

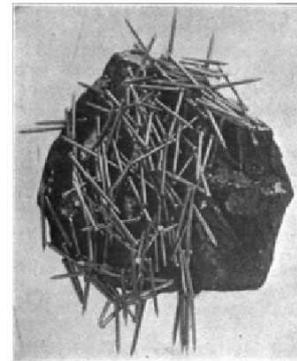
3. Magnetismus

[wikipedia]

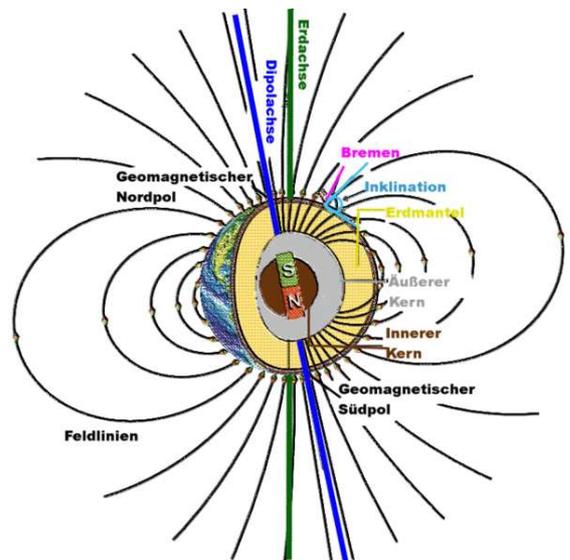
3.1 Einleitung



- Erste Erwähnungen im 4. Jh. v. Chr. aus China
- Begriffsherkunft: Region Magnisia in Griechenland, wo solche Magnetischen Steine entdeckt wurden (ebenso: Magnesium und Mangan)
- Erfindung des Kompasses: 11. Jh. n. Chr. in China in Europa ab 12. Jh.



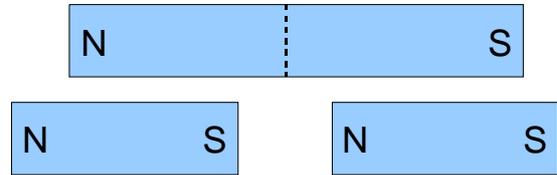
„nasser Kompass“
oder „Südweiser“:



Bilder:
Wikipedia
www.nautisches.com
www.silva.se

Einige Beobachtungen mit Permanentmagneten:

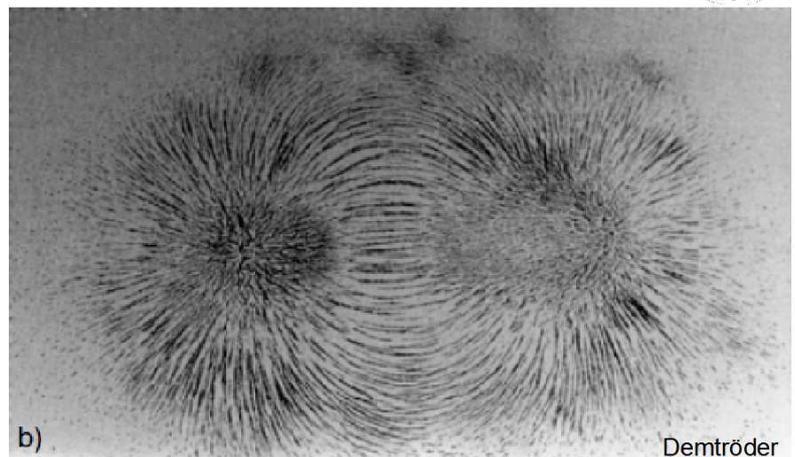
- Es gibt zwei Pole (Nord- & Südpol), gleichnamige Pole stoßen sich ab, ungleichnamige ziehen sich an
- beim Durchbrechen eines Stabmagneten erhält man keine getrennten Magnetpole, sondern wieder zwei Dipole
- Es gibt keine isolierte magnetische Pole (vgl. elektrische Ladungen), Nord- und Südpol kommen immer gemeinsam vor



3.2 Magnetische Feldlinien

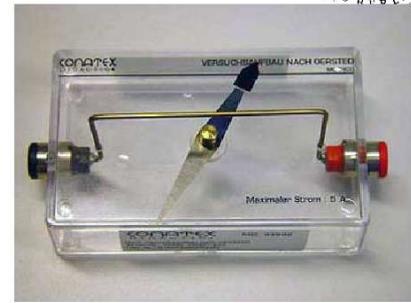
Feldlinienbild eines Stabmagnete (Bestreuen durch Eisenspäne):

Im Gegensatz zu elektrischen Feldlinien sind magnetische Feldlinien stets **geschlossen**

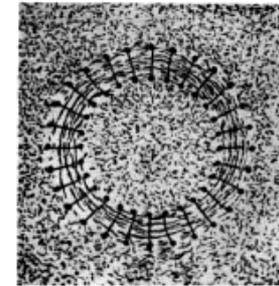
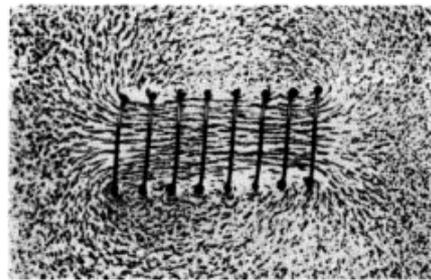
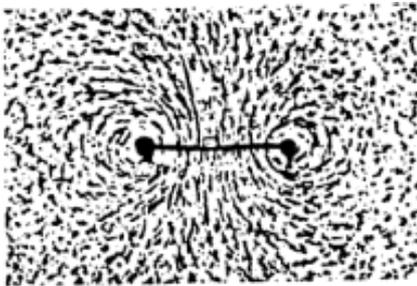
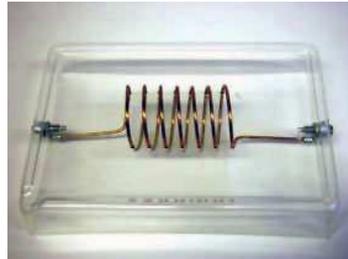
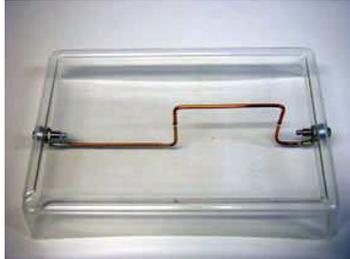


Oerstedt-Versuch:

Ein von Strom durchflossener Leiter erzeugt ein magnetisches Feld.



Magnetische Feldlinien verschiedener Leiterkonfigurationen:



Man kann also das Magnetfeld ebenfalls durch Feldlinien darstellen.

Analog zum elektrischen Feld

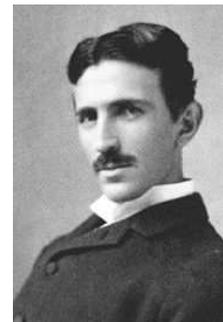
→ **magnetischer Fluss** Φ_m
(„Anzahl der Feldlinien durch ein Flächenelement“)

und **magnetische Flussdichte** \vec{B}
(„Feldliniendichte“ oder magnetische Induktion):

$$\Phi_m = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Einheit:

$$[B] = 1 \text{ V s} / \text{m}^2 = 1 \text{ Tesla} = 1 \text{ T}$$



Nikola Tesla
(1856-1943)



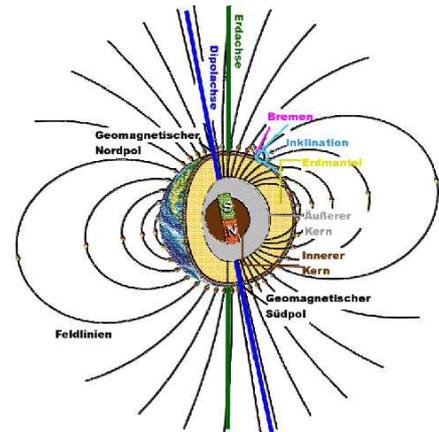
Carl Friedrich Gauß
(1777-1855)

Oft werden nur kleine Feldstärken im Bereich mT oder μT gemessen, oder es wird die veraltete Einheit Gauss verwendet:

$$1 \text{ Gauss} = 1 \text{ G} = 10^{-4} \text{ T}$$

Typische Feldstärken:

- menschl. Gehirn: $\sim \text{pT}$ (10^{-12} T)
- Erdmagnetfeld: $30 - 50 \mu\text{T}$
 $\sim 20 \mu\text{T}$ in horiz. Richtung
- Kernspintomograph: bis ca. 3 T
- Stabmagnet: typ. $< 1 \text{ T}$
- Neutronensterne: $10^6 - 10^8 \text{ T}$

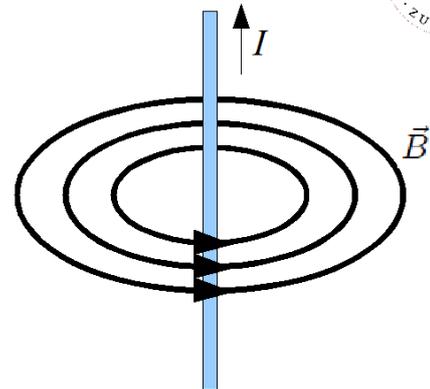


Stärkste und schwächste Magnetfelder auf der Erde:

- speziell abgeschirmte Räume (PTB Berlin): $< 1 \text{ nT}$ (10^{-9} T)
- stabile Magnetfelder (Florida State Univ.): 45 T (stabil)
- gepulste Magnetfelder (Russian Federal Nuclear Center): $2\,800 \text{ T}$

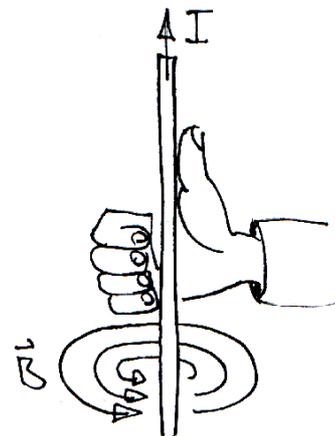
3.3 Magnetfelder stationärer Ströme

Schickt man durch einen Leiter einen Strom I , so erzeugt dieser ein Magnetfeld. Die Magnetfeldlinien verlaufen in einer Ebene senkrecht zum Draht und bilden konzentrische Kreise.



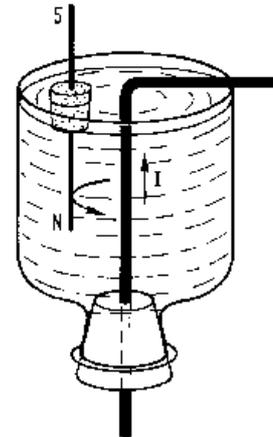
Rechte-Faust-Merkregel:

Zeigt der Daumen der **rechten** Faust in die **technische** Stromrichtung, so zeigen die restlichen Finger die Richtung der Magnetfeldlinien an.



Versuch: Magnet umkreist elektrischen Leiter

Im Wasserbehälter ist senkrecht ein Draht angeordnet, der oberhalb der Wasseroberfläche seitlich abknickt. Bei eingeschaltetem Strom ergibt sich unterhalb der Wasseroberfläche in der Umgebung des Schwimmers in erster Näherung ein azimuthales Magnetfeld. In diesem Magnetfeld befindet sich nur ein Pol des magnetisierten Metallstabes. Dieser Pol erfährt im magnetischen Feld eine Kraft, die den gesamten Schwimmer je nach Polung entlang der Magnetfeldlinien bewegt.



Da **alle Magnetfeldlinien geschlossen sind**, muss der magnetische Fluss durch die geschlossene Oberfläche A eines Volumens V null sein („gleich viele Feldlinien treten aus wie ein“):

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} \equiv 0$$

der Gaußsche Satzes liefert: $\oint_{A=\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_V \operatorname{div} \vec{B} \, dV = 0$

woraus folgt:

$$\operatorname{div} \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

2. Maxwell-Gleichung

vgl. mit $\operatorname{div} \vec{E} = \rho/\epsilon_0$ zeigt:

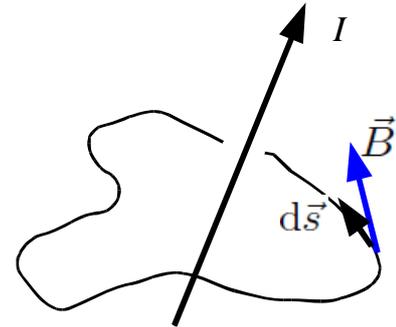
**Es gibt keine magnetischen „Ladungen“ oder Monopole.
Nord- und Südpole kommen immer gemeinsam vor.**

Ampèresches Gesetz:

Für Zusammenhang zwischen elektrischem Strom und Magnetfeld findet man folgendes Gesetz:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I$$

Ampèresches Gesetz



hier wird über eine geschlossene Strecke integriert, durch die der Strom I fließt.

Die Konstante $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$

heißt **magnetische Induktionskonstante** oder **Permeabilitätskonstante**.

Als Funktion der Stromdichte \vec{j} gilt: $I = \int \vec{j} \cdot d\vec{A}$

aus dem Stokeschen Satz folgt dann:

$$\mu_0 \int_A \vec{j} \cdot d\vec{A} = \oint_{S=\partial A} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_A \text{rot } \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

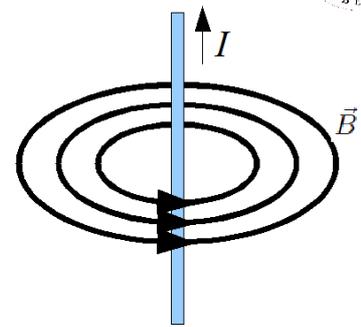
und daraus:

$$\text{rot } \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

die **4. Maxwell-Gleichung**
(für zeitl. konst. E -Felder)

a) Beispiel: Magnetfeld eines geraden Stromleiters

wegen der Symmetrie wählen wir als Integrationspfad konzentrische Kreise, auf denen $|\vec{B}(\vec{r})| = \text{konst}$

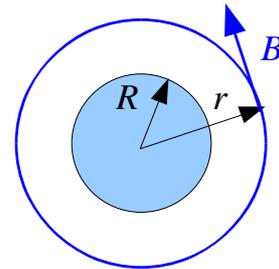


(1) außerhalb des Leiters ($r > R$)

in Polarkoordinaten:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} r |\vec{B}| d\phi = 2\pi r B(r) = \mu_0 I$$

also $B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$



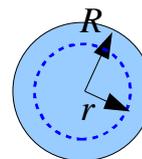
Das Magnetfeld fällt also wie $1/r$ ab.

(2) innerhalb des Leiters ($r < R$)

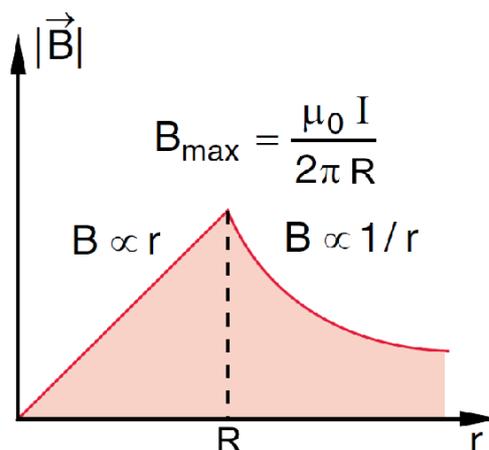
hier wird der Anteil der Fläche mit Radius $< r$ von Strom durchflossen,

also $2\pi r B(r) = \frac{\pi r^2}{\pi R^2} \mu_0 I$

bzw. $B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r$

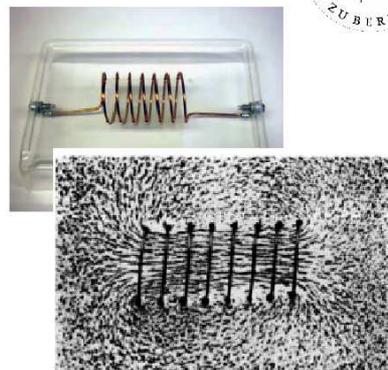


Zusammengenommen erhält man also folgendes Magnetfeld in Abhängigkeit des Radius:



b) Beispiel: Magnetfeld innerhalb einer langen Spule

Betrachten gestrichelten Weg ABCD:



$$\oint_{\text{ABCD}} \vec{B} \cdot d\vec{s} \approx \int_A^B B ds = B L = N \mu_0 I$$

Näherung gilt da (1.) auf AC und DB: $\vec{B} \perp d\vec{s}$
 und (2.) der Weg CD beliebig weit weg
 gewählt werden kann.

Das Magnetfeld im Inneren ist also
näherungsweise homogen (ortsunabhängig)
 und hat die Stärke

$$B = \mu_0 \frac{N}{L} I$$

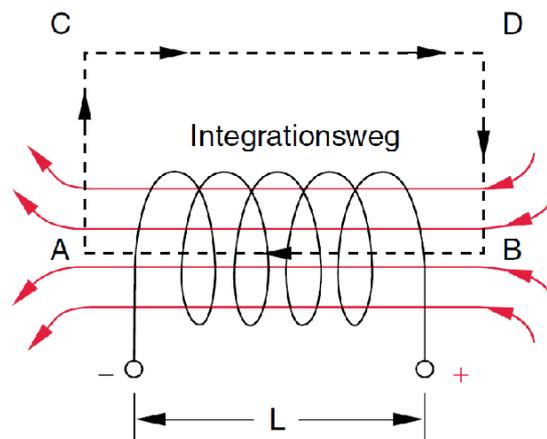
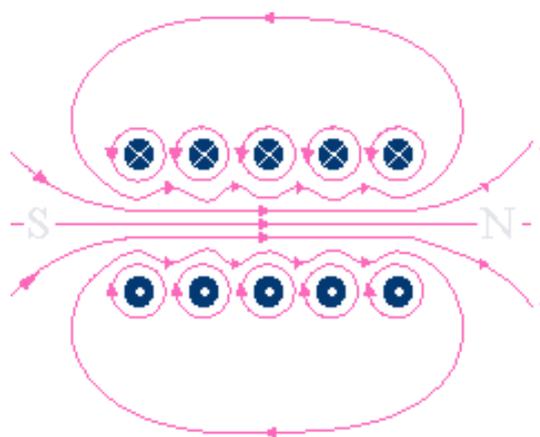
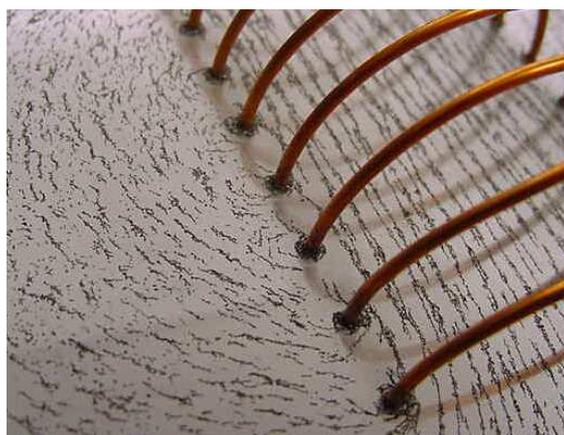


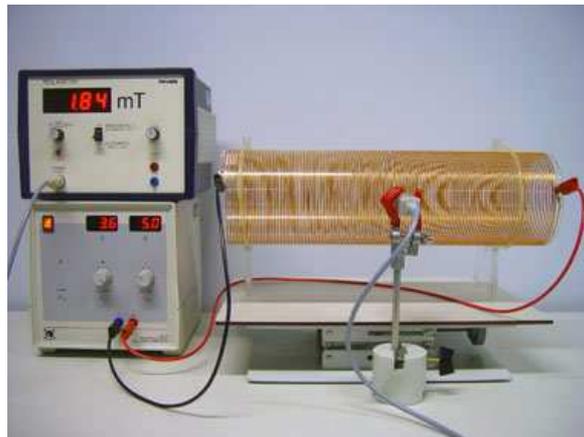
Bild: Demtröder

Detaillierter Feldlinienverlauf einer Spule:



Versuch: Magnetfeldmessung in einer Spule

An der Spule ist ein Netzgerät angeschlossen. Mittig am Spulenkörper befindet sich ein Spalt. Hier schiebt man die Magnetfeldsonde (Hall-Sonde) hinein und misst für einen beliebigen Stromwert die Feldstärke. An den Enden der Spule stellt man dann nur eine in etwa halb so große Feldstärke fest. Hier fehlt der Feldstärkeanteil einer Spulenhälfte.



Versuch: Abhängigkeit der magnetischen Flussdichte B von der Windungsdichte einer Spule

Eine Spule wird an ein Netzgerät angeschlossen; die axiale B-Sonde schließt man an das Teslameter an und schiebt diese in die Spule; man schaltet den Strom an und misst nun am Teslameter die magnetische Flussdichte, auch in Abhängigkeit von der Stromstärke; der Messwert ändert sich bei Änderung der Windungsdichte

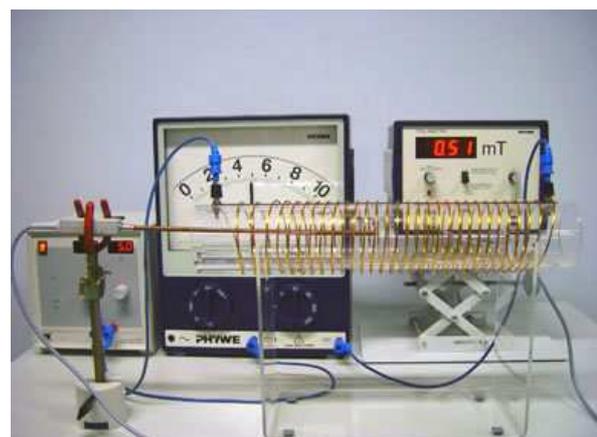
Beispielrechnung:

Strom $I =$ A

Spulenlänge $L =$ m

Anzahl der Windungen $N =$

$$\rightarrow B = \mu_0 \frac{N}{L} I = \quad \text{mT}$$



3.4 Das Vektorpotential



Wiederholung: das elektrische Feld kann als Gradient einer skalaren Funktion, dem elektrischen Potential dargestellt werden: $\vec{E}(\vec{r}) = -\text{grad}\phi(\vec{r}) = -\nabla\phi(\vec{r})$

Dies ist beim **B-Feld nicht möglich**. Da

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I \quad \text{bzw.} \quad \text{rot } \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

ist das magnetische Kraftfeld nicht konservativ (d.h. die potentielle Energie ist nicht wegunabhängig) und man kann **kein skalares Potentialfeld** für das B-Feld definieren.

Beweis: gäbe es ein solches Potential, mit $\vec{B} = -\vec{\nabla}\phi_m$

dann wäre $\text{rot } \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{B} = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\phi_m \equiv 0$

statt $\text{rot } \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$



Man kann aber ein **Vektorpotential** definieren:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \text{rot } \vec{A}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})$$

denn es gilt: $\text{div } \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \equiv 0$

auch das Vektorpotential ist **nicht eindeutig festgelegt** (vgl. additive Konstante beim elektrischen Potential).

Ein anderes Vektorpotential, mit

$$\vec{A}'(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r}) + \vec{\nabla}f(\vec{r})$$

beschreibt dasselbe B-Feld,

wenn $f(\vec{r})$ eine **beliebige** skalare, ortsabhängige Funktion ist,

da $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}f) \equiv 0$

Die Wahl einer solchen Funktion $f(\vec{r})$ heißt **Eichung**.

Wählt man $f(\vec{r})$, so dass außerdem gilt $\operatorname{div} \vec{A} = 0$
so spricht man von der **Coulomb-Eichung**.

Mit der Coulomb-Eichung erhält die 4. Maxwell-Gleichung
eine besonders einfache Form:

$$\text{mit } \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad \text{und} \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\text{folgt: } \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$$

man kann zeigen, dass (weil $\operatorname{div} \vec{A} = 0$)

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} = -(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} = \Delta \vec{A}$$

damit wird die **4. Maxwell-Gleichung** zu:

$$\Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$$

$$\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \quad \text{heißt Laplace-Operator}$$

Die Lösung dieser DGL für eine beliebige
Stromdichteverteilung ist:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

wobei die Integration komponentenweise erfolgen kann.

Das B-Feld erhält man dann aus $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

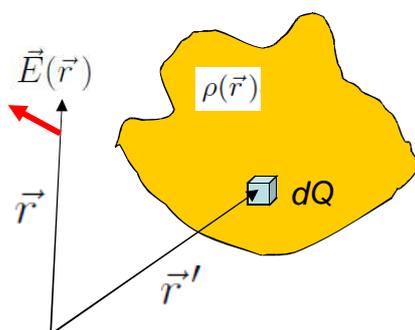
3.5 Beliebige Stromverteilungen



Wiederholung Elektrostatik:

Feld einer beliebigen Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ ergibt sich durch **Überlagerungsprinzip** aus Beiträgen der Ladungselemente $dQ = \rho(\vec{r})dV$ am Ort \vec{r}' zu:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r'$$

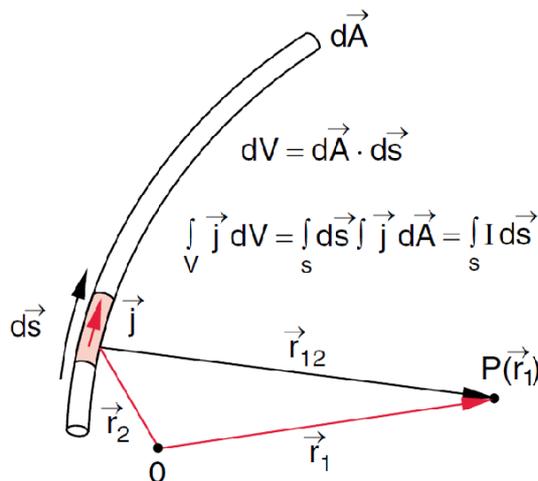


Wir betrachten also jetzt analog das Magnetfeld einer beliebigen Stromverteilung, gegeben durch die Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$

Ein kleines Streckenelement $d\vec{s}$ am Ort \vec{r}_2 liefert am Ort \vec{r}_1 den Beitrag zum Magnetfeld

$$d\vec{B}(\vec{r}_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j}(\vec{r}_2) \times \vec{e}_{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2} dV'$$

$\vec{e}_{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}$ ist der Einheitsvektor in Richtung $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$



Das Kreuzprodukt stellt sicher, dass das B-Feld in einer Ebene senkrecht zum Leiterstück ds liegt.

Das **Gesamtfeld** erhält man dann nach Integration über den gesamten Weg S:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times \vec{e}_{\vec{r}-\vec{r}'}}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} dV'$$

Fließt der Strom I nur durch einen dünnen Draht, so kann man $\vec{j} dV = \vec{j} dA \cdot d\vec{r} = I d\vec{r}$ setzen und erhält

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_S \frac{d\vec{r}' \times \vec{e}_{\vec{r}-\vec{r}'}}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2}$$

Biot-Savart-Gesetz

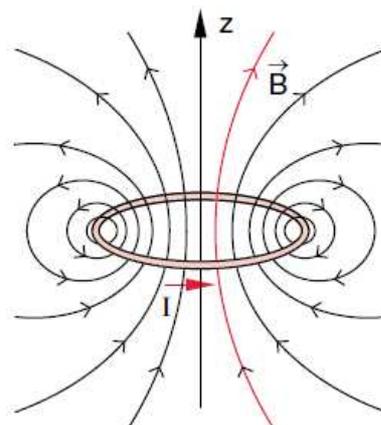
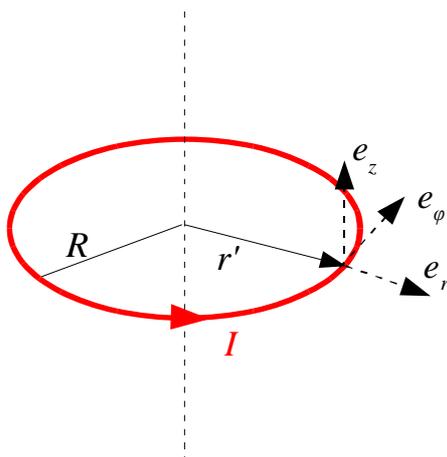
a) Beispiel: Magnetfeld eines Kreisstroms

(1) In der Schleifenebene (x-y-Ebene) steht das B-Feld

senkrecht zur Ebene: $\vec{B} = (0, 0, B_z)$

da $d\vec{r}' = (x', y', 0)$ und $\vec{e}_{\vec{r}-\vec{r}'} = (e_x, e_y, 0)$

und somit $d\vec{r}' \times \vec{e}_{\vec{r}-\vec{r}'} = (0, 0, \alpha)$



(2) Entlang der Symmetrieachse (z-Achse) gilt:

$$\vec{r} = z \vec{e}_z, \quad \vec{r}' = R \vec{e}_r \quad \text{und} \quad d\vec{r}' = R d\phi \vec{e}_\phi$$

$$d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}') = R d\phi (z \vec{e}_r + R \vec{e}_z)$$

aus dem Biot-Savart-Gesetz erhält man dann

$$\vec{B}(x, y = 0, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_S \frac{d\vec{r}' \times \vec{e}_{\vec{r}-\vec{r}'}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_S \frac{d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \vec{e}_z$$

im Zentrum (z=0) ist $B(z=0) = \frac{\mu_0 I}{2R}$

Für große z (Fernfeld) gilt $B_{\text{ff}}(z) \approx \frac{\mu_0 I R^2}{2z^3}$

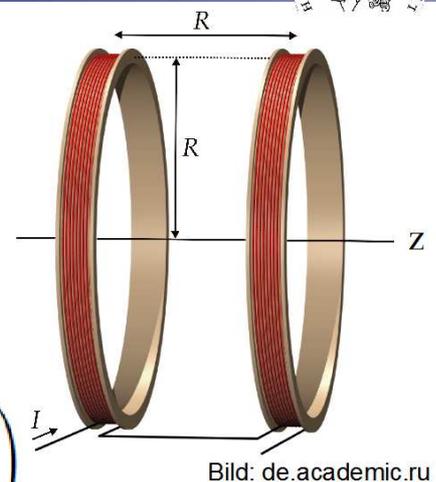
Die Schleife bildet im Fernfeld einen magnetischen Dipol mit Dipolmoment $\vec{p}_m = \vec{A} I = \pi R^2 I$

b) Beispiel: Helmholtz-Spule

Eine Helmholtz-Spule besteht aus zwei parallelen Ringspulen mit Radius R im Abstand $d = R$, die in gleicher Richtung vom Strom I durchflossen werden.

Die Felder der Einzelspulen addieren sich, entlang der z-Achse gilt:

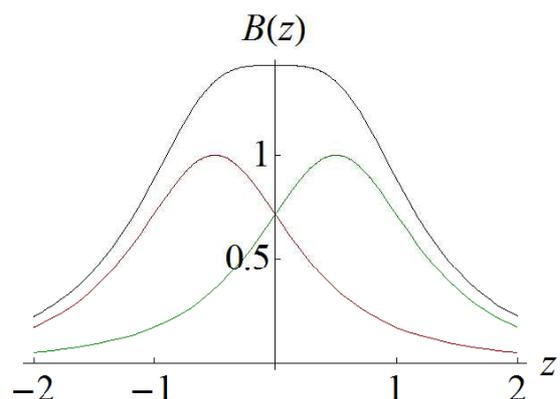
$$B(z) = \frac{\mu_0 I}{2} \left(\frac{R^2}{[(z - d/2)^2 + R^2]^{3/2}} + \frac{R^2}{[(z + d/2)^2 + R^2]^{3/2}} \right)$$



Wenn $d = R$ gilt zwischen den Spulen in guter Näherung um den Nullpunkt ($z \ll R$):

$$B(z) \approx \frac{\mu_0 I}{(5/4)^{3/2} R} \left[1 - \frac{144}{125} \left(\frac{z}{R} \right)^4 \right]$$

$$\approx \frac{\mu_0 I}{(5/4)^{3/2} R} = \text{konst.}$$



c) Beispiel: Anti-Helmholtz-Anordnung

Hier werden dieselben Spulen verwendet, die Stromrichtung ist aber jeweils entgegengesetzt.

Man erhält für $d = R$ und für kleine z :

$$B(z) \approx \frac{48}{5^{5/2}} \frac{\mu_0 I}{R^2} z$$

Man erhält einen annähernd linearen Nulldurchgang.

Solche Magnetfelder werden z.B. zur Speicherung von ultra-kalten Atomen (magneto-optische Fallen) verwendet.

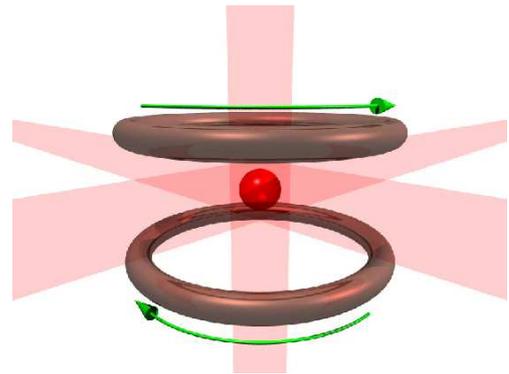
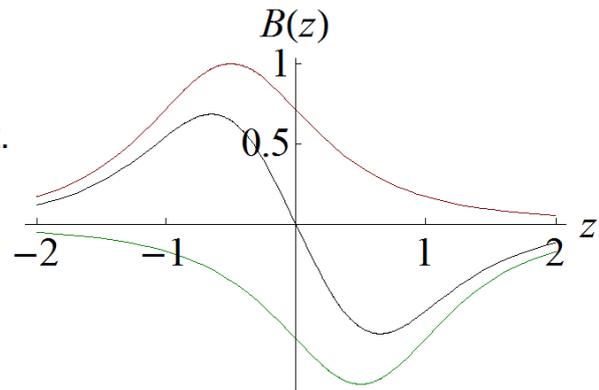
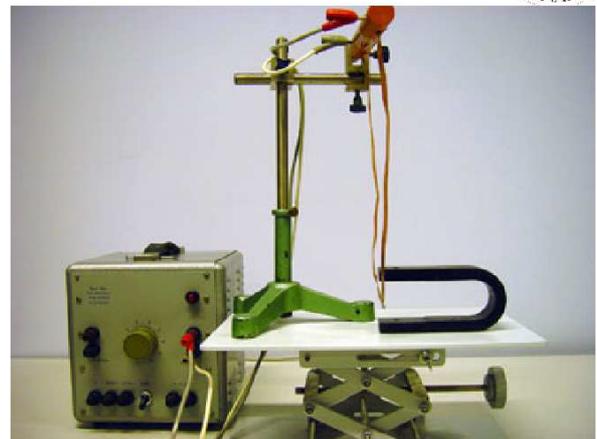


Bild: Aufbau einer Atomfalle
[Prof. Zimmermann, Uni Tübingen]

3.6 Kräfte auf bewegte Ladungen

Versuch: Lorentz-Schaukel

Wird eine Leiterschaukel zwischen ein Hufeisenmagnet gehängt, wirkt eine Kraft, die die Schaukel zum Magnet hin bzw. weg drückt (je nach Stromrichtung).



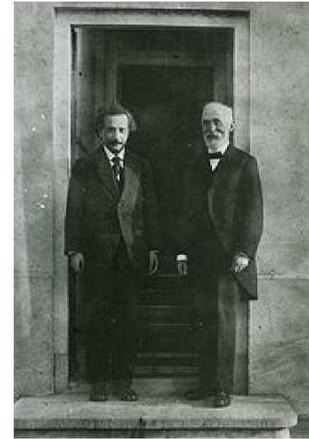
Lorentz-Kraft:

Bewegte Ladungen erfahren eine Kraft senkrecht zu ihrer Bewegungsrichtung (Stromrichtung) und senkrecht zum Magnetfeld:

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$$

Liegt zusätzlich ein elektrisches Feld vor, so ist die Gesamtkraft:

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right)$$



H.A. Lorentz, Nobelpreis 1902 (hier mit A. Einstein)

Rechte-Hand-Merkregel:

Mit der rechten Hand kann man die Richtung der Lorentz-Kraft ermitteln. Dabei gibt der **Daumen** die **technische Stromrichtung**, der **Zeigefinger** die Richtung des **Magnetfeldes** und der **Mittelfinger** die Richtung der **Lorentz-Kraft** an.

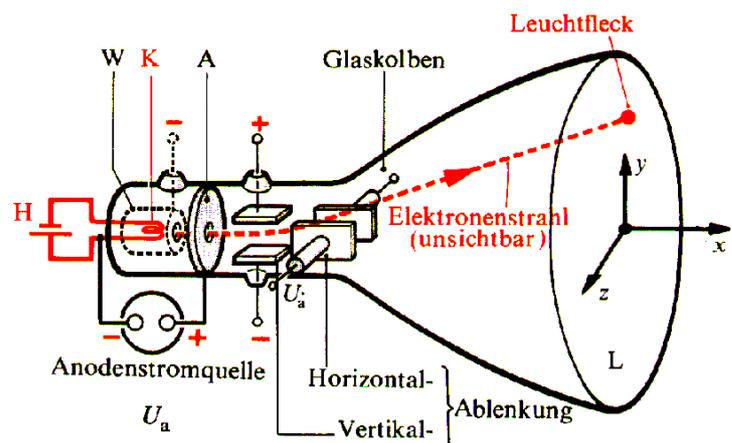
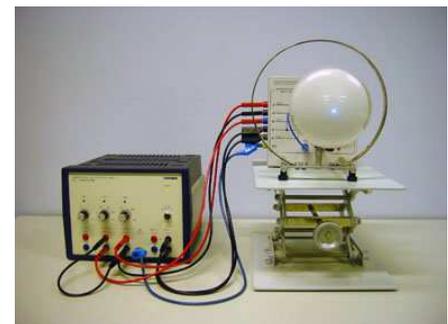


Versuch: Magnetische Ablenkung eines Kathodenstrahls (Braunsche Röhre)

Braunsche Röhre: Elektronen treten aus der Glühkathode aus und werden durch die Anode zum Schirm hin beschleunigt, auf dem sie durch Fluoreszenz einen Lichtfleck erzeugen.

Durch elektrische Felder können diese in 2D abgelenkt werden (Röhrenfernseher)

Durch Annähern eines Magneten werden die Elektronen zusätzlich abgelenkt.



Versuch: Fadenstrahlrohr (Kraft auf Strom im Magnetfeld)

Fadenstrahlrohr: In einen evakuierten Glaskolben wird etwas Wasserstoffgas gefüllt. Elektronen, die aus Kathode austreten und zur Anode beschl. werden, regen das Gas zum Leuchten an.

Geschwindigkeit der Elektronen aus der Energieerhaltung:



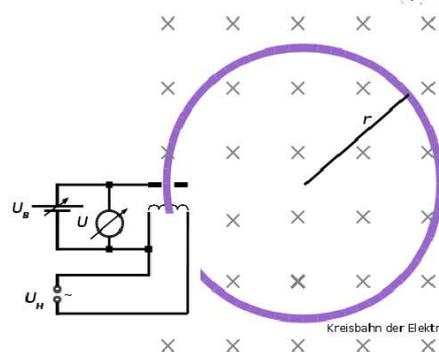
$$\frac{1}{2}mv^2 = eU \Rightarrow v = \sqrt{2eU/m}$$

Ein Helmholtz-Spulenpaar zwingt die Elektronen auf eine Kreisbahn.

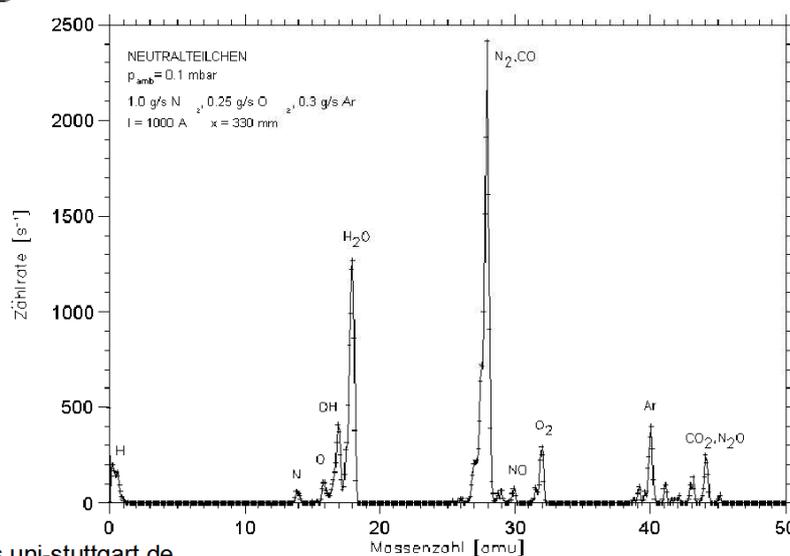
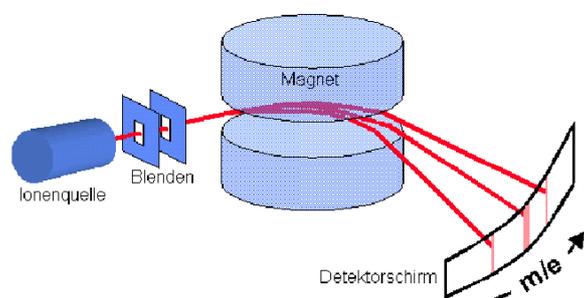
Da v stets senkrecht zu B ist, ist die Lorentz-Kraft auf ein Elektron vom Betrag:

$$F = evB = \frac{mv^2}{R}$$

Der Kreisradius ist damit $R = \sqrt{\frac{2mU}{eB^2}}$



Anwendung: Massenspektrometer



Versuch: Kraft zwischen zwei stromdurchflossenden Leitern

Lässt man durch zwei parallel aufgehängte Drähte in dieselbe Richtung einen Strom fließen, so ziehen sich die Drähte an.

Bei entgegengesetztem Strom stoßen sie sich ab.

Der Leiter sieht das Magnetfeld des jeweils anderen und erfährt eine Lorentz-Kraft:

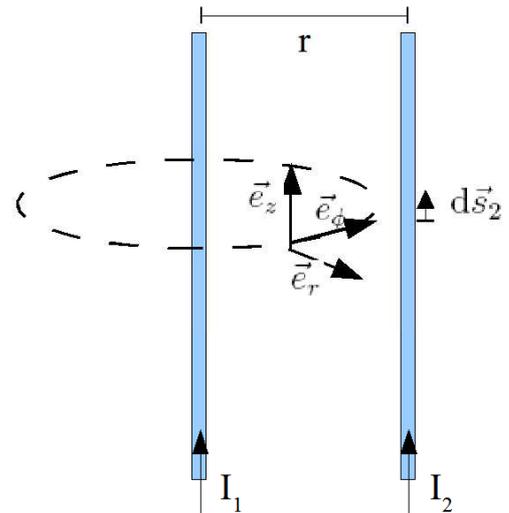
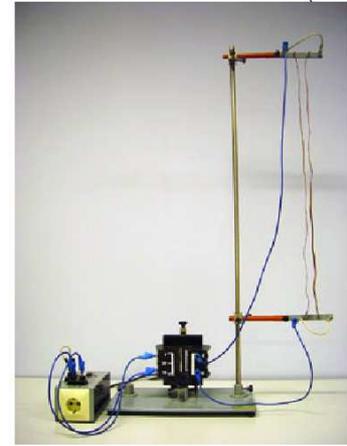
B-Feld erzeugt von I_1 am Ort von I_2 : $\vec{B} = \frac{\mu_0 I_1}{\pi r} \vec{e}_\phi$

Kraft auf Draht 2:

$$\vec{F}_{12} = I_2 \int_{\text{entl. Draht 2}} d\vec{s}_2 \times \vec{B} = I_2 L_2 (\vec{e}_z \times \vec{B})$$

Kraft pro Längeneinheit:

$$\vec{f}_{12} = -\frac{\mu_0}{2\pi r} I_1 I_2 \vec{e}_r$$



Definition des Ampere im SI-System (seit 1948):

Ein Ampere ist die Stärke eines zeitlich unveränderlichen elektrischen Stromes, der, durch zwei im Vakuum parallel im Abstand 1 Meter voneinander angeordneten, geradlinigen, unendlich langen Leitern von vernachlässigbar kleinem, kreisförmigen Querschnitt fließend, zwischen diesen Leitern pro Meter Leiterlänge die Kraft 2×10^{-7} Newton hervorrufen würde.

Darauf basierend werden die anderen elektromagnetischen Einheiten wie Coulomb, Volt, Tesla, Farad etc. abgeleitet.

Versuch: Hall-Effekt:

Ladungen in stromdurchflossenem Leiter erfahren im B-Feld eine Lorentz-Kraft:

$$\vec{F}_L = nq (\vec{v}_D \times \vec{B})$$

→ Ladungstrennung bis Lorentz-Kraft durch Coulomb-Kraft kompensiert wird:

$$\vec{F}_C = nq \vec{E}_{\text{Hall}}$$

→ Hall-Feld: $\vec{E}_{\text{Hall}} = -\vec{v}_D \times \vec{B}$

→ Hall-Spannung

$$U_{\text{Hall}} = b E_{\text{Hall}} = b v_D B = \frac{I B}{n q d}$$

(n : Ladungsträgerdichte, v_D : Driftgeschwindigkeit, Strom $I = j A = n q v_D b d$ im Leiter mit Querschnitt $A = b d$)

Spannungsmessung an den Seitenflächen erlaubt B-Feld-Messung (Hall-Sonde)

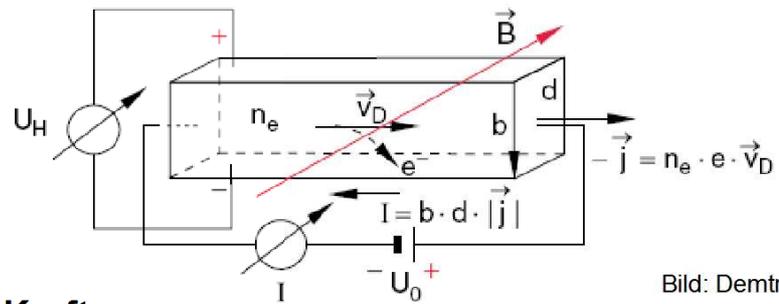


Bild: Demtröder



3.7 Magnetisches Dipolmoment

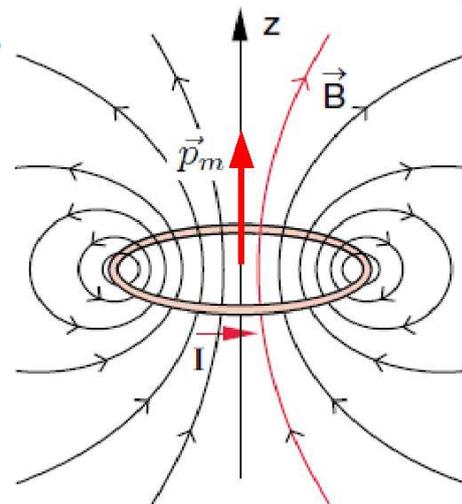
Das Magnetfeld einer stromdurchflossenen Schleife (Strom I , Schleifenfläche A) gleicht einem kurzen Dipolmagneten.

Analog zum elektrischen Dipol:

Magnetisches Dipolmoment $\vec{p}_m = I \vec{A}$

das B-Feld des magnetischen Dipol im Fernfeld ($r \gg a \approx \sqrt{A}$) ist:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{p}_m \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2 \vec{p}_m}{r^5}$$



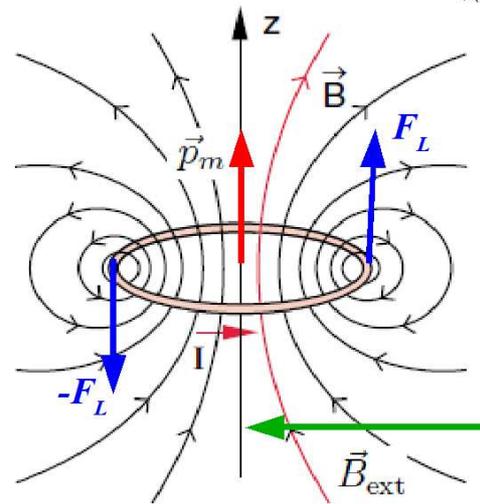
in einem äußeren Magnetfeld B_{ext} sieht dieses Dipolmoment eine Lorentz-Kraft die auf entgegengesetzte Leiterelemente entgegengesetzt wirkt.

→ Drehmoment $\vec{D} = \vec{p}_m \times \vec{B}_{ext}$

→ der magnetische Dipol richtet sich im Feld aus

Außerdem erfährt (analog zum elektr. Dipol) der magnetische Dipol im **inhomogenen Magnetfeld** eine Dipolkraft:

$$\vec{F}_{dip} = (\vec{p}_m \cdot \nabla) \vec{B}_{ext}$$

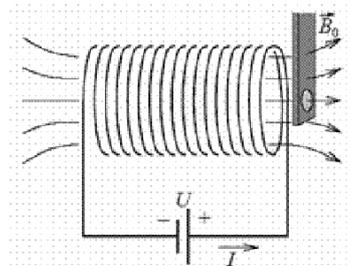


3.8 Magnetismus in Materie

Bisher in Vakuum

Maxwell-Gleichungen: $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$
 $\text{div } \vec{B} = 0$

Magnetfeld einer Spule: $B = \mu_0 \frac{N}{L} I$



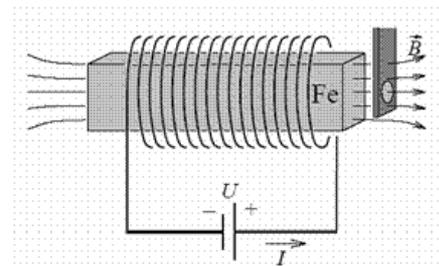
in Materie:

gebundene mikroskopische Ströme (Elektronen in Atomorbitalen)

→ besitzen magnetisches Moment

→ liefern Beitrag zu \vec{B}

Magnetfeld in der Spule: ???



was sind gebundene magnetische Dipolmomente?

1. Elektronenspin

- Elementarteilchen besitzen einen intrinsischen Drehimpuls \vec{S} , genannt **Spin**.
- Dieser liefert ein **magnetisches Moment** $\vec{p}_{\text{Spin}} = -\frac{e}{m_e}\vec{S}$
- Der Spinvektor \vec{S} ist eine **quantenmechanische Observable**, bei der nur eine Vektorkomponente genau messbar und diese quantisiert ist.
beim **Elektron**: $S_z = -\hbar/2$ oder $+\hbar/2$)
- Der Spin eines freien Elektrons kann sich im Magnetfeld ausrichten.
- Für gebundene Elektronen (im Atom) muss zusätzlich das **Pauli-Prinzip** beachtet werden, dass keine 2 Elektronen denselben Zustand (Spin & Atomorbital) einnehmen können.
- ($h = 2\pi\hbar \approx 6,626 \cdot 10^{-34}$ Js ist eine Naturkonstante und heißt **Plancksches Wirkungsquantum**)

2. Bahndrehimpuls

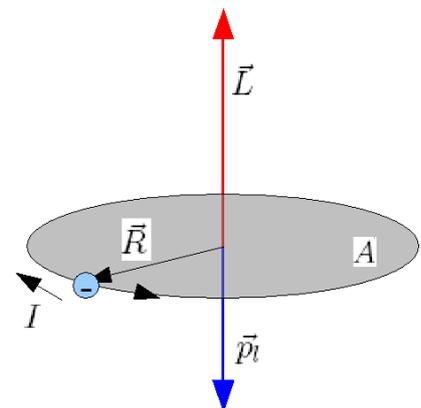
- Elektronen im Atom besitzen zusätzlich einen **Bahndrehimpuls** \vec{L}
- auch dieser ist **quantisiert**: $L_z/\hbar = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm p$
wobei p (Drehimpulsquantenzahl) eine ganze Zahl ist und vom Atomorbital abhängt.
- Bohrsches Atommodell: Elektronen bewegen sich auf Kreisbahnen mit Drehimpuls

$$\vec{L} = m_e(\vec{R} \times \vec{v}) = m_e R^2 \vec{\omega}$$

- es fließt ein Ringstrom mit magnetischem Dipolmoment

$$\begin{aligned} \vec{p}_{\text{Bahn}} &= I\vec{A} = \frac{q}{T}\vec{A} = -\frac{1}{2}eR^2\vec{\omega} \\ &= -\frac{1}{2}\frac{e}{m_e}\vec{L} \end{aligned}$$

- Elektronen können im B-Feld auch ihren Bahndrehimpuls umorientieren (wieder: Pauli-Prinzip)



Orientierung der magnetische Momente

- In den meisten Materialien sind die magnetischen Dipol-Momente (Spin, Bahn) statistisch orientiert, d.h. im Mittel kompensiert sich ihre Wirkung
- Wird ein äußeres Magnetfeld \vec{B}_{ext} eingeschaltet, können sich die magnetischen Dipole ausrichten.

- → **Makroskopische Magnetisierung:** $\vec{M} = \frac{1}{V} \sum_i \vec{p}_m^{(i)}$
(Gesamtmoment pro Volumen)
Einheit: $[M] = 1 \text{ A / m}$

- Diese trägt zusätzlich zum gesamten B-Feld bei: $\vec{B} = \vec{B}_{\text{ext}} + \mu_0 \vec{M}$

- Ähnlich wie in der Elektrostatik ($\vec{E} \leftrightarrow \vec{D}$) führt man auch hier eine zusätzlich Größe ein:

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$$

\vec{H} heißt **magnetische Feldstärke**

Einheit: $[H] = [M] = 1 \text{ A / m}$

Bei ausreichend **kleinen Feldstärken** ist die Magnetisierung **proportional zur Feldstärke:** $\vec{M} = \chi \vec{H}$

und man erhält:

$$\vec{B} = \mu_0(1 + \chi)\vec{H} = \mu_0\mu\vec{H}$$

μ heißt **relative Permeabilität**

χ heißt **magnetische Suszeptibilität.**

beide sind **einheitenlos:** $[\mu] = [\chi] = 1$

Maxwell-Gleichungen in Materie:

H ist mit dem freien (Leitungs-) Strom, B mit dem Gesamtstrom (freier+Magnetisierungsstrom) verknüpft:

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \operatorname{rot} (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 (\vec{j}_{\text{frei}} + \vec{j}_{\text{mag}})$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}_{\text{frei}}$$

und nach wie vor: $\operatorname{div} \vec{B} = 0$

1. Diamagnetismus

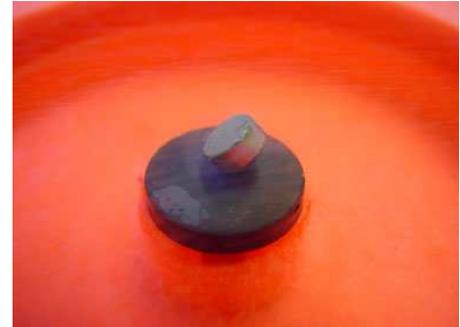
- Atome/Moleküle **ohne permanentes magnet. Dipolmoment**
- im Magnetfeld werden Dipole „induziert“. Diese sind dem äußeren Feld $\vec{M} = \chi \vec{H}$ entgegengerichtet und **reduzieren so das Gesamtfeld**.
- Die Magnetisierung ist also dem äußeren Feld entgegengerichtet:
mit $-1 < \chi < 0$,
typischerweise $\chi = -10^{-9} \dots -10^{-6}$
- Jedes Material zeigt Diamagnetismus. Weil dieser Effekt aber oft sehr klein ist treten diamagnetische Effekte nur in **rein** diamagnetischen Materialien in Erscheinung.
- Beispiele für rein diamagnetische Materialien:
 H_2O , H_2 , N_2 , Edelgase, Cu, Ag, Au, Pb, Bi, ...

diamagnetische Levitation:

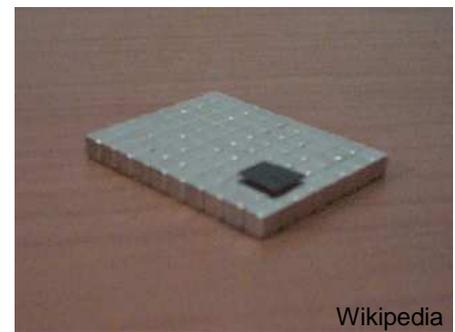
Das dem äußeren Feld entgegengerichtete Magnetisierungsfeld sorgt für eine abstoßende Kraft.

Beispiel Supraleiter im Magnetfeld:

Hier können sich die induzierten Ströme widerstandslos ausbilden und das externe Feld komplett aus dem Supraleiter verdrängen.



aber auch bei anderen diamagnetischen Stoffen kann in hinreichend hohen Magnetfeldern die Gewichtskraft überwunden werden (Beispiel rechts: Graphitplättchen).



Wikipedia

2. Paramagnetismus

- Atome/Moleküle mit **eigenem, permanenten magnet. Dipolmoment**
- Durch thermische Bewegungen sind diese aber statistisch orientiert

$$\vec{M} = \frac{1}{V} \sum_i \vec{p}_m^{(i)} = 0$$

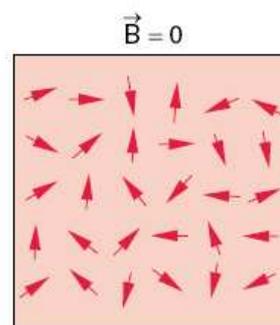
- im B-Feld werden diese teilweise ausgerichtet und **verstärken das externe Feld**. Der Grad der Ausrichtung ist gegeben durch potentielle Energie $E_{\text{pot}} = -\vec{p}_m \cdot \vec{B}$

und thermische Energie $E_{\text{th}} = k_B T$

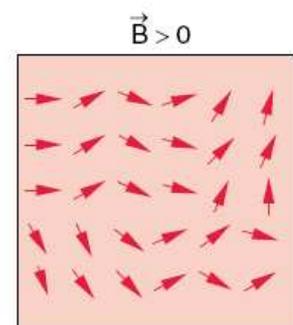
und es gilt $\chi \propto \frac{1}{T}$

- insbesondere ist $\chi > 0$
typischerweise $\chi = 10^{-6} \dots 10^{-2}$

- Beispiele paramagnetischer Stoffe:
 O_2 , Al, Pt, Na,



$$\vec{M} = \frac{1}{V} \sum \vec{p}_m = 0$$



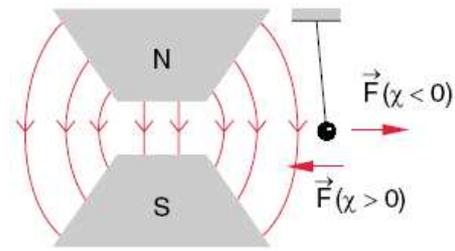
$$\vec{M} = N \cdot p_m \frac{\vec{p}_m \cdot \vec{B}}{3kT} \hat{e}_B$$

Versuch Dia- und Paramagnetischer Körper im inhomogenen Magnetfeld:

Beobachtung; Der diamagnetischer Körper wird aus dem Feld herausgedrückt, der Paramagnetische angezogen.

Potentielle Energie eines magnet. Dipols:

$$E_{\text{pot}} = -\vec{p}_m \cdot \vec{B}$$



Gesamtenergie des Körpers:

$$E_{\text{pot}} = -\sum_i \vec{p}_m^{(i)} \cdot \vec{B} = -V \vec{M} \cdot \vec{B} = -V \frac{\chi}{\mu_0} B^2$$

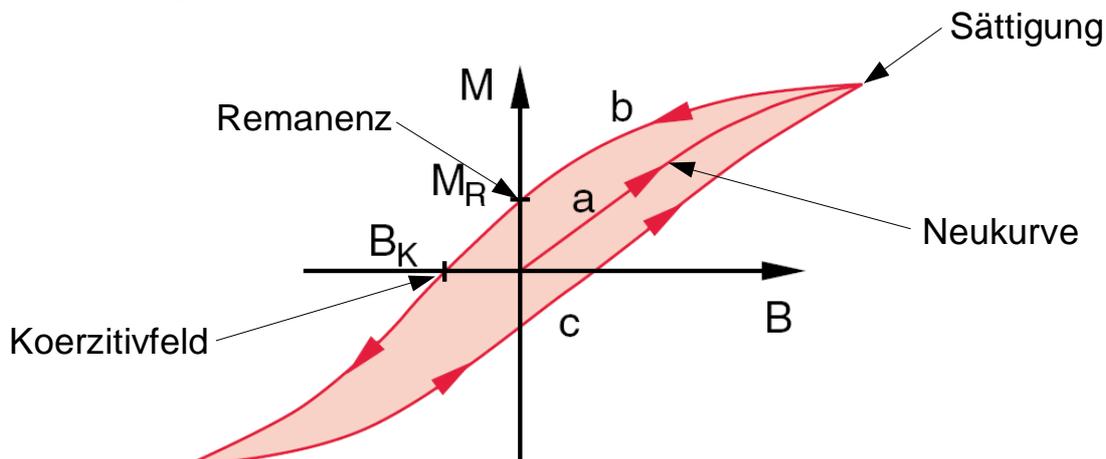
→ Kraft hin zu kleineren B-Feldern, falls $\chi < 0$ (Diamagnetismus)

→ Kraft hin zu größeren B-Feldern, falls $\chi > 0$ (Paramagnetismus)

3. Ferromagnetismus

- Dieser Effekt kann um viele Größenordnungen stärker sein, als beim Dia-/Paramagnetismus: $\chi = 10^{+2} \dots 10^{+5}$
- Beobachtung: Die Magnetisierung ferromagnetischer Stoffe hängt nicht nur vom externen B-Feld ab, sondern auch von ihrer **Vorgeschichte**

→ **Versuch Hysterese:**



Versuch Magnetmodell:

Drehbar gelagerte Magnetnadeln sind in einem zweidimensionalen Gitter angeordnet. Die Magnetnadeln richten sich spontan in kleinen Bezirken parallel zu ihren Nachbarn aus.



Durch Anschalten eines Magnetfelds kann man das Modell leicht magnetisieren. Nach Ausschalten der Spulen bleibt die Magnetisierungsrichtung ziemlich stabil erhalten.

Durch schnelles Bewegen des Magneten über dem Modell lässt sich eine hohe Temperatur simulieren.

Ursprung der Domänenbildung:

Austauschwechselwirkung zwischen Elektronspin eines Atoms den benachbarter Atome:

Beruhet auf Pauli-Prinzip, Spin und räumliche Verteilung (Wellenfunktion) zweier Elektronen können nicht beide symmetrisch sein.

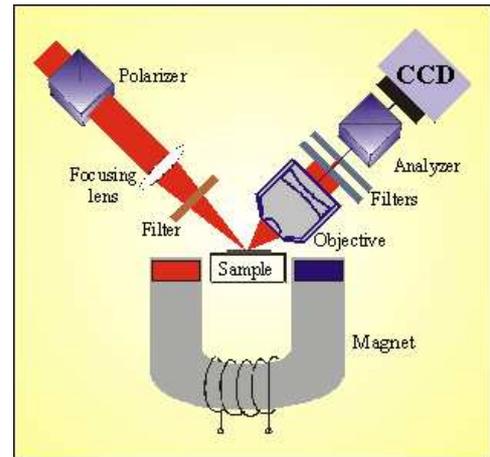
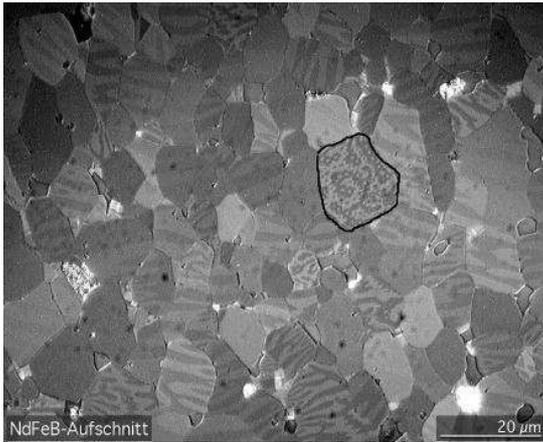
Bei Ferromagneten ist ein **symmetrische Spinverteilung & anti-symmetrischer Wellenfunktion** energetisch günstiger.

→ Ausbildung von **Domänen** gleicher Spinorientierung (**Weißsche Bezirke**)

Die Domänen untereinander sind aber i.A. nicht ausgerichtet und können sich kompensieren.

Im B-Feld wachsen Domänen die parallel zum B-Feld orientiert sind auf Kosten der Benachbarten an.

Sichtbarmachen Weißscher Bezirke:

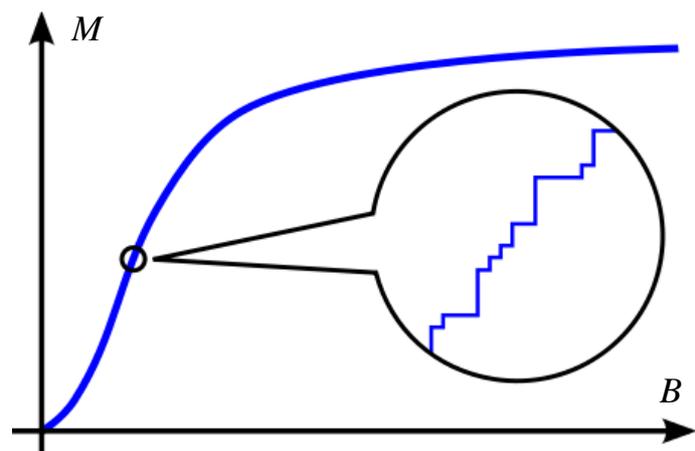


Bilder: Wikipedia & www.ru.nl/ssi/members/andrei_kirilyuk/nonlinear_optics_of

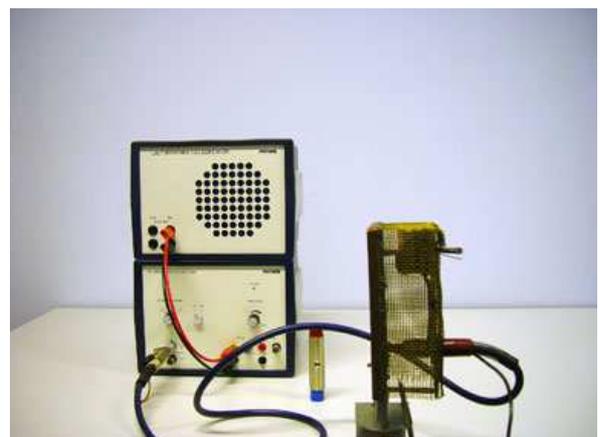
Barkhausen-Effekt:

Bei genauerem Messen:
Magnetisierungskurve verläuft nicht kontinuierlich, sondern besteht aus lauter Treppchen.

→ Dipole innerhalb Bezirken gleicher Magnetisierung klappen gleichzeitig um



Diesen Effekt kann man auch hörbar machen: Änderung des Magnetfelds erzeugt Induktionsstoß, der über Verstärker an einen Lautsprecher angeschlossen ist → Rauschen

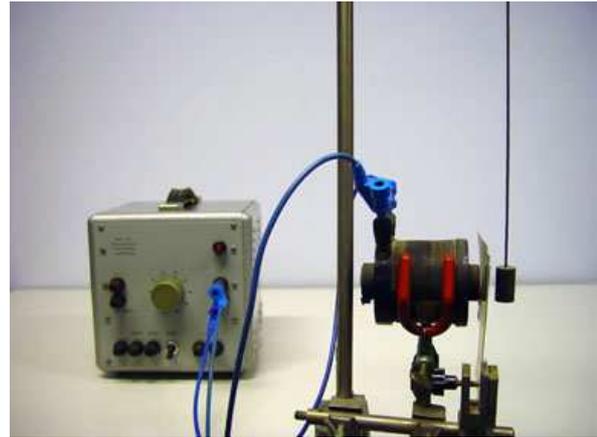


Versuch Curie-Temperatur:

Ein Pendelkörper wird nach Einschalten des Elektromagneten angezogen.

Wird nun der Pendelkörper erhitzt, verliert der Körper bei seiner **Curie-Temperatur** T_C seine ferromagnetischen Eigenschaften: das Magnetfeld ist nicht mehr stark genug, den Körper anzuziehen.

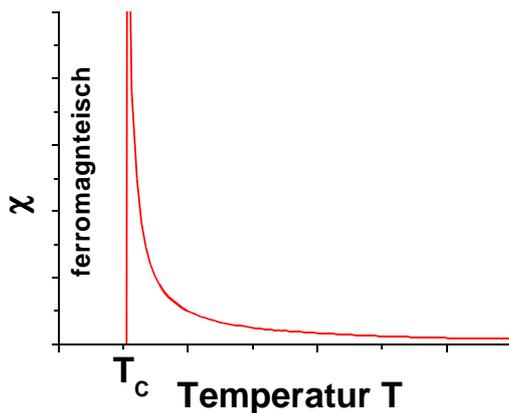
Kühlt der Körper wieder ab, so wird er unterhalb T_C wieder ferromagnetisch und vom Elektromagneten angezogen.



Oberhalb der Curie-Temperatur ($T > T_C$) bleibt der Festkörper aber paramagnetisch, mit der Suszeptibilität

$$\chi(T) = \frac{C}{(T - T_C)} \quad (\text{Curie-Weiss-Gesetz})$$

C heißt Curie-Konstante



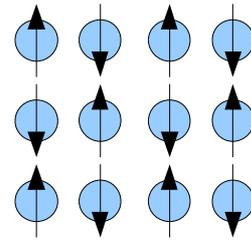
| Substanz | T_C/K | C/K | T_{Schm}/K |
|----------|---------|-------|--------------|
| Co | 1395 | 2,24 | 1767 |
| Fe | 1033 | 2,22 | 1807 |
| Ni | 627 | 0,59 | 1727 |
| EuO | 70 | 4,7 | 1145 |

weitere Formen des Magnetismus:

- **Antiferromagnetismus:**

Die Spins benachbarter Atome stehen antiparallel zueinander und kompensieren sich

Bsp: MnO , MnF_2 , Urannitrid



- **Ferrimagnetismus**

Auch hier sind die Spins antiparallel, aber eine der Orientierungen dominiert, es bleibt ein Restmagnetismus

Bsp: Fe_3O_4

