5. Übungsblatt zur VL
Einführung in die Klassische Mechanik und Wärmelehre
Modul P1a, 1. FS BPh
10. November 2009

Aufgabe 5.1: Trägheitskräfte

Auf eine in einem Aufzug stehende Person (Masse 70 kg) wirken die Gewichtskraft $\boldsymbol{F}_G$ und gemäß dem 3. Newtonschen Axiom die Gegenkraft $\boldsymbol{F}$, die vom Boden des Aufzugs auf die Person wirkt. Welchen Betrag hat die Kraft $\boldsymbol{F}$, wenn der Aufzug
a) still steht,
b) sich mit der Beschleunigung a = 2,5 m/s² nach oben bewegt,
c) sich mit der Beschleunigung a = 2,5 m/s² nach unten bewegt,
d) frei fällt?

Aufgabe 5.2: Reibung

Ein quaderförmiger Körper mit der Masse m = 10 kg befinde sich in Ruhe auf einer schiefen Ebene (Winkel α = 20°).
a) Zerlegen Sie seine Gewichtskraft grafisch in die Komponenten parallel und senkrecht zur schiefen Ebene. Wie groß sind die Komponenten?
b) Wie groß ist die Beschleunigung, wenn der Körper reibungsfrei gleitet?
c) Nehmen Sie nun einen Haftreibungskoeffizienten von 0,66 an. Ein Körper bleibt dann durch Reibungskräfte auf schiefen Ebenen bis zu einem Grenzwinkel α_{grenz} in Ruhe. Bestimmen Sie α_{grenz} und entscheiden Sie, ob der Körper im vorliegenden Fall in Ruhe bleibt oder zu gleiten beginnt.

Aufgabe 5.3: Fallendes Seil

a) Ein Seil rutscht mit einem Seilende senkrecht und reibungsfrei über eine Tischkante. Berechnen sie die Geschwindigkeit und die Länge des fallenden Seilstücks in Abhängigkeit der Zeit. Die Dichte des Seils sei 1000 kg/m³, sein Durchmesser 10 mm.
b) Berücksichtigen Sie nun, dass der Tisch nur 1,5 m hoch ist, das Seil aber 3 m lang ist. Was ergibt sich nun für Geschwindigkeit und die Länge des fallenden Seilstücks?

Aufgabe 5.4: Raketengleichung

a) Eine Rakete wird im Weltall (Schwerelosigkeit & Vakuum) gestartet. Die Raketenhülle hat eine Masse von 12 t und transportiert eine Treibstoffmenge von anfänglich 170 t. Der Treibstoff wird dabei mit einer Geschwindigkeit v_T = 2500 m/s nach hinten ausgestoßen, und das kontinuierlich innerhalb einer Zeit von 600 s. Berechnen Sie Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung in Abhängigkeit der Zeit.
b) Nun wird dieselbe Rakete in einem homogenen Schwerefeld mit der Beschleunigung g = 9,81 m/s² gestartet. Berechnen sie nun Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung in Abhängigkeit der Zeit.
c) Die Rakete soll einen Satelliten von der Erdoberfläche aus in eine geostationäre Umlaufbahn bringen. Bestimmen Sie die Höhe dieser Umlaufbahn über der Erdoberfläche.
d) Kann man in Aufgabe c) zum Berechnen der Raketenflugbahn die Ergebnisse aus b) verwenden, wenn man Erdrotation und Atmosphäre vernachlässigt?

Aufgabe 5.5: Freier Fall mit Reibung

Eine Kugel der Masse m falle durch eine Flüssigkeit. Die auftretende Reibungskraft sei proportional zur Geschwindigkeit v der Kugel und dieser Geschwindigkeit entgegengerichtet: $F = -\gamma m v$

a) Stellen Sie die zugehörige Bewegungsgleichung auf (unter Vernachlässigung des Auftriebs der Kugel in der Flüssigkeit).

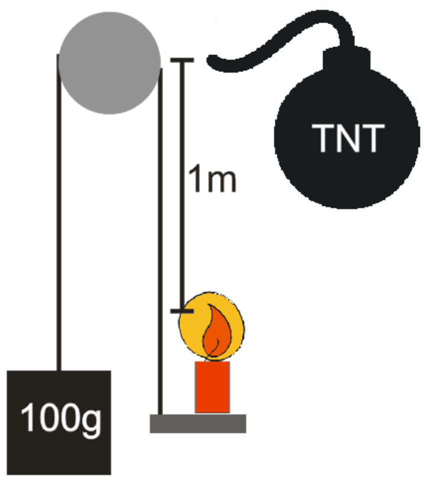
b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit der Kugel für kleine und für große Zeiten (d.h. $t \to 0$ und $t \to \infty$).

c) Lösen Sie die Bewegungsgleichung durch Integration.
Anleitung in mehreren Schritten:

1. Formulieren Sie die Differentialgleichung zunächst in der Ortskoordinaten z . Da nur dz/dt und d^2z/dt^2 vorkommen, ist es sinnvoll die DGL umzuschreiben auf v und dv/dt.
2. Substituieren Sie den Ausdruck $v(t) - v_\infty$ durch die Funktion $u(t)$. Es entsteht eine einfache Differentialgleichung, die elementar integriert werden kann. (v_∞ steht für die Grenzgeschwindigkeit für große Zeiten).
3. Geben Sie unter Beachtung der Anfangsbedingung $v(t=0) = 0$ den Geschwindigkeitsverlauf $v(t)$ als Funktion der Zeit an.
4. Integrieren Sie $v(t)$ nach der Zeit, und geben Sie die Ortskoordinate $z(t)$ als Funktion der Zeit an!

Aufgabe 5.6: Batman

Der Joker hat Batman eine Falle gestellt und ihn an eine diabolische Vorrichtung gefesselt. Dort ist eine 100 g schwere Kerze reibungsfrei über ein Seilzug mit einem 100-g-Gewicht verbunden. 1 m oberhalb der Kerze ist eine bedrohliche Bombe angebracht. Nachdem der Joker die Kerze angezündet hat, verbrennt diese mit einem konstanten Gewichtsverlustrate von 10 mg/s. Wieviel Zeit bleibt Batman, um sich zu entfesseln und die Bombe zu entschärfen?



(Hinweis: Für die Lösung ist es sinnvoll, an geeigneter Stelle den Gewichtsverlust der Kerze gegenüber deren Gesamtgewicht zu vernachlässigen. Warum ist diese Näherung an dieser Stelle legitim, nicht aber im Ansatz der Aufgabe?)

Aufgabe 5.7:
Σ und $\bar{\Sigma}$ seien zwei relativ zueinander bewegte kartesische Koordinatensysteme mit parallelen Achsen. Die Position eines Teilchens werde zu einer beliebigen Zeit t in Σ durch

$$\mathbf{r}(t) = \left(6\alpha t^2 + 3\beta t\right)\mathbf{e}_1 + 2\gamma t^4 \mathbf{e}_2 + \delta \cdot \mathbf{e}_3$$

und in $\bar{\Sigma}$ durch

$$\bar{\mathbf{r}}(t) = 2\mathbf{e}_1 + 3\gamma t^3 \mathbf{e}_2 + \left(7\alpha t + \gamma t^2\right)\mathbf{e}_3$$

beschrieben.

1. Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich $\bar{\Sigma}$ relativ zu Σ?
2. Welche Beschleunigung erfährt das Teilchen in Σ und $\bar{\Sigma}$?
3. Σ sei ein Inertialsystem. Ist dann auch $\bar{\Sigma}$ ein Inertialsystem?

Aufgabe 5.8:
In einem Inertialsystem wird mit einer „ungenauen“ Uhr die Zeit t' gemessen. Die „wahre“ Zeit des Inertialsystems sei t, wobei gefunden wird:

$$t' = t + \alpha(t).$$

Mit der „ungenauen“ Uhr wird für die kräftefreie, eindimensionale Bewegung eines Massenpunktes m fälschlicherweise die Beschleunigung

$$a' = F'/m = \frac{d^2x}{dt'^2} \neq 0$$

gemessen. Berechnen Sie die scheinbar wirkende Kraft F'.

Aufgabe 5.9:
Obwohl Bewegungsgleichungen in Inertialsystemen einfacher sind, beschreibt man Bewegungen auf der Erde in der Regel in einem mit der Erde mitrotierenden Bezugssystem (Labor). Das ist strenggenommen wegen der Rotation der Erde dann kein Inertialsystem mehr.

Auf der Erdoberfläche werde in einem Punkt mit der geographischen Breite φ ein kartesisches Koordinatensystem $\bar{\Sigma}$ angebracht:

$\bar{x}_3$ – Achse vertikal nach oben

$\bar{x}_2$ – Achse nach Norden

$\bar{x}_1$ – Achse nach Osten.

Für die Winkelgeschwindigkeit der Erde gilt:

$$|\omega| = \frac{2\pi}{24} h^{-1} = 7.27 \cdot 10^{-5} s^{-1}.$$

1. Wie lautet die Bewegungsgleichung eines Massenpunktes in diesem Koordinatensystem nahe der Erdoberfläche (vernachlässigen Sie Terme in ω^2)?
2. Berechnen Sie die Beschleunigung $\ddot{\mathbf{r}}_0$ des Koordinatenursprungs von $\bar{\Sigma}$ relativ zu einem im Erdmittelpunkt ruhenden Koordinatensystem Σ.
3. Wie groß ist die in $\bar{\Sigma}$ **gemessene** *wahre* Erdbeschleunigung $\hat{\mathbf{g}}$? Wie stellt sich die Erdoberfläche ein?
4. Wie hängt die Coriolis-Kraft von der geographischen Breite ab?
5. Legen sie das Koordinatensystem $\bar{\Sigma}$ so, dass die $\bar{x}_3$-Achse senkrecht zu der **realen** Erdoberfläche steht. Welche Bewegungsgleichungen sind dann für einen Massenpunkt nahe der Erdoberfläche zu lösen? Die Coriolis-Kraft kann in guter Näherung aus 4. übernommen werden, da $\mathbf{g}$ und $\hat{\mathbf{g}}$ nur einen kleinen Winkel miteinander bilden.
6. Ein zunächst ruhender Körper werde aus der Höhe *H* frei fallengelassen. Lösen Sie die Bewegungsgleichung in 5. unter der Voraussetzung, dass $\dot{\bar{x}}_1$ und $\dot{\bar{x}}_2$ während der Fallzeit klein bleiben. Bestimmen Sie die von der Erdrotation bewirkte Ostabweichung!

Aufgabe 5.10:
Zwei Steine werden mit gleicher Anfangsgeschwindigkeit v_0, aber im zeitlichen Abstand t_0, im Schwerefeld der Erde senkrecht nach oben geworfen.

1. Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf und integrieren Sie diese!
2. Nach welcher Zeit treffen sich die beide Steine?
3. Wie groß sind dann ihre Geschwindigkeiten?

Aufgabe 5.11:
Ein Körper der Masse m bewege sich im Schwerefeld der Erde unter dem Einfluss Newtonscher Reibung

$$\mathbf{F}_R = -\alpha v \cdot \mathbf{v}$$

1. Wie lautet seine Bewegungsgleichung? Man beschränke diese auf die vertikale Bewegung.
2. Bei welcher Anfangsgeschwindigkeit würde sich eine geradlinig gleichförmige Bewegung ergeben?
3. Berechnen Sie die Zeitabhängigkeit der Geschwindigkeit, wenn der Körper zur Zeit $t = 0$ mit der Geschwindigkeit $v(t = 0) = 0$ zu fallen beginnt.
4. Berechnen Sie die Fallstrecke als Funktion der Zeit, wenn der Körper zur Zeit $t = 0$ in der Höhe H losgelassen wird. Diskutieren Sie auch den Grenzfall $\alpha \to 0$.