6. Übungsblatt zur VL
Einführung in die Klassische Mechanik und Wärmelehre
Modul P1a, 1. FS BPh
17. November 2009

Aufgabe 6.1: Schlepplift

In einem Wintersportgebiet soll ein neuer Schlepplift für Schifahrer gebaut werden. Dieser soll die Wintersportler einen Hang der Steigung 11% über eine Gesamtstrecke von 0,6 km hinauf befördern. Die Sicherheitsvorschriften schreiben vor, dass der Lift eine Geschwindigkeit von maximal 1 m/s haben darf und zwischen den Liftbügeln ein Mindestabstand von 5 m eingehalten werden muss. Natürlich wollen die Liftbetreiber diese Vorschriften auch maximal ausreizen.

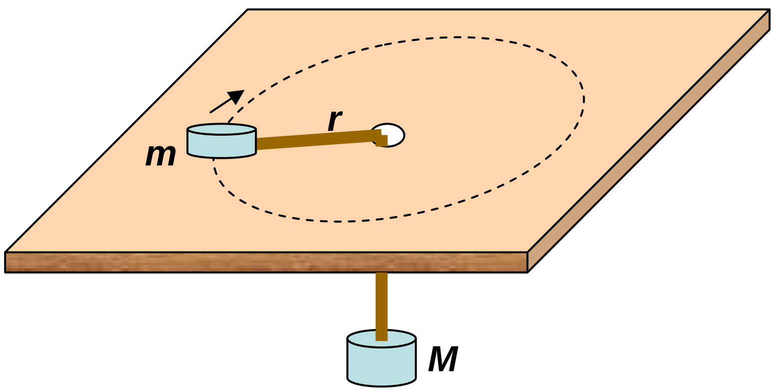
a) Welche Energie wird benötigt, um einen Schifahrer der Masse 80 kg den Hang hinauf zu ziehen?
b) Berücksichtigen Sie nun auch die Reibung der Schier (Gleitreibungskonstante von f = 0,1). Welche Energie wird dann benötigt?
c) Wieviele Personen können so in einer Stunde maximal befördert werden?
d) Wie groß muss die Motorleistung des Lifts mindestens gewählt werden? Weitere Reibungseffekte können vernachlässigt werden.

Aufgabe 6.2: Straßenbahn

Eine Straßenbahn biegt mit 20 km/h um eine (nicht geneigte) Kurve mit Radius 10 m. Welchen Winkel zur Senkrechten nehmen die frei hängenden Handschlaufen dabei ein?

Aufgabe 6.3: Rotierender Puck

a) Ein Puck der Masse *m* gleitet reibungsfrei auf einem Tisch auf einer Kreisbahn mit Radius *r* und ist über eine Schnur (durch ein Loch im Kreiszentrum) mit einer hängenden Masse *M* verbunden. Bei welcher Geschwindigkeit des Pucks bleibt die aufgehängte Masse in Ruhe?



b) Nun wird der Puck mit einem Gleitreibungskoeffizienten *f* gebremst. Geben sie die Winkelgeschwindigkeit und den Radius in Abhängigkeit der Zeit an.

Aufgabe 6.4: James Bond

James Bond wird bei einem Einsatz im Auftrag Ihrer Majestät von Blofeld im Auto verfolgt. Er trifft auf eine scharfe Kurve mit Radius 30 m. In dieser Kurve lässt Bond durch eine Spezialvorrichtung Motoröl hinter sich auf die Straße laufen, wodurch sich der Haftreibungskoeffizient von 00,7 auf 0,2 senkt. Welches ist die höchste noch sichere Geschwindigkeit für a) James Bonds Auto und b) das Auto des Verfolgers?

Aufgabe 6.5: Kugel auf rotierende Scheibe

Konstruieren Sie die Bahn einer Kugel, die auf einer mit der Frequenz 0.05 Hz rotierenden Scheibe vom Mittelpunkt aus mit der Geschwindigkeit 6 cm/s (gemessen gegenüber dem Laborsystem) abgeschossen wird, und zwar a) im Laborsystem und b) im System der drehenden Scheibe.

Aufgabe 6.6: Passatwind

Passatwinde sind beständige Winde, die in tropischen Seegebieten auftreten. Die Richtung, aus der dieser Wind weht, verleiht ihm den Namen: Auf der Nordhalbkugel ist es der Nordost-Passat, welcher also aus nordöstlicher Richtung weht, auf der Südhalbkugel der Südostpassat.

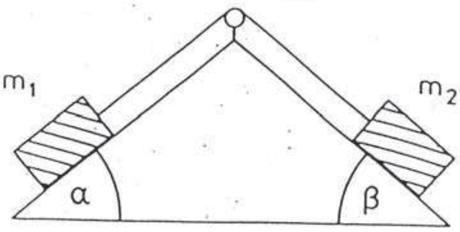
a) Erklären Sie das Auftreten der Passatwinde aus einem vereinfachten Wettermodel. Dabei ist die Erde eine glatte, rotierende Kugel und die Winde kommen zustande, indem am Äquator Tiefdruckgebiete und auf den Polen Hochdruckgebiete herrschen, wodurch auf die Luftmoleküle eine Gradientenkraft

$$\mathbf{F} = (m / \rho)\, \mathrm{grad}(P) \approx (m / \rho)\, (\Delta P / \Delta x)\, \hat{\mathbf{e}}_P$$

wirkt.
m ist die Masse eines Luftmoleküls, ρ die Luftdichte, P der Luftdruck, Δx die Entfernung zweier Messpunkte und $\hat{\mathbf{e}}_P$ der Einheitsvektor in Richtung des Gradienten.

b) Auf dem nördlichen Breitengrad $\varphi = 20°$ weht der Wind heute genau aus Nordost. Zwei Wetterstationen, die jeweils 50 km nördlich und südlich liegen, melden einen Luftdruck von jeweils 1009,0 mbar und 1009,5 mbar. Wie hoch ist die Windgeschwindigkeit am 20. Breitengrad?
(Luftdichte $\rho = 1{,}204$ kg/m³).

Aufgabe 6.7:



Zwei Massen m_1 und m_2 $(m_2 > m_1)$ können sich im Schwerefeld der Erde auf um die Winkel α und β gegen die Horizontale geneigten Ebenen reibungslos bewegen. Sie sind durch einen Faden konstanter Länge L miteinander verbunden und führen damit eindimensionale Bewegungen aus.

1. Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für die beiden Massen m_1 und m_2 auf.
2. Drücken Sie die Beschleunigungen durch m_1, m_2, α, β und g aus.
3. Berechnen Sie die Fadenspannung S.
4. Unter welcher Bedingung befinden sich die Massen in Ruhe (bzw. in gleichförmig geradliniger Bewegung)?

Aufgabe 6.8:
Es sei $x = x(t)$. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden inhomogenen Differentialgleichung:

a) $\ddot{x} + \dot{x} + x = 5t - 1$
b) $4\ddot{x} - 2\dot{x} + 3x = -3t + 9$

Aufgabe 6.9:
Ein kugelförmiger Wassertropfen (Radius R, Volumen V, Masse m) falle im Schwerefeld der Erde senkrecht nach unten. Dabei wirkt auf ihn die Reibungskraft

$$F_R = -\hat{\alpha} R^2 \cdot \mathbf{v} \qquad (\hat{\alpha} > 0)$$

Der Fall starte zur Zeit $t = 0\,(\mathbf{v}(0) = 0)$. In der Luft nimmt das Volumen des Tropfens durch Kondensation von Wasserdampf in der Atmosphäre zu, und zwar proportional zu seiner Oberfläche:

$$\frac{dV}{dt} = \gamma \cdot 4\pi \cdot R^2(t) \qquad (R(t=0) = R_0)$$

Die Dichte ρ des Wassers bleibe dabei konstant, so dass die Masse des Tropfens zunimmt. Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf und integrieren Sie diese. Berechnen Sie damit die Geschwindigkeit des Wassertropfens $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$. Es empfiehlt sich, bei der Lösung R anstelle der Zeit t als unabhängige Variable einzusetzen.

Aufgabe 6.10:
Testen Sie durch folgende Rechenaufgaben Ihre Fähigkeit mit komplexen Zahlen umzugehen:

1. Berechnen Sie:

$$(-i)^3, i^{15}, \sqrt{4(-25)}, 1n(1+i), e^{i(\pi/3)}, e^{i(\pi/2)}.$$

2. Berechnen Sie das Produkt $z = z_1 z_2$:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & z_1 = 1+i \quad ; & z_2 = 1-i, \\ \text{b)} & z_1 = 3-2_i \quad ; & z_2 = 5+4_i. \end{array}$$

3. Zeichnen Sie in der komplexen Zahlenebene die Punkte z_i und z_i^* ein:

$$z_1 = -1-i, \quad z_2 = -3+\frac{i}{2}, \quad z_3 = 3+2i, \quad z_4 = \frac{3i}{2}.$$

4. Suchen Sie die Polardarstellung der folgenden komplexen Zahlen:

$$z_1 = i-1, \quad z_2 = -1(1+i), \quad z_3 = e^{3+2i}, \quad z_4 = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}+\tfrac{i}{2}, \quad z_5 = -i.$$

5. Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen:

$$z_1 = e^{1/2+\pi i}, \quad z_2 = e^{-1-i(3/2\pi)}, \quad z_3 = e^{3-i}.$$

6. $z(t)$ sei eine lineare Zeitfunktion:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & z(t) = -t + i2\pi t, \\ \text{b)} & z(t) = 2t - i3/2t. \end{array}$$

Wie lautet der Realteil von $e^{z(t)}$ und dessen Periode?

Aufgabe 6.11:

a) Gegeben sei die lineare, homogene Differentialgleichung 3.Ordnung:

$$\sum_{j=0}^{3} \alpha_j(t) x^{(j)}(t) = 0$$

Zeigen Sie, dass die drei Lösungsfunktionen

$$x_1(t),\ x_2(t),\ x_3(t)$$

genau dann linear unabhängig sind, wenn ihre sogenannte Wronski-Determinante,

$$W(x_1, x_2, x_3; t) \equiv \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & x_3(t) \\ \dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t) & \dot{x}_3(t) \\ \ddot{x}_1(t) & \ddot{x}_2(t) & \ddot{x}_3(t) \end{vmatrix},$$

nicht verschwindet.

b) Gegeben sei die lineare homogene Differentialgleichung

$$\dddot{x}(t) - \frac{6}{t^2}\dot{x}(t) + \frac{12}{t^3}x(t) = 0$$

Überprüfen Sie durch Einsetzen, ob

$$x_1(t) = \frac{1}{t^2} \quad ; \quad \mathrm{x}_2(t) = t^2 \quad ; \quad \mathrm{x}_3(t) = t^3$$

spezielle Lösungen der Differentialgleichung sind. Sind sie linear unabhängig? Wie lautet die allgemeine Lösung?