WS 2009/2010

Probeklausur
Modul P1a: Einführung in die Klassische Mechanik und Wärmelehre
8. Januar 2010

Nachname, Vorname ....

Matrikel-Nr.: ....

Studiengang: ....

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**Summe**
maximale Punktzahl	5	8	10	11	8	11	12	17	18	100
erreichte Punktzahl										

Aufgabe 1
(5 Punkte)

(a) Das drittes Keplersches Gesetz verknüpft die Umlaufzeiten T eines Planeten mit dessen Bahnradius R, der Gravitationskonstante G aus Newtons Gravitationsgesetz ($F = G\, m_1\, m_2 / R^2$) und der Sonnenmasse M_S. Welche Kombination der Faktoren R, G und M_S liefert die korrekte Einheit für die Planetenumlaufzeit?

(Es geht nicht darum, das 3. Keplersche Gesetz exakt aufzuschreiben, sondern die Beziehung der Einheiten zu finden.)

(2 Punkte)

(b) Unter Druck p versteht man in der Physik als die auf eine Fläche A senkrecht wirkende Kraft F pro Flächeneinheit: $p = F / A$.
Das menschliche Trommelfell hat eine für die Schallaufnahme effektive Größe von etwa 0,5 cm² und hält eine Kraft von maximal 750 mN aus. Welchem maximalen Luftdruck p entspricht dies? Geben Sie das Ergebnis in den Einheiten **N/mm²** und **mbar** an.

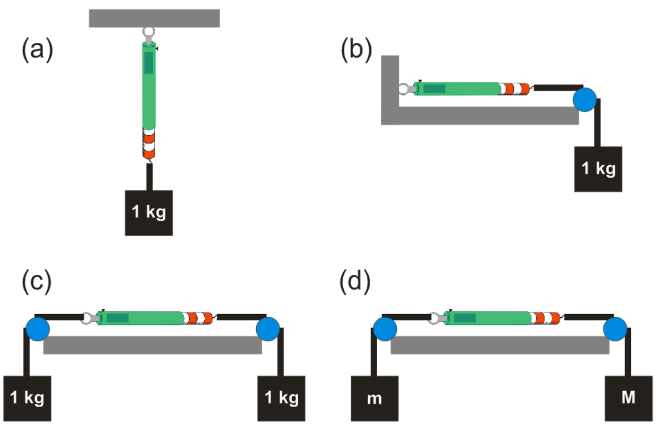
(1 bar = 100 000 N/m²)

(3 Punkte)

Aufgabe 2
(8 Punkte)

(a) Ein Gewicht der Masse 1 kg hängt an einer (gewichtslosen) Schnur, die an einer Federwaage befestigt ist, welche wiederum von der Decke herab hängt. Welchen Wert zeigt die Federwaage an (Kraft in N)?

(1 Punkt)



(b) In einer zweiten Anordnung läuft die Schnur zwischen Federwaage und Gewicht (1 kg) über eine Rolle. Das Gewicht hängt dabei über die Tischkante, während die Federwaage an der Wand befestigt ist. Welcher Wert wird nun angezeigt?

(1 Punkt)

(c) In einer dritten Anordnung wird die Federwaage zwischen zwei 1-kg-Gewichten eingespannt, die jeweils, von einer Rolle umgelenkt, über die Tischkante hängen. Welchen Wert zeigt die Federwaage an?

(1 Punkt)

(d) Welchen Wert zeigt die Federwaage an, wenn die beiden Gewichte unterschiedliche Massen m und M besitzen ($M > m$)? Wie werden diese Massen jeweils beschleunigt?

(5 Punkte)

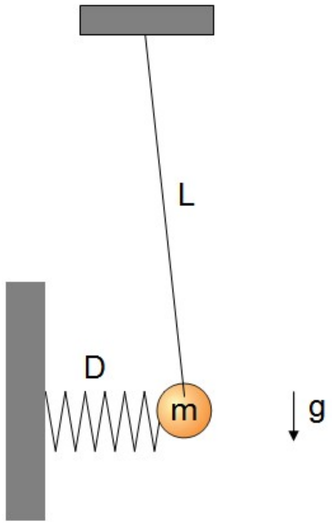
Aufgabe 3
(10 Punkte)

Ein Feuerwerkskörper wird mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 unter einem Winkel α zur Horizontalen abgefeuert. Am höchsten Punkt der Flugbahn explodiert die Rakete in zwei Bruchstücke gleicher Masse. Die Geschwindigkeit eines der Teile ist unmittelbar nach der Explosion gleich null und stürzt senkrecht nach unten. Wie weit vom Abschusspunkt entfernt trifft das zweite Teil auf?

(Vernachlässigen Sie die Luftreibung, und nehmen Sie an, dass der Erdboden eben ist.)

Aufgabe 4
(11 Punkte)

Die Masse m eines Fadenpendels der Länge L wird mit einer Feder mit Federkonstante D verbunden. In tiefsten Punkt des Pendels (d.h. bei $\alpha = 0$) wird die Feder um die Strecke x_0 aus ihrer Gleichgewichtslage eingedrückt.



(a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für die Pendelauslenkung α auf. Zeigen Sie, dass im Fall kleiner Auslenkungen ($\alpha << 1$) die allgemeine Lösung die folgende Form hat:
$\alpha(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) + \alpha_R$

(5 Punkte)

(b) Geben sie die Schwingungsperiode T und die Ruhelage α_R als Funktion von m, L und D an.

(3 Punkte)

(c) Wie lautet die Lösung, wenn das Pendel zum Zeitpunkt 0 in die Position $\alpha = 0$ gebracht und losgelassen wird?

(3 Punkte)

(Nehmen Sie näherungsweise an, dass eine Auslenkung der Feder senkrecht zu ihrer Achse keine rücktreibende Kraft zur Folge hat, und vernachlässigen Sie Reibungseffekte. Das Pendel schwingt im Gravitationsfeld der Erde.)

Aufgabe 5: (8 P.)
Gegeben seien die Vektoren:

$$\boldsymbol{\alpha} = (1,0,1)\,;\ \boldsymbol{\beta} = (0,-2,3)\,;\ \boldsymbol{\gamma} = (0,1,-1)$$

Berechnen Sie:

a) die Skalarprodukte

$$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\gamma},\ \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\alpha} \qquad \text{(2 P.)}$$

b) das Vektorprodukt

$$\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\gamma} \quad \text{(2 P.)}$$

c) das Spatprodukt

$$\boldsymbol{\alpha}\cdot(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\gamma}) \qquad \text{(2 P.)}$$

d) das doppelte Vektorprodukt:

$$\boldsymbol{\alpha}\times(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\gamma}). \quad \text{(2 P.)}$$

Aufgabe 6: (11 P.)
Gegeben sei die Bahnkurve

$$\mathbf{r}(t) = \left(t, \sqrt{3}\cos t, \sqrt{3}\sin t\right)$$

(t: dimensionsloser Parameter)

a) Berechnen Sie die Bogenlänge $s(t)$, wobei $s(t=0)=0$ angenommen werden soll. Geben Sie die natürliche Parametrisierung der Raumkurve an! (6 P.)
b) Bestimmen Sie den Tangenteneinheitsvektor $\hat{\mathbf{t}}(s)$ und die Krümmung κ! (4 P.)
c) Berechnen Sie den Normaleneinheitsvektor! (1 P.)

Aufgabe 7: (12 P.)
Σ sei ein Inertialsystem; Σ' rotiere relativ zu Σ um die gemeinsame z-Achse mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω. Die Ursprünge von Σ und Σ'

sollen zusammenfallen. Bei Benutzung von Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z) gilt für die Beschleunigung eines Massenpunkts *m*:

$$\mathbf{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\mathbf{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\mathbf{e}_\varphi + \ddot{z}\mathbf{e}_z$$

a) Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Koordinaten (ρ', φ', z') in Σ' und denen in Σ? (2 P.)

b) In Σ gelte für den Massenpunkt *m*:

$$\dot{\rho} = v_0 = const, \dot{\varphi} = 2\omega = const, \dot{z} = \dot{z}_0 = const$$

mit den Anfangsbedingungen:

$$\rho(t=0) = \rho_0, \varphi(t=0) = 0, z(t=0) = 0$$

Welche Kraft $\mathbf{F} = F_\rho \mathbf{e}_\rho + F_\varphi \mathbf{e}_\varphi + F_z \mathbf{e}_z$ wirkt in Σ auf den Massenpunkt *m*? Drücken Sie diese durch *m*, ω, v_0 und ρ_0 aus! (5 P.)

c) Welche Kraft wirkt in Σ' auf den Massenpunkt? (5 P.)

Aufgabe 8: (17 P.)
Ein Massenpunkt *m* bewegt sich vertikal (z-Richtung) im Schwerefeld der Erde. Er unterliegt dabei einer Reibungskraft der Form

$$F_R = -\alpha \cdot |\dot{z}| \cdot \dot{z} \quad (\alpha > 0)$$

a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf! (2 P.)

b) Leiten Sie aus a) eine Differentialgleichung für die Geschwindigkeit ab! (1 P.)

c) Beweisen Sie, dass gilt:

$$\int dx \frac{1}{1-\gamma^2 x^2} = \frac{1}{2\gamma} \ln \frac{1+\gamma x}{1-\gamma x} + c \qquad \text{(3 P.)}$$

d) Lösen Sie die Bewegungsgleichung für die Geschwindigkeit aus b) mit der Anfangsbedingung

$$\dot{z}(t=0) = 0$$

Sie können dazu das Integral aus c) benutzen. Skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf von $\dot{z}(t)$! (8 P.)

e) Welche Form der Fallbewegung würde sich bei einer Anfangsgeschwindigkeit

$$\dot{z}(t=0) = -\sqrt{\frac{m}{\alpha}g}$$

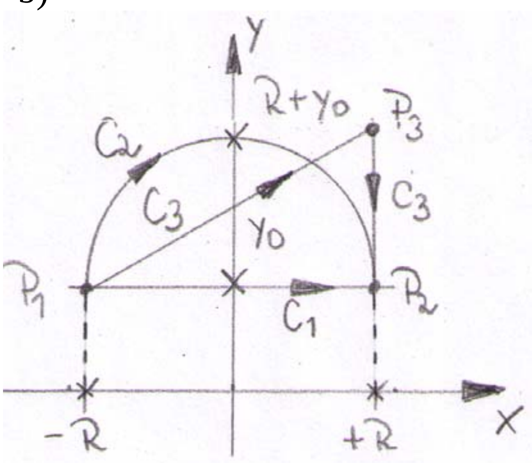
ergeben? (3 P.)

Aufgabe 9: (18 P.)
Auf einen Massenpunkt *m* wirke die Kraft

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(x,y,z) = \alpha m(xy,0,0)$$

a) Stellen Sie fest, ob **F** eine konservative Kraft ist! (3 P.)

b)



P_1, P_2 und P_3 seien 3 Punkte in der xy-Ebene mit den Koordinaten
$P_1:(-R,y_0);\, P_2:(R,y_0);\, P_3:(R,R+y_0)$

Welche Arbeit ist zu leisten, um den Massenpunkt im Feld **F** von P_1 nach P_2

1. parallel zur x-Achse auf dem Weg C_1,
2. auf dem Kreisbogen C_2 in der xy-Ebene,
3. auf dem Weg C_3 in der xy-Ebene linear von P_1 nach P_3, und dann parallel zur y-Achse von P_3 nach P_2

zu verschieben? (15 P.)