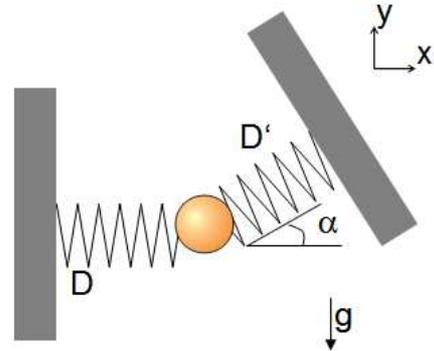


**9. Übungsblatt zur VL**  
**Einführung in die Klassische Mechanik und Wärmelehre**  
**Modul P1a, 1. FS BPh**  
 8. Dezember 2009

**Aufgabe 9.1: Doppelfeder**

Eine Kugel wird im Schwerfeld der Erde zwischen zwei Federn mit Federkonstanten  $D = 100 \text{ N/m}$  und  $D' = 50 \text{ N/m}$  eingespannt, wobei die letztgenannte Feder gegenüber der ersten um einen Winkel  $\alpha = 30^\circ$  verdreht ist (siehe Bild). Die Kugel habe die Masse  $m = 100 \text{ g}$ . Bei einer Auslenkung um  $(x_0, y_0)$  fängt die Kugel in zwei Richtungen an zu schwingen.



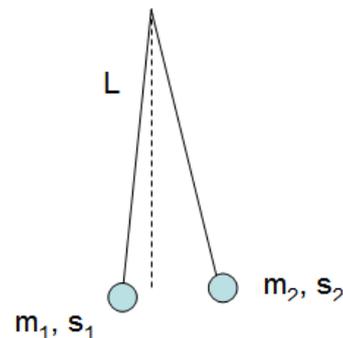
- a) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für dieses System auf und lösen Sie diese. Nehmen Sie näherungsweise an, dass eine Auslenkung der Federn senkrecht zu ihrer Achse keine rücktreibende Kraft zur Folge hat, und vernachlässigen Sie Reibungseffekte.
- b) Mit welcher Frequenz schwingt die Kugel in x- bzw. y-Richtung?
- c) Wo befindet sich die Ruhelage?

**Aufgabe 9.2: Pendel im Auto**

Ein Pendel der Länge  $L$  und der am Seil befestigten Masse  $m$  hänge in einem Auto, das mit konstanter Geschwindigkeit  $v$  eine kreisförmige Rennstrecke vom Radius  $R$  durchfährt. Angenommen, das Pendel führe nur kleine Schwingungen in radialer Richtung um seine Gleichgewichtslage aus, welche Frequenz hat dann die Schwingung?

**Aufgabe 9.3: Doppelpendel**

Zwei Pendel der Länge  $L = 2 \text{ m}$  mit aufgehängten punktförmigen Massen  $m_1 = 100 \text{ g}$  und  $m_2 = 200 \text{ g}$  sind im selben Punkt aufgehängt und schwingen in derselben Ebene. Sie werden anfangs um  $s_1 = 1 \text{ cm}$  nach links bzw. um  $s_2 = 3 \text{ cm}$  nach rechts ausgelenkt.



- a) In welchem Punkt treffen die Massen sich?
- b) Als die Massen aufeinanderprallen, vollführen sie einen elastischen Stoß. Mit welchen Geschwindigkeiten fliegen sie dann auseinander? Was sind die neuen Umkehrpunkte der einzelnen Pendel nach dem Stoß?

#### Aufgabe 9.4: Tarzan

Tarzan schwingt an einer (masselosen) Liane mit einer Periodendauer von 10 s. Nun springt Cheeta fünf Meter oberhalb von Tarzan auf die selbe Liane auf. Mit welcher Periodendauer schwingen die beiden nun? Und wie lang ist die Liane?

Hinweise: 1.) Tarzan wiegt 80 kg, Cheeta 20 kg, beide seien als Punktmassen anzunehmen. 2.) Cheeta springt derart auf die Liane, dass beide Körper mit derselben Winkelgeschwindigkeit weiter schwingen. Die Liane kann daher auch wie eine starre Stange behandelt werden. 3.) Cheeta ist ein Männchen.

#### Aufgabe 9.5: Christbaumkugel

Eine Christbaumkugel der Masse  $m = 10$  g hängt an einem masselosen Tannenzweig, der nach einem kurzen Windstoß einmal pro Sekunde mit einer Auslenkung von  $a = 5$  cm feierlich auf- und abschwingt. Zwei Minuten später hat er nur noch eine Auslenkung von  $a' = 1$  cm.

Berechnen Sie die Federkonstante  $D$  des Zweigs. Angenommen, die Dämpfung geschieht durch eine geschwindigkeitsabhängige Kraft  $F = -\gamma v$ , wie groß wäre dann die Dämpfungskonstante  $\gamma$ ?



**Aufgabe 9.7:**

Auf einen Massenpunkt  $m$  wirke die Kraft

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(x, y, z) = \alpha(x y, -z^2, 0)$$

- Ist  $\mathbf{F}$  konservativ? Begründen Sie Ihre Antwort!
- Welche Arbeit ist notwendig, um den Massenpunkt auf direktem Weg (linear) von

$$P_1 = (0, 0, 0) \text{ nach } P_2 = (1, 1, 3)$$

zu verschieben?

- Berechnen Sie die Arbeit, um den Massenpunkt auf dem „gekrümmten“ Weg  $(x = y^2, z = 3 \cdot \sqrt{y})$  von  $P_1$  nach  $P_2$  zu verschieben!

**Aufgabe 9.8:**

- Welche Kraft

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(x, y, z)$$

muss auf einen Massenpunkt  $m$  einwirken, damit sich dieser auf einer Schraubenlinie

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (a \cos \omega t, b \sin \omega t, c \cdot t)$$

$a, b, c, \omega$ : reell

bewegt.  $t$  ist die Zeit. Bedenken Sie, dass Sie  $\mathbf{F}$  als Funktion von  $x, y, z$  darstellen müssen.

- Zeigen Sie, dass das Kraftfeld  $\mathbf{F}$  konservativ ist!
- Bestimmen Sie, evtl. bis auf eine unwesentlich Konstante, das Potential  $V = V(x, y, z)$ . Sie können die Lösung erraten und dann kontrollieren oder aber auch systematisch ableiten.
- Drücken Sie die Gesamtenergie des Massenpunktes  $E = T + V$  durch  $m, \omega, a, b$  und  $c$  aus! Zeigen Sie, dass  $E$  eine Erhaltungsgröße ist, das heißt  $E \neq E(t)$ .

**Aufgabe 9.9:**

Ein Massenpunkt bewege sich in der  $xy$ -Ebene auf einer Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

und durchlaufe diese in zwei Sekunden dreimal.

1. Wie lautet die Bahnkurve

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)),$$

wenn  $x(t) = a \cos \omega t$  ist?

2. Welche Kraft wirkt auf den Massenpunkt?
3. Berechnen Sie den Drehimpuls des Massenpunktes. Warum muss dieser nach Richtung und Betrag konstant sein?
4. Berechnen Sie die Fläche  $\Delta S$ , die der Ortsvektor in einer Sekunde überstreicht.

### Aufgabe 9.10:

- a) Zeigen Sie, dass

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{\alpha}{r^n} \mathbf{e}_r \quad ; \quad \alpha > 0, n > 1$$

konservativ ist!

- b) Zeigen Sie, dass der Drehimpuls  $\mathbf{L}$  eines Teilchens der Masse  $m$  im Kraftfeld  $\mathbf{F}$  aus a) eine Erhaltungsgröße ist. Was folgt daraus für die Bewegung des Teilchens?
- c) Bringen Sie für das Feld  $\mathbf{F}$  aus a) den Energiesatz in die Form

$$E = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r)$$

Welche Gestalt hat das effektive Potential  $V_{\text{eff}}(r)$ ?

- d) Bestimmen Sie, unter welcher Bedingung bzgl.  $n$  das Teilchen sich auf einer stabilen **Kreisbahn** ( $r \equiv r_0$ ) bewegen kann. Berechnen Sie den Radius  $r_0$ !

### Aufgabe 9:11:

- a) Wie lautet das effektive Potential  $V_{\text{eff}}(r)$  für die Bahn eines Erdsatelliten der Masse  $m$ ? Der Erdsatellit bewege sich auf einer Kreisbahn. Bestim-

men Sie den Radius  $R_0$  als Funktion der Umlauffrequenz des Satelliten. Welcher Radius ergibt sich für eine geostationäre Bahn?

- b) Der Satellit bewege sich im Anziehungsbereich der Erde. Bestimmen Sie die „erste kosmische Geschwindigkeit“ als die Mindestgeschwindigkeit tangential zur Erdoberfläche, die notwendig ist, damit der Satellit nicht in den Erdbereich zurückstürzt!
- c) Welche Mindestanfangsgeschwindigkeit („zweite kosmische Geschwindigkeit“) muss dem Satelliten erteilt werden, damit er den Anziehungsbereich der Erde verlassen kann?