigkeit

$$v_s = \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2}$$

Für  $Q$  folgt dann

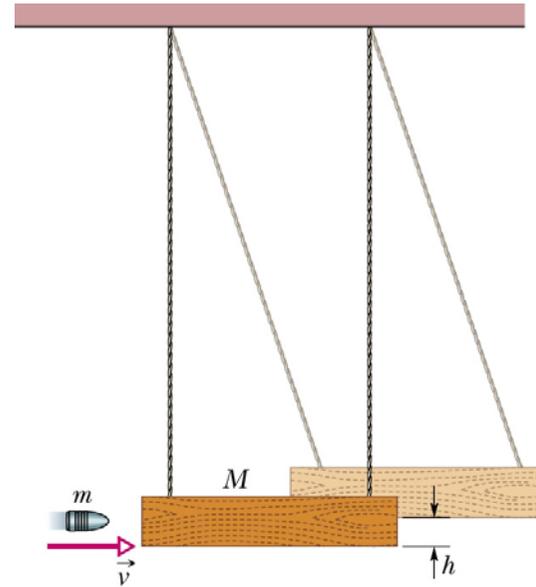
$$Q = -\frac{1}{2} \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2 = -\frac{1}{2} \cdot \mu \cdot v_{12}^2$$

Beispiele:

a) Schuss eines Projektils in eine Wand

Bei einem sehr schweren Stoßpartner wird die gesamte kinetische Energie (des Projektils) umgewandelt.

$$Q = -E_{\text{kin}} = -\frac{1}{2}m_1v_1^2$$



b) Frontaler Zusammenstoß (gesamte kinetische Energie wird umgewandelt)

Bei einem Frontalzusammenstoß wird die gesamte kinetische Energie umgewandelt.

$$Q = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

