13. Übungsblatt zur VL
Einführung in die Klassische Mechanik und Wärmelehre
Modul P1a, 1. FS BPh
19. Januar 2010

Aufgabe 13.1: Trägheitsmoment

Einleitung: Das Trägheitsmoment *I* eines festen, rotierenden Körpers gibt eine Verknüpfung zwischen seinem Drehimpuls und dessen Winkelgeschwindigkeit. Es gelten damit für Rotationsbewegungen formal ähnliche Beziehungen, wie für Translationsbewegungen:

Translation		**Rotation**	
Ortskoordinate	r	Winkelkoordinate	φ
Masse	m	Trägheitsmoment	I
Impuls	$p = m \cdot v$	Drehimpuls	$L = I \cdot \omega$
Kraft	$\vec{F} = \mathrm{d}p/\mathrm{d}t$	Drehmoment	$D = \mathrm{d}L/\mathrm{d}t$
Kinet. Energie	$E_K = \frac{m}{2}v^2$	Rotationsenergie	$E_R = \frac{1}{2}I\omega^2$

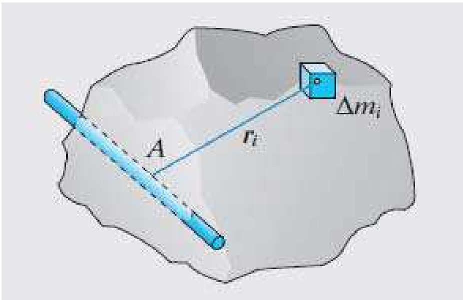
Bewegungsleichung:

$$x = \frac{1}{2}\frac{a}{m}t^2 + v_0 t + x_0$$

Bewegungsgleichung:

$$\varphi = \frac{1}{2} \cdot \frac{D}{I}t^2 + \omega_0 t + \varphi_0$$

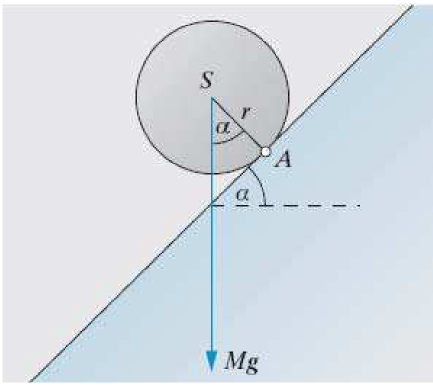
Das Trägheitsmoment ist stets für eine gegebene Achse *A* definiert. Für einen Körper mit einem Volumen *V* und einer Dichteverteilung in diesem Volumen $\rho(\mathbf{r})$ kann man das Trägheitsmoment berechnen aus



$$I = \int_V r_i^2 \, \rho(r_i) \, dV$$

wobei hier über alle Volumenelemente *dV* in dem Körper integriert wird und r_i der senkrechte Abstand zu der Drehachse an jedem dieser Volumenelemente ist.

Aufgabe: Drei rotationssymmetrische Körper rollen eine schiefe Ebene mit Winkel α zur Horizontalen herunter (s. Bild):



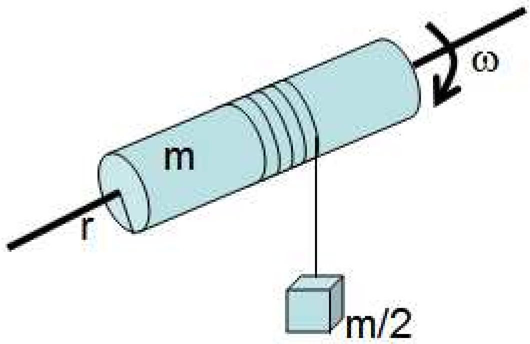
(1.) ein homogen gefüllter Vollzylinder mit Dichte ρ, Radius *r* und Länge *L*,
(2.) ein Hohlzylinder derselben Dichte und Länge, mit Außendurchmesser (2 *r*) und Innendurchmesser ($2\, r_{\text{innen}}$)
(3.) und eine Kugel derselben Dichte, mit Radius *r*.

Wie schnelle rollen diese drei Körper die Ebene hinunter? Welcher rollt dabei am schnellsten?

(Reibung soll vernachlässigt werden.)

Aufgabe 13.2: Rotator

Auf einer Trommel vom Radius *r* und der Masse *m* ist ein Seil (gewichtslos) gewickelt, an dem die Masse *m*/2 hängt. Berechnen Sie die Winkelgeschwindigkeit ω der Trommel als Funktion der Zeit. Wie groß muss der Radius der Trommel sein, wenn nach einer Minute die Drehzahl f = 94 /s erreicht werden soll?



Hinweis: Das Trägheitsmoment eines Vollzylinders ist $I = ½\, m\, r^2$.

Aufgabe 13.3: Oberflächenspannung

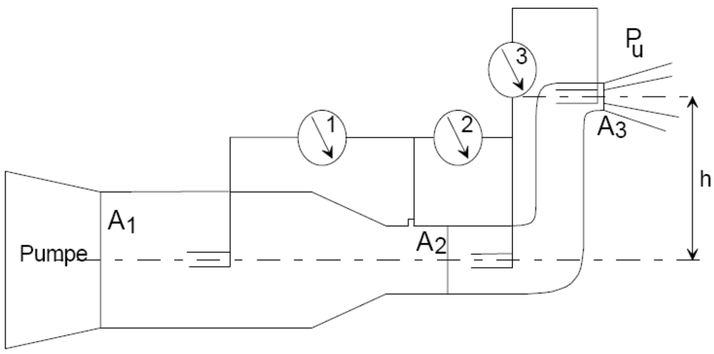
Eine Kupferkugel liege auf einer Wasserfläche. Bestimmen Sie Ihren maximalen Radius. Hinweis: Oberflächenspannung von Wasser: 0,073 J/m², Dichte von Kupfer: 8,96 g/cm³.

Aufgabe 13.4: Viskosität

Durch ein horizontales Rohr (Innendurchmesser 1,2 mm, Länge 25 cm) fließt Wasser mit der Flussgeschwindigkeit 0,3 ml/s. Die Viskosität von Wasser ist 1 mPa/s. Welcher Druckunterschied wird hierfür benötigt? Bei welchem Rohrdurchmesser würde man ausgehend davon die doppelte Flussgeschwindigkeit erhalten?

Aufgabe 13.5: Pumpe

Eine Pumpe fördert mit dem Volumenstrom j = 500 l/s eine Flüssigkeit der Dichte ρ = 750 kg/m³ durch eine Rohrleitung variablen Querschnitts (A_1 = 0,3 m², A_2 = 0,2 m², A_3 = 0,1 m², h = 5 dm). Der Außendruck ist p_u = 1013 hPa.



(a) Mit welcher Geschwindigkeit strömt die Flüssigkeit aus?

(b) Welche Druckdifferenzen zeigen die Manometer 1 bis 3 an?

(c) Welcher statische Druck herrscht am Pumpenausgang in der Flüssigkeit?

Aufgabe 13.6:

a) Ein starrer Körper besitze den Trägheitstensor $\underline{\underline{J}} = \left(J_{ij}\right)$, wobei sich dieser auf ein körperfestes Koordinatensystem Σ bezieht, dessen Ursprung mit dem Schwerpunkt zusammenfällt. Wie ändert sich der Trägheitstensor für ein Koordinatensystem Σ', das bei parallelen Achsen um den Vektor **a** gegenüber Σ verschoben ist? (verallgemeinerter Steinerscher Satz)

b) Zeigen Sie, dass sich der Trägheitstensor bei einer Drehung des körperfesten Koordinatensystems wie folgt transformiert

$$J'_{nm} = \sum_{i,j} d_{ni} d_{mj} J_{ij}$$

dabei sind d_{ij} die Elemente der orthogonalen Drehmatrix.

Aufgabe 13.7:

Gegeben sei ein Quader mit den Kantenlängen a, b, c und homogener Massendichte ρ_0.

a) $\hat{\Sigma}$ sei ein körperfestes, kartesisches Koordinatensystem mit seinem Ursprung in der linken unteren Quaderecke und Achsen längs der Quaderkanten. Bestimmen Sie den Trägheitstensor $\underline{\underline{\hat{J}}}$!

b) Der Quader rotiere mit der Winkelgeschwindigkeit ω um seine Raumdiagonale. Berechnen Sie über den Trägheitstensor das Trägheitsmoment bzgl. dieser Achse!

c) $\overline{\Sigma}$ sei ebenfalls ein körperfestes, kartesisches Koordinatensystem mit Achsen parallel zu denen von $\hat{\Sigma}$ aus a). Der Ursprung liege nun aber im Quader-Schwerpunkt. Bestimmen Sie den Trägheitstensor $\underline{\underline{\overline{J}}}$! Wie sieht jetzt das Trägheitsmoment für die Rotation um die Raumdiagonale aus?

d) Benutzen Sie die in a) und c) bestimmten Trägheitstensoren zur Festlegung der Trägheitsmomente bzgl. einer Rotationsachse, die mit einer Quaderkante (z. B. in y-Richtung) zusammenfällt, und einer dazu parallelen Achse durch den Quaderschwerpunkt. Verifizieren Sie den Steinerschen Satz!