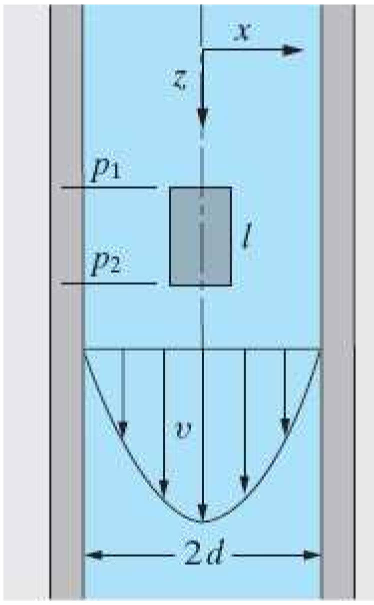
14. Übungsblatt zur VL
Einführung in die Klassische Mechanik und Wärmelehre
Modul P1a, 1. FS BPh
26. Januar 2010

Aufgabe 14.1: Strömungsprofile



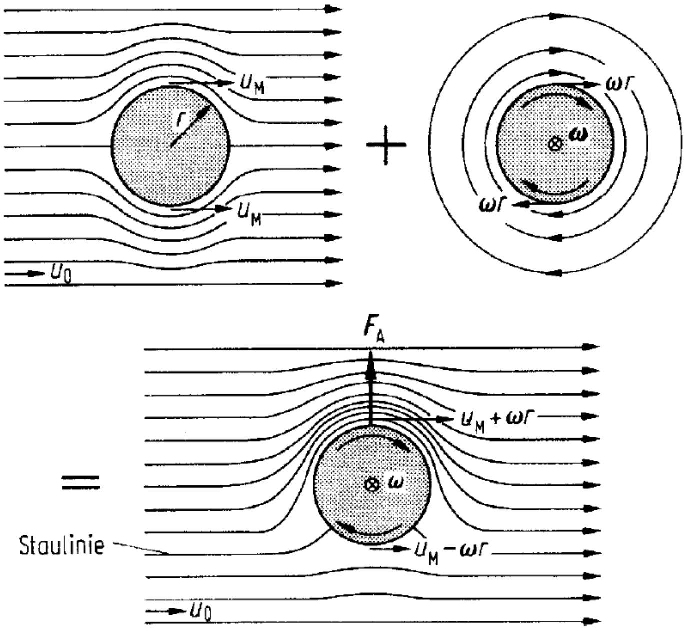
a) Eine Flüssigkeit mit der Viskosität η fließt durch zwei planparallele Platten mit Abstand 2 d. Durch Reibung wird die Flüssigkeit zu den Rändern hin abgebremst. Außerdem herrscht entlang der z-Richtung ein Druck $p(z)$.
Berechnen Sie das Geschwindigkeitsprofil $v(x, z)$ dieser Flüssigkeit.

b) Wie lautet das Strömungsprofil v(r) durch ein rundes Rohr mit Radius R und der Länge L, zwischen dessen Enden ein Druckgefälle Δp herrscht?

Aufgabe 14.2: Blut

Blut braucht etwa 1 s, um durch eine 1 mm lange Arterie zu fließen. Wenn die Arterie 7 µm im Durchmesser ist und der Blutdruck 2,6 kPa beträgt, wie groß ist dann die Viskosität des Bluts?

Aufgabe 14.3: Magnus-Effekt



Der Magnus-Effekt, benannt nach seinem Entdecker Heinrich Gustav Magnus (1802-1870), ist ein Phänomen der Strömungsmechanik: Eine rotierende Walze mit Radius *r* erzeugt aufgrund von Reibungseffekten eine Rotation eines sie umgebenden Gases (Dichte ρ) um sich herum. Wird die Walze zusätzlich von dem Gas mit der Geschwindigkeit *v* angeströmt, überlagern sich dessen Geschwindigkeiten. Das Resultat ist, dass das Gas die rotierende Walze auf einer Seite schneller umströmt als auf der anderen (im Ruhesystem der Walze). Auf der Seite der Walze, auf der die Reibungseffekte größer sind, fließt das Gas scheinbar schneller. Dies resultiert in einem „Ausweichen" der Walze – die Walze wird nach oben gedrückt (siehe Abbildung).

Leiten Sie aufgrund dieser (vereinfachten) Überlegung die resultierende Magnus-Kraft aus der Bernoulli-Gleichung her.

Aufgabe 14.4: Fußball

Eine genauere Betrachtung ergibt für die Kraft des Magnus-Effekts:

$$\vec{F}_M = 2\,\rho\, c_M\, V\,(\vec{\omega} \times \vec{v})$$

wobei *V* das Volumen des sich drehenden Körpers ist und c_M ein von der Körperbeschaffenheit abhängiger Korrekturfaktor ist.

Ein Fußballspieler will sich diesen Effekt zunutze machen, um in der 37. Spielminute eine Bananenflanke in das 25 m entfernte Tor zu schießen. Er zielt dabei zunächst auf die rechte obere Torecke, und sein Schuss erreicht eine Geschwindigkeit von 100 km/h.
Welchen Drall (Winkelgeschwindigkeit ω) muss er dem Ball geben, damit dieser eine Kurvenbahn beschreibt und genau in die linke Torecke trifft? In welche Richtung muss sich der Ball um die eigene Achse drehen?

Hinweise: Der Ball ist rund, wiegt 0,41 kg, hat einen Radius von 11 cm, und sein Magnus-Beiwert sei c_M = 0,15. Das Tor hat eine Breite von 7,32 m. Die Luftdichte sei 1,2 kg/m³.

Aufgabe 14.5:
Benutzen Sie die Lösung von Aufgabe 13.7 a), um den Trägheitstensor eines Würfels der Kantenlänge a mit homogener Massendichte für ein kartesisches Koordinatensystem anzugeben, dessen Ursprung in einer Würfelecke liegt, und dessen Achsen mit den Würfelkanten zusammenfallen. Berechnen Sie dazu die Hauptträgheitsmomente und Hauptträgheitsachsen!

Aufgabe 14.6:
x, y, z seien Größen, die eine Funktionalrelation der Form

$$f\left(x,y,z\right)=0$$

erfüllen. Verifizieren Sie die folgenden Beziehungen:

1. $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z=\frac{1}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z}.$
2. $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y=-1.$

Aufgabe 14.7:
Untersuchen Sie, ob *df* ein totales Differential ist:

1. $df=\sin x\cos y dx-\cos x\sin y dy$
2. $df=\cos x\sin y dx+\sin x\cos y dy$
3. $df=x^2y^3dx-y^2x^3dy$
4. $df=\left(\frac{\cos x}{x}-\ln\frac{x}{y}\cdot\sin x\right)dx-\frac{\cos x}{y}dy$

Aufgabe 14.8:
Für eine homogene Substanz mit der Molzahl *n* mögen folgende Beziehungen gelten:

$$\beta=\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p=\frac{nR}{pV}$$: (isobarer Volumenausdehnungskoeffizient)

$$\kappa_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = \frac{1}{p} + \frac{a}{V} \qquad : \text{(Kompressibilität)}$$

a ist eine Konstante, die anderen Bezeichnungen sind die üblichen. Wie lautet die Zustandsgleichung

$$f\left(T, p, V\right) = 0?$$

Aufgabe 14.9:
Die van der Waals-Gleichung beschreibt qualitativ den Übergang Gas $\rightarrow$ Flüssigkeit.

1. Drücken Sie die Konstanten a und b in der van der Waals-Gleichung durch V_c und T_c aus.
2. Formulieren Sie die van der Waals-Gleichung in den *reduzierten* Größen:

$$\pi = \frac{p}{p_c}\ ;\ v = \frac{V}{V_c}\,; t = \frac{T}{T_c}.$$

3. Berechnen Sie die isotherme Kompressibilität

$$\kappa_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$$

   für $V = V_c$. Welches Verhalten zeigt κ_T, wenn die Temperatur von oben her gegen T_c geht? Wie lässt sich dieses Verhalten physikalisch deuten?
4. Untersuchen Sie wie unter 3. den isobaren Volumenausdehnungskoeffizienten

$$\beta = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p .$$