

Wiederholung:

Maxwell-Gleichungen für statische (zeitlich konstante) Felder

1. $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0 \epsilon_r}$ (Ladungen als Quellen & Senken des E-Felds)
2. $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ (es gibt keine magnetischen Monopole)
3. $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$ (Wirbelfreiheit des E-Felds)
4. $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{j}$ (Ampèresches Gesetz; Ströme erzeugen Magnetfelder)

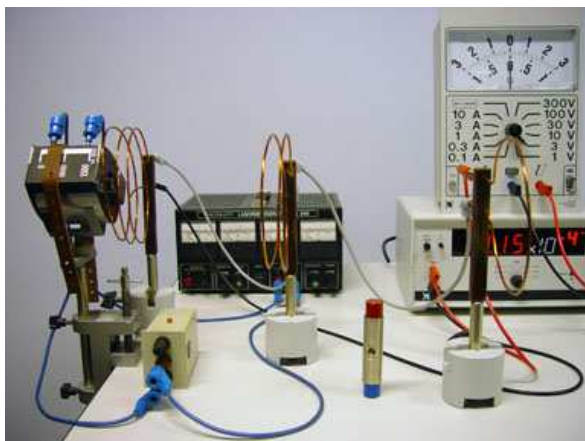
Frage: Gelten diese Gleichungen auch für **zeitlich veränderliche Felder**?

$$\vec{B}(\vec{r}, t), \quad \vec{E}(\vec{r}, t)$$

4.1 Induktion

Versuch Induktion in Spulen durch einen Permanentmagnet oder durch Schalten eines Elektromagneten

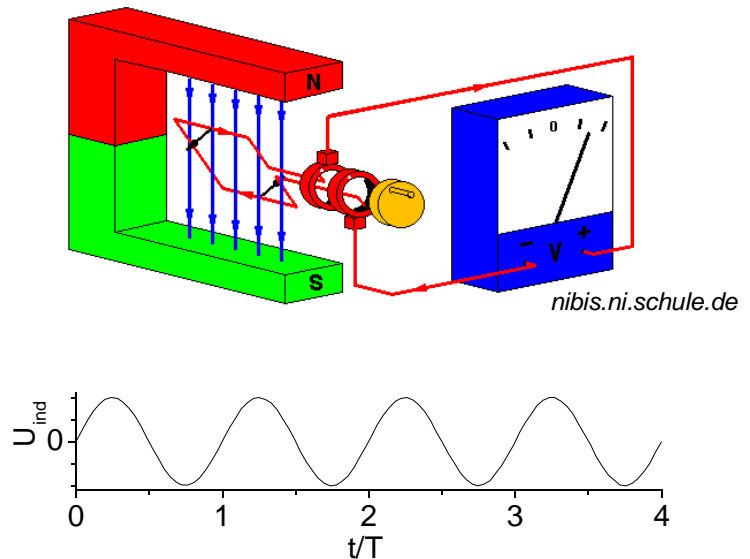
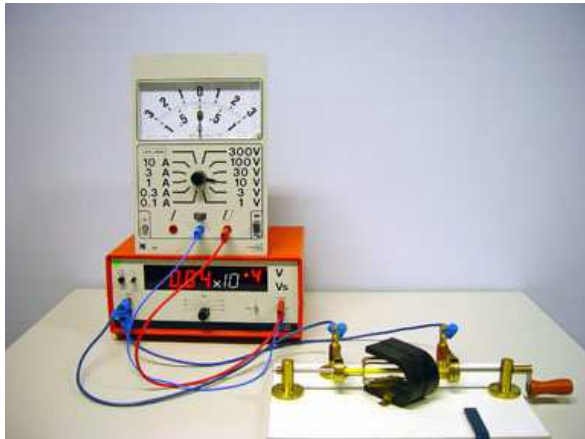
Ein zeitlich veränderliches Magnetfeld erzeugt eine Spannung.



Versuch Leiterschleife im Magnetfeld:

Durch Drehen der Leiterschleife im Magnet (Induktion) wird eine Wechselspannung erzeugt.

→ Induktionsspannung abhängig von Winkel zwischen Leiterschleife (Flächennormalen) und Magnetfeld



Entdeckung der elektromagnetischen Induktion 1831 durch **M. Faraday** (1831):

Der Nordpol eines Stabmagneten wird durch eine Leiterspule geschoben.

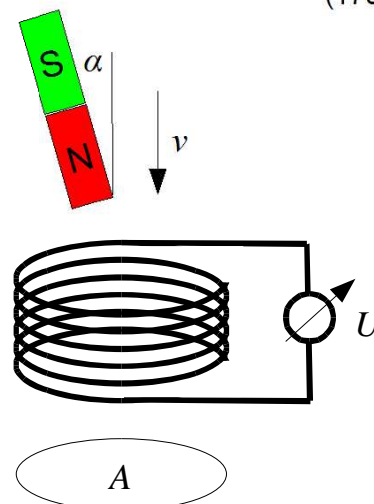
Man beobachtet an den Enden der Spule eine Spannung U , die proportional ist zu:

- der Geschwindigkeit v , mit der der Magnet bewegt wird
→ zeitl. Änderung d/dt des Feldes
- der Fläche A der Spule und zu $\cos \alpha$, wobei α der Winkel zw. der Flächennormalen und dem B-Feld,
bzw. allgemeiner zu $\Phi_m = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$



Michael Faraday
(1791-1867)

(Wikipedia)



→ **Faradaysches Induktionsgesetz:**

$$U_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Änderung des magnetischen Flusses erzeugt eine Induktionsspannung

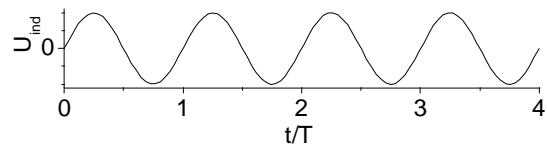
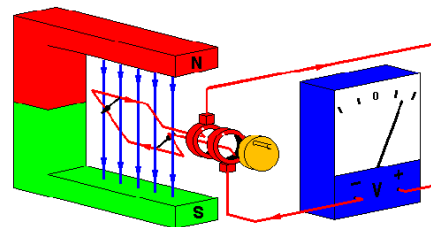
(also auch Änderung der **B-Feld-Richtung** oder auch Änderung der **Leiterschleifengröße** bei zeitl. konst. B-Feld)

Beispiel Leiterschleife im Magnetfeld:

magnet. Fluss durch die Spule bei geg. Winkel α
(hom. Feld angenommen):

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{A} = B A \cos \phi(t) = B A \cos \omega t$$

$$\rightarrow U_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = B A \omega \sin \omega t$$



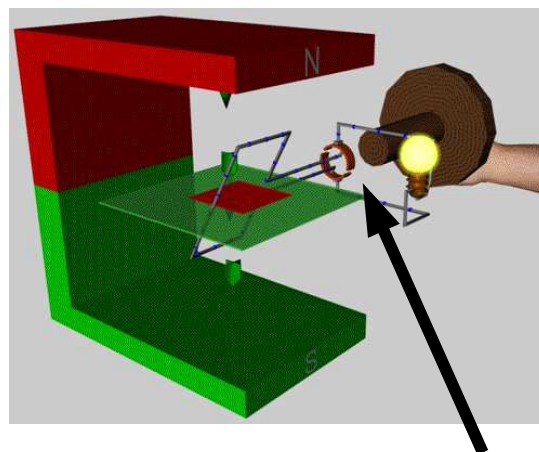
Das ist das **Grundprinzip** des **Generators** und des **Elektromotors** zur Umwandlung zwischen mechanischer (Rotations-) Energie und elektrischer Energie



Gleichspannungsgeneratoren:

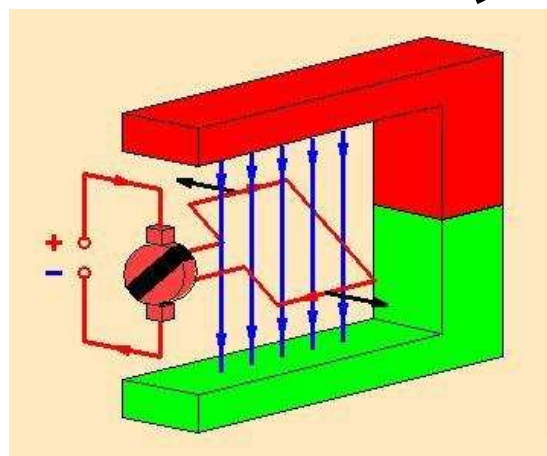
Hier findet eine Umpolung der Kontakte nach jeder halben Drehperiode statt.

→ das Gerät erzeugt eine gepulste, aber stets **gleichgerichtete Spannung**.



Elektromotor:

Hier wird das Prinzip umgekehrt, eine Wechselspannung an der Leiterschleife im Magnetfeld bringt diese zum Rotieren.



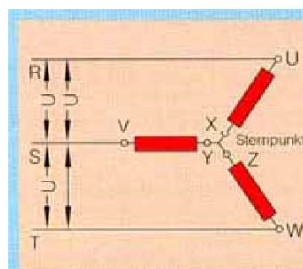
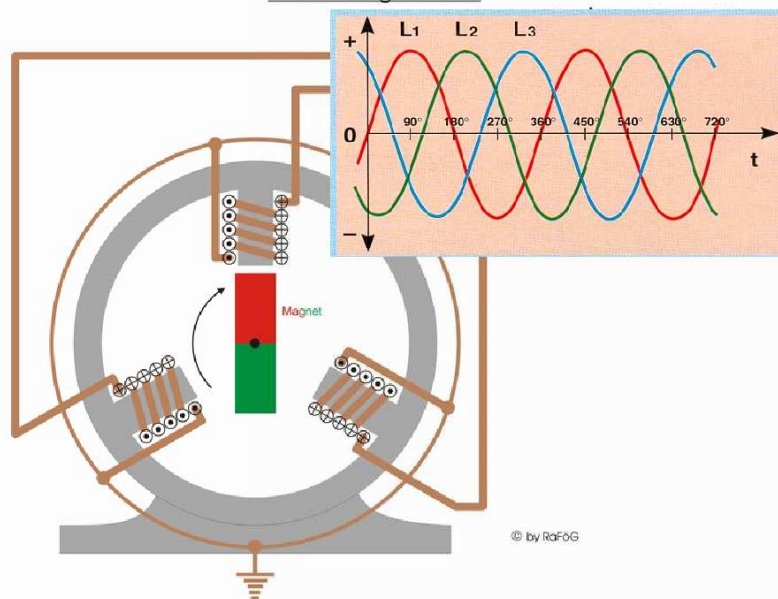
Drehstrom:

Erzeugt 3 Sinus-Spannungen, die jeweils um 120° ($2/3 \pi$) phasenverschoben sind.

Vorteile:

- Drehstrom-Generatoren und -Motoren kommen ohne Schleifkontakte aus → robust, Motoren mit zeitl. konst. Drehmoment
- Summe der Spannungen stets Null → in Stern- oder Dreieckschaltungen können so 3 Spannungen in nur 3 Leitungen transportiert werden (statt 2 pro Spannung bei Wechselstrom)
- zeitl. konst. Gesamtleistung bei symmetrischer Last

Drehstromgenerator



Wir betrachten nun eine (sehr kleine) Leiterschleife konstanter Größe in einem zeitlich veränderlichen Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r}, t)$.

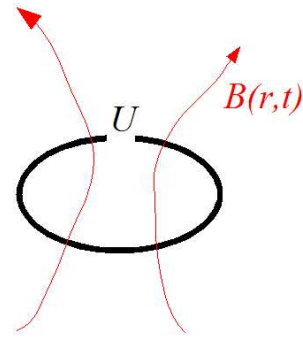
Es gilt
$$U_{\text{ind}} = - \int \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot d\vec{A}$$

Eine Spannung ist mit einem elektrischen Feld

verknüpft:
$$U = \int \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Bei einer geschlossenen Leiterschleife um die Fläche A gilt (mithilfe des Stokesschen Satzes):

$$U = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_A \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{A}$$



Vergleich der Integranden liefert das

Induktionsgesetz

$$\text{rot } \vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{d\vec{B}}{dt}$$

Das ist die **allgemeine Formulierung dieser Maxwell-Gleichung.**

Interpretation:

ein **zeitlich veränderliches Magnetfeld**
erzeugt ein **elektrisches Wirbelfeld**

Achtung: Das elektrische Feld kann wegen $\text{rot } \vec{E} \neq 0$ nun nicht mehr durch ein skalares Potential alleine beschrieben werden (d.h. $\vec{E} = -\text{grad } \phi$), da $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \phi \equiv 0$

Statt dessen muss das Vektorpotential (mit dem auch schon das B-Feld beschrieben wurde) zuhelfe genommen werden.
Es gilt dann:

$$\vec{E} = -\text{grad } \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Bemerkungen:

- für zeitl. konstante Felder gilt wieder die Form der Elektrostatik
- für ϕ und \vec{A} gelten dieselben Eichfreiheiten, wie zuvor

4.2 Lenzsche Regel

Versuch: Ein (nicht-magnetischer) Aluminiumring ist frei pendelnd aufgehängt. Fährt man einen (beliebigen) Pol eines Magneten hinein, bewegt sich der Ring in Bewegungsrichtung mit.

Dies kann man mit dem Induktionsgesetz erklären:

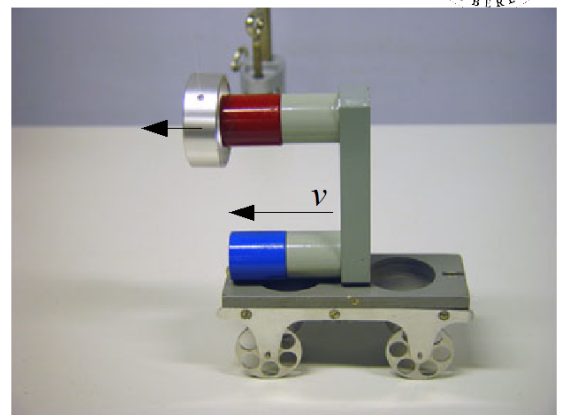
$$U_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Die Induktionsspannung ist der Änderung des magnet. Flusses **entgegengesetzt** (negatives Vorzeichen)

→ es werden **Ströme** im Aluring induziert, die wiederum ein **Magnetfeld** \vec{B}_{ind} erzeugen.

Das induzierte Magnetfeld zeigt in Richtung $-\frac{d\vec{B}}{dt}$,

wirkt also der **Änderung** (d.h. der Bewegungsrichtung) des ursprünglichen B-Felds **entgegen**.



Lenzsche Regel:

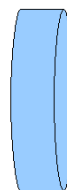
Der **induzierte Strom** ist stets derart gerichtet, dass sein **Magnetfeld** der **Induktionsursache entgegen wirkt**.

Dies kann auch im Sinne der **Energieerhaltung** verstanden werden:

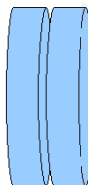
Der Aufbau des Schleifenstroms kostet Energie, die der Bewegung des Magneten entnommen wird.

Thomsonscher Ringversuch:

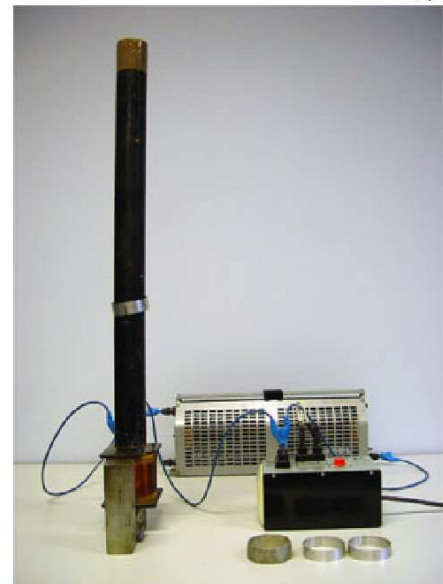
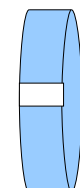
Versuch 1: Über den langen Eisenkern einer Spule wird ein Aluring gestülpt. Schaltet man das Magnetfeld ein ($\rightarrow |dB/dt| > 0$), so wird ein Induktionsstrom im Ring erzeugt, der so gerichtet ist, dass er von der Spule abgestoßen wird.



Versuch 2: Dasselbe Experiment mit einem „aufgeschlitzten“ Aluring



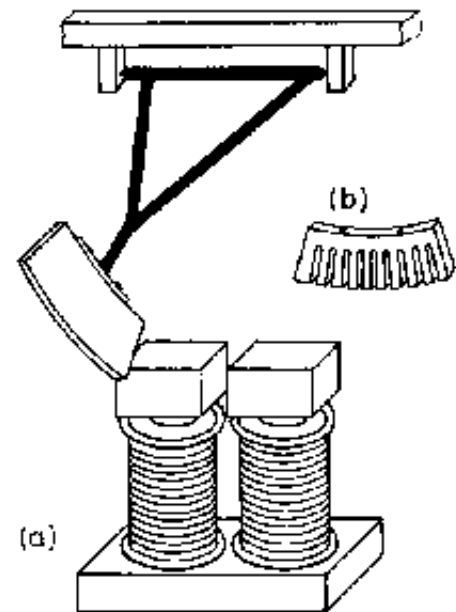
Versuch 3: ... und mit einem „durchbrochenen“ Aluring



Frage: Was passiert in den einzelnen Fällen und warum?

Versuch Wirbelstrombremse (Waltenhofen-Pendel):

Die Blechscheibe (a) schwingt zwischen den Polen des Elektromagneten hindurch. Die Bewegung der Blechscheibe durch das Magnetfeld erzeugt in der Blechscheibe **Wirbelströme**. Die dadurch umgesetzte Energie wird der Schwingung entnommen, diese wird gedämpft. Die Stärke der Dämpfung (Magnetfeldstärke) kann über einen Schiebewiderstand eingestellt werden. Dabei kann die Dämpfung so stark gemacht werden, dass die Scheibe bereits während der ersten Schwingungsperiode zum Stillstand kommt.



Alternativ kann ein durch Schlitze durchbrochenes Pendel (b) genommen werden. Die Wirbelströme können sich dann nur schwach ausbilden → geringere Dämpfung.

4.3 Induktion

Stromdurchflossene Spule:

zeitliche Änderung des Stroms $I(t)$

→ zeitliche Veränderung des B-Felds bzw. des magnetischen Flusses $\Phi_m(t)$

→ Induktionsspannung $U_{\text{ind}}(t) = -\frac{d}{dt}\Phi(t)$,

die der an der Spule angelegten, externen Spannung entgegengerichtet ist (Lenzsche Regel)

In der Spule ist das B-Feld/magnetische Fluss proportional zum Strom:

$$B(t) = \mu_0 \mu \frac{N}{l} I(t) \propto I(t)$$

$$\Phi_m(t) = \int \vec{B}(t) \cdot d\vec{A} \propto I(t)$$

Die Proportionalitätskonstante L heißt

Eigen-/Selbst-Induktivität oder **-Induktion:**

$$\Phi = L I$$

sie hat die Einheit $[L] = 1 \text{ V s} / \text{A} = 1 \text{ Henry} = 1 \text{ H}$

die **Induktionsspannung** ist damit:

$$\begin{aligned} U_{\text{ind}} &= -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt}(L I) \\ &= -L \frac{dI}{dt} \end{aligned}$$

(das letzte Gleichheitszeichen gilt für den häufigen Fall konstanter Selbstinduktivität)

Induktivität einer Spule:

aus $B(t) = \mu_0 \mu \frac{N}{l} I(t) \propto I(t)$

und Gesamtfläche der Spule: NA

(l : Spulenlänge, N : Anzahl der Windungen, A : Fläche einer Schleife)

folgt sofort: $L = \mu_0 \mu \frac{N^2 A}{l}$

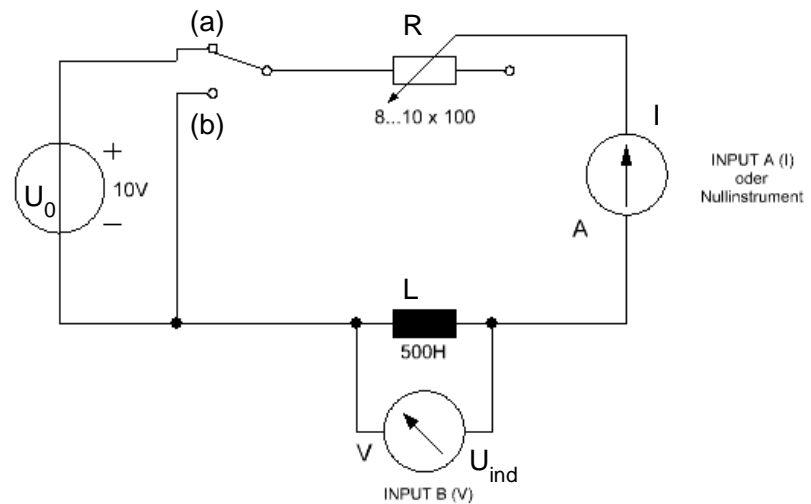
mit der Windungsdichte $n = N/l$, und dem Volumen der Spule $V = lA$ kann man das auch schreiben, als:

$$L = \mu_0 \mu n^2 V$$

Versuch Strom & Spannung beim Ein- /Ausschalten einer Spule:

Strom durch eine Spule und Spannungsabfall an der Spule werden als Funktion der Zeit nach

(a) Einschalten der Spannung und (b) nach Kurzschließen der Spule gemessen



(a) Einschaltvorgang

Zur Zeit $t = 0$ wird die Spannung U_0 angelegt. Nach der Kirchhoffschen Maschenregel gilt:

$$U_0 = RI - U_{\text{ind}} = RI + L \frac{dI}{dt}$$

diese Differentialgleichung hat die Lösung (Anfangsbedingung $I(0) = 0$):

$$I(t) = \frac{U_0}{R} (1 - e^{-(R/L)t})$$

→ Strom steigt nicht sofort auf den Wert des Ohmschen Gesetzes U_0/R , sondern erst nach einer typischen Zeitskala $\tau = L/R$

Die induzierte Spannung an der Spule ist

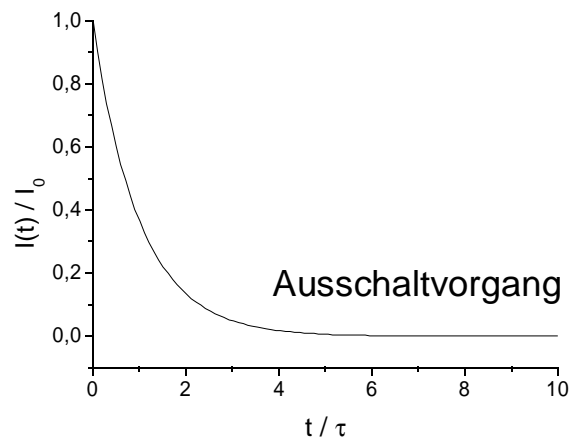
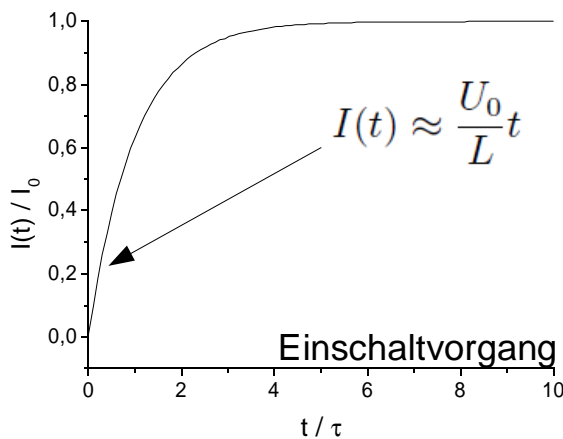
$$U_{\text{ind}} = -L \frac{dI}{dt} = -U_0 e^{-(R/L)t}$$

(b) Ausschaltvorgang

Der Schalter wird bei $t = 0$ in Pos. (b) gebracht. Maschenregel:

$$0 = IR - U_{\text{ind}} = IR + L \frac{dI}{dt}$$

Lösung: $I(t) = I_0 e^{-(R/L)t}$



Versuch Gegenseitige Induktion:

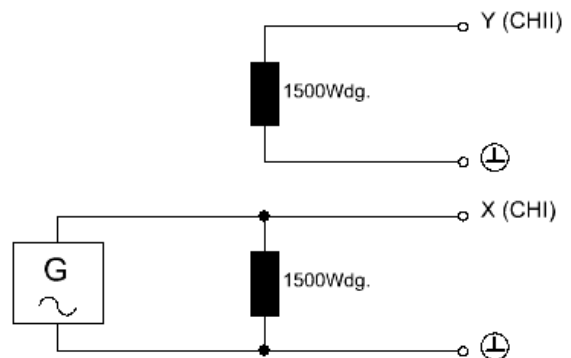
Eine Spule wird an einen Funktionsgenerator angeschlossen, um ein variables Magnetfeld zu erzeugen. Die Spannung einer zweiten Spule in der Nähe der Ersten wird an einem Oszilloskop gemessen.

→ der zeitlich. veränderliche magnet. Fluss der 1. Spule durch die 2. Spule erzeugt in der 2. Spule eine Induktionsspannung

B-Feld der 1. Spule am Ort der 2. Spule (z.B. aus Biot-Savart-Gesetz): $\vec{B}_1(\vec{r}_2, t) \propto I_1(t)$

→ magnet. Fluß durch die 2. Spule: $\Phi_{m,2}(t) = \int \vec{B}_1(\vec{r}, t) \cdot d\vec{A} = L_{12}I(t)$

L_{12} beschreibt die **gegenseitige Induktivität** und hängt von Größe, Ort und Orientierung der beiden Spulen ab.



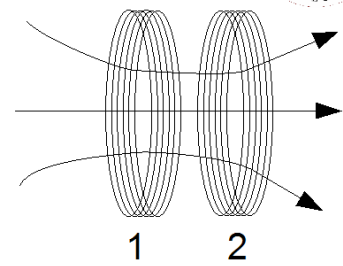
Beispiele: Zwei gleiche, dicht beieinanderliegende Spulen

sämtliche Feldlinien der 1. Spule durchdringen auch die 2. Spule (N Windungen, Radius r).

$$\text{B-Feld Spule 1: } \vec{B}_1(\vec{r}_2) \approx \frac{\mu_0 \mu}{2} \frac{NI_1(t)}{r} \vec{e}_z$$

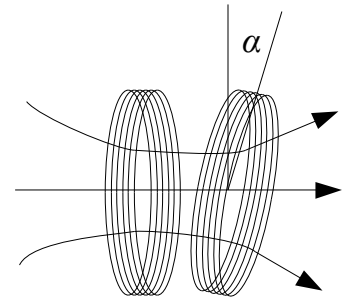
$$\text{Fluss durch Spule 2: } \Phi_2 = \int \vec{B}_1(\vec{r}_2) \cdot d\vec{A}_2 = \pi r^2 B_1 = \frac{\pi}{2} \mu_0 \mu r N I(t)$$

$$\rightarrow \text{gegenseitige Induktivität: } L_{12} = \frac{\pi}{2} \mu_0 \mu r N$$



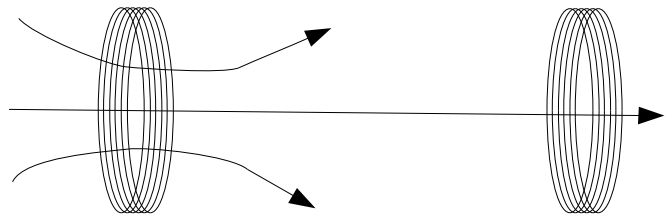
Sind die Spule gegenseitig **verkippt** (kleiner Winkel α), dann gilt wegen des Skalarprodukts im Integranden

$$(\vec{B}_1(\vec{r}_2) \cdot d\vec{A}_2): \quad L_{12} = \frac{\pi}{2} \mu_0 \mu r N \cos \alpha$$



Für **große Abstände** z ist $\vec{B}_1 \approx \frac{\mu_0 \mu}{2} NI \frac{r^2}{z^3} \vec{e}_z$

$$\text{daraus ergibt sich: } L_{12} = \frac{\pi}{2} \mu_0 \mu N \frac{r^4}{z^3}$$



4.4 Energie des magnetischen Felds

Die Energie, die nach dem Abschalten einer Spule am Widerstand R verbraucht wird, muss im Magnetfeld der Spule gesteckt haben:

$$\begin{aligned} W_{\text{magnet}} &= \int_{t=0}^{\infty} I(t) U(t) dt = \int_0^{\infty} I^2 R dt \\ &= \int_0^{\infty} I_0^2 e^{-2(R/L)t} R dt = \frac{1}{2} L I_0^2 \end{aligned}$$

Die Energie, die in einer **stromdurchflossenen Spule** steckt ist also

$$W_{\text{magnet}} = \frac{1}{2} L I^2$$

vgl. Energie des elektrischen Felds in einem **geladenen Kondensator**:

$$W_{\text{el}} = \frac{1}{2} C U^2$$

Für eine Spule gilt $L = \mu_0 \mu n^2 V$ und $B = \mu_0 \mu n I$

folglich: $W_{\text{magnet}} = \frac{1}{2} \frac{B^2 V}{\mu_0 \mu}$

die **Energiedichte** (Energie pro Volumen) ist dann $w_{\text{magnet}} = \frac{W_{\text{magnet}}}{V} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0 \mu}$

und mit $H = B/(\mu_0 \mu)$ folgt daraus die...

Energiedichte des magnetischen Felds:

$$w_{\text{magnet}} = \frac{1}{2} B H$$

Energiedichte des gesamten elektro-magnetischen Felds:

$$w_{\text{el-mag}} = \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H})$$

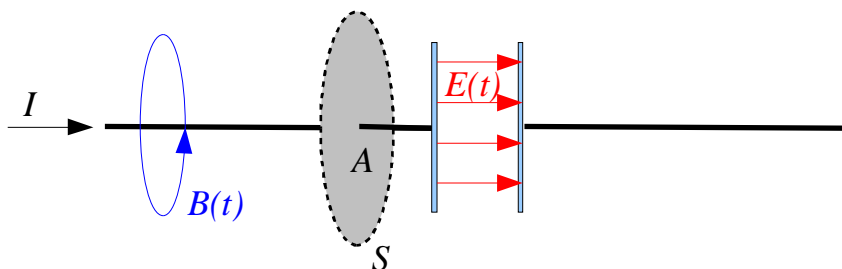
(dieser vektorielle Ausdruck gilt allgemeiner also auch für anisotrope Systeme)

4.5 Verschiebungsstrom

J. C. Maxwell: **Ampèresches Gesetz kann nicht vollständig sein!**

Begründung:

Betrachte einen geraden Leiter, der in einen Plattenkondensator mündet:

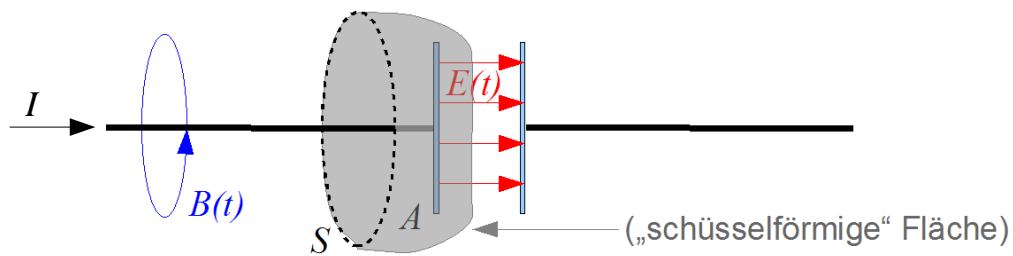


Ampèresches Gesetz: Integral des Magnetfelds um geschlossene Kurve S ist gleich dem Strom I durch die von S umschlossene Fläche A :

$$\oint_{S=\partial A} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I = \mu_0 \int_A \vec{j} \cdot d\vec{A}$$

Es wird hier aber keine Aussage über die **Form der Fläche** A gemacht, diese kann also **beliebig gewählt** werden.

wir können also auch folgende Fläche betrachten (bei **gleichem Weg S**):



im Kondensator fließt nun aber kein Strom. Demnach wäre

$$\oint_{S=\partial A} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I = \mu_0 \int_A \vec{j} \cdot d\vec{A} = 0$$

→ **Widerspruch!**

Lösung: Der Strom außerhalb des Kondensators erzeugt ein zeitlich veränderliches E-Feld (da Ladungen auf den Kondensator fließen). Diesem entspricht ein sog. **Verschiebungsstrom**

$$I_V = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} (\epsilon_0 \vec{A} \cdot \vec{E}) = \epsilon_0 \vec{A} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

(auch wenn im leeren Kondensator kein tats. Ladungstransport stattfindet)

mit der Verschiebungsstromdichte $\vec{j}_V = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
wird das Ampèresche Gesetz dann zu

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} &= \mu_0 I_{\text{ges}} = \mu_0 \int_A (\vec{j} + \vec{j}_V) \cdot d\vec{A} \\ &= \int_A \left(\mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{A} \end{aligned}$$

mithilfe des Stokesschen Satzes und mit der Lichtgeschwindigkeit $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$

wird dies zur allgemeinen Formulierung dieser **Maxwell-Gleichung:**

$$\boxed{\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}} \quad \text{oder} \quad \boxed{\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}$$

→ **Magnetfelder werden durch Ströme und durch zeitlich veränderliche elektrische Felder erzeugt**

Zusammenfassung der Maxwell-Gleichungen:

$$(1) \quad \operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon} \rho \quad \text{bzw.} \quad \operatorname{div} \vec{D} = \rho$$

$$(2) \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$(3) \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{bzw.} \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$(4) \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$



4.6 Wechselstrom



In Generatoren von Kraftwerken werden üblicherweise **Wechselspannungen** erzeugt.

Meist hat man es mit einem sinusförmigen Verlauf zu tun: $U(t) = U_0 \sin(\omega t)$

Allgemein: **periodischer Verlauf** der Spannung $U(t) = U(t + T)$;

T : Periodendauer; $f = 1 / T$: Frequenz; $\omega = 2\pi f = 2\pi / T$: Winkelfrequenz

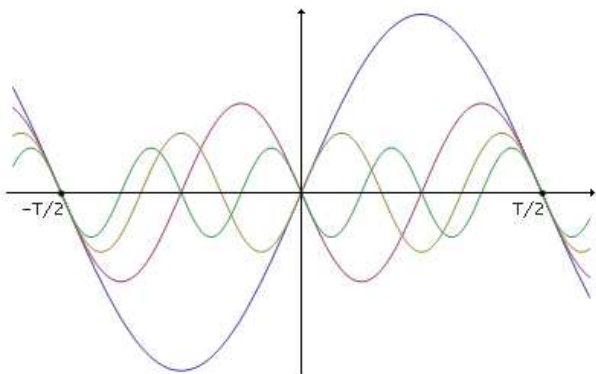
Einheiten: $[f] = 1/s = 1 \text{ Hertz} = 1 \text{ Hz}$;
 $[\omega] = 1/s$ (wird üblicherweise nicht in Hz angegeben)

periodische Funktionen lassen sich aber immer als Summe von Sinus- und Cosinus-Funktionen darstellen (**Fourier-Reihe**):

$$U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} [(a_n \sin(n\omega t) + b_n \cos(n\omega t))]$$

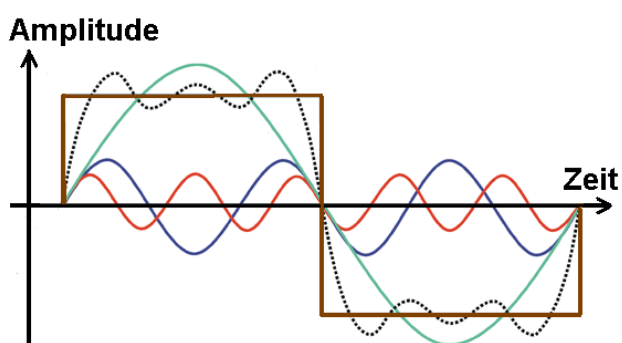
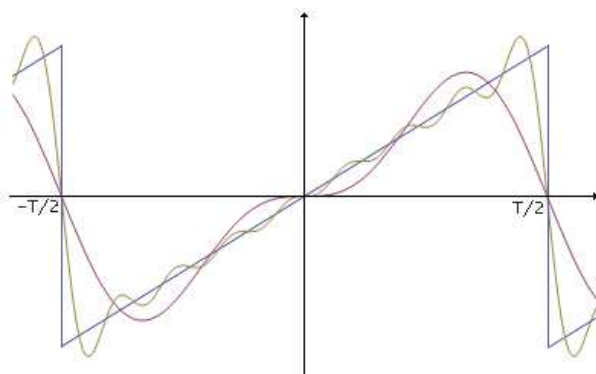
→ Betrachtung von sinus- bzw. cosinusförmigen Verläufen reicht aus um allgemeine Wechselspannungen zu beschreiben.

grafische Beispiele von Fourier-Reihen:



Sinuskurven mit entspr. Phasen addiert
 \approx periodische Sägezahn-Funktion

Sinuskurven mit entspr. Phase addiert
 \approx periodische Rechteck-Funktion



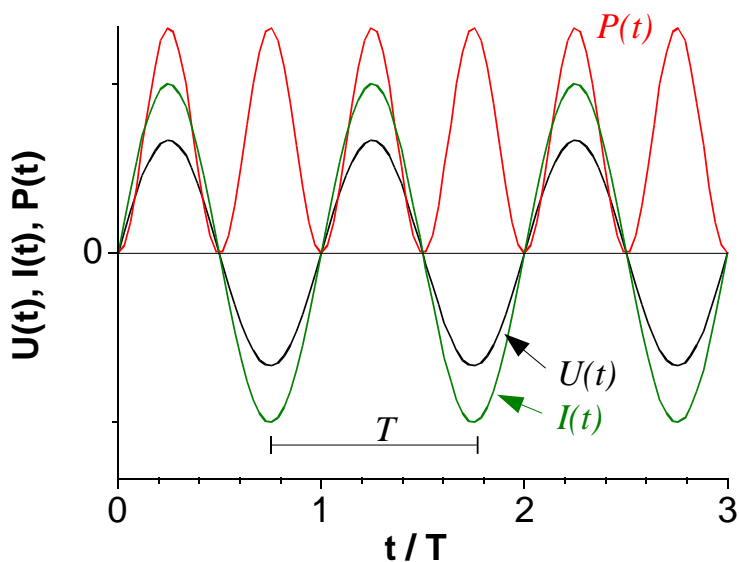
<http://me-lrt.de/reelle-fourieranalyse-fourierreihenentwicklung>

<http://www.analogeklangsynthese.de/grafiken/history>

liegt die Spannung an einem Widerstand R an, so fließt ein **Wechselstrom**:

$$I(t) = I_0 \sin(\omega t)$$

Die **Leistung** ist dann $P(t) = U(t) I(t) = U_0 I_0 \sin^2(\omega t)$



Zur Beschreibung von Wechselströmen führt man **Effektivwerte** ein.
Das sind diejenigen Stromstärken und Spannungen,
bei denen die **mittlere Leistung** die eines **Gleichstromkreises** wäre.

Mittlere Leistung:
$$\bar{P} = \langle P(t) \rangle_t = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T U_0 I_0 \sin^2(\omega t) dt$$

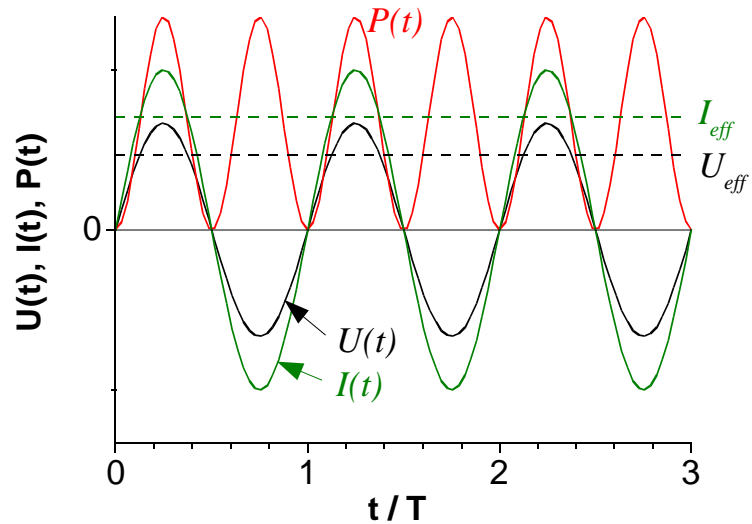
$$= \frac{1}{2} U_0 I_0$$

Dieselbe Leistung hätte man
bei Gleichstrom/-spannung bei

$$U_{\text{eff}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$$

und

$$I_{\text{eff}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$



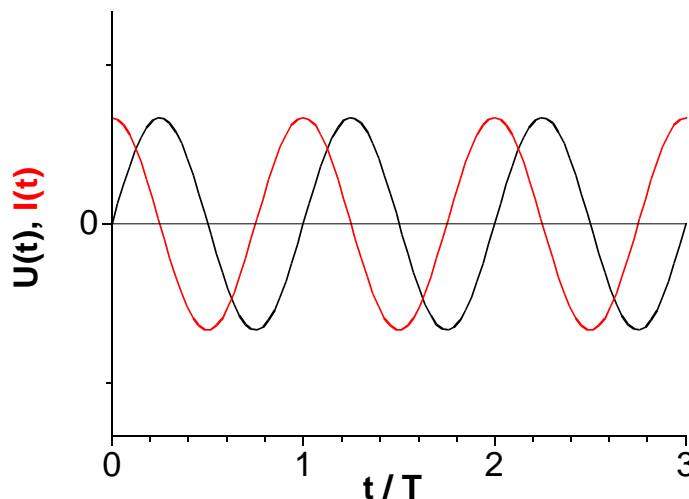
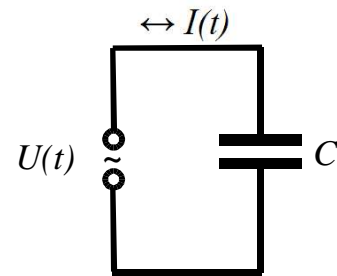
Wechselstromkreis mit einer Kapazität:

aus $U = Q/C$ folgt
$$\frac{dU}{dt} = \frac{1}{C} \frac{dQ}{dt} = \frac{1}{C} I$$

mit $U(t) = U_0 \sin(\omega t)$

ist dann $I(t) = \omega C U_0 \cos(\omega t) = \omega C U_0 \sin(\omega t + \pi/2)$

der **Strom eilt** also der **Spannung** um eine **viertel Periode** ($\pi/2$) **voraus**:

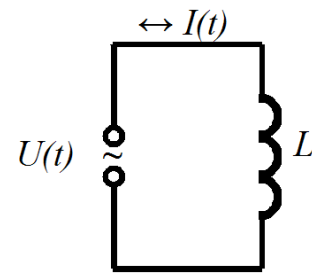


Wechselstromkreis mit einer Induktivität:

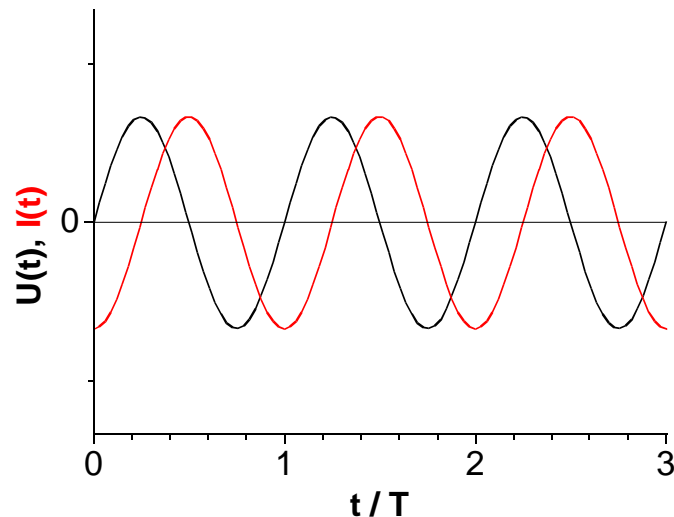
laut Maschenregel gilt für die externe und die induzierte Spannung: $U(t) + U_{\text{ind}}(t) = 0$

also: $U_0 \sin(\omega t) = L \frac{dI}{dt}$

und damit: $I(t) = \frac{U_0}{L} \int \sin(\omega t) dt = -\frac{U_0}{\omega L} \cos(\omega t)$



der **Strom** ist also gegenüber der **Spannung** um eine **viertel Periode** ($\pi/2$) **verzögert**.



Rechnen mit komplexen Größen:

Oft ist es praktisch, periodische Größen (z.B. hier Spannung & Strom)

mathematisch als **komplexe Werte** darzustellen: $U(t) = U_0 e^{i\omega t}$

wobei der **physikalische Wert** durch den **Realteil** beschrieben wird:

$$U_{\text{phys}} = \text{Re } U(t) = U_0 \cos \omega t$$

dabei gilt für eine **komplexe Zahl** z :

$$\begin{aligned} z &= x + i y = \text{Re } z + i \text{Im } z \\ &= |z| e^{i\phi} = |z| (\cos \phi + i \sin \phi) \end{aligned}$$

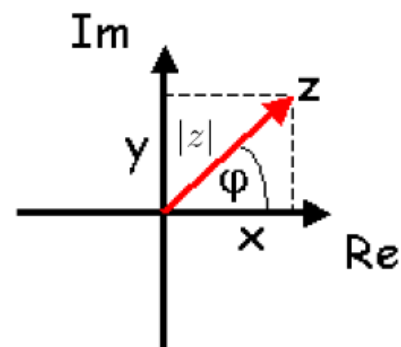
wobei $i = \sqrt{-1}$ und $\frac{1}{i} = -i$

und **Amplitude** und **Phase**:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z z^*} \quad \text{und}$$

$$\phi = \arctan \frac{y}{x}$$

komplexe Zahlenebene:



am Beispiel Wechselstromkreis mit Kapazität erkennt man diese Nützlichkeit:

$$\begin{aligned} I(t) &= C \frac{dU}{dt} = i \omega C U_0 e^{i\omega t} \\ &= (i \omega C) U(t) \\ &= \frac{1}{X_C} U(t) \end{aligned}$$

es besteht eine Beziehung zwischen U und I ähnlich dem **Ohmschen Gesetz**; der Kondensator lässt sich mit einem **imaginären Widerstand** beschreiben:

$$X_C = \frac{1}{i\omega C}, \text{ der Impedanz einer Kapazität}$$

die Einheit der Impedanz ist ebenfalls das Ohm.

analog für den Wechselstromkreis mit Induktivität:

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{1}{L} \int U(t) dt = \frac{1}{L} \int U_0 e^{i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{i\omega L} U_0 e^{i\omega t} = \frac{1}{i\omega L} U(t) \\ &= \frac{1}{X_L} U(t) \end{aligned}$$

die **Impedanz einer Induktivität** ist also:

$$X_L = i \omega L$$

Die Kirchhoffschen Regeln gelten auch für den Wechselstrom.

Beispiel:

serielle Schaltung von Ohmschen, induktiven und kapazitiven Elementen:

$$U(t) = U_0 e^{i\omega t} = L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} + R I$$

beidseitiges Differenzieren nach der Zeit:

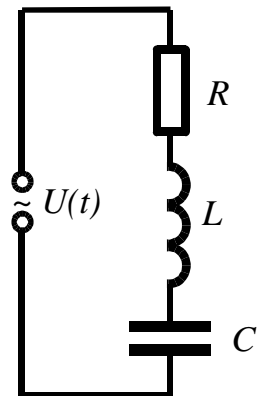
$$i\omega U(t) = L \frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{1}{C} I + R \frac{dI}{dt}$$

dies kann man lösen mit dem Ansatz: $I(t) = I_0 e^{i(\omega t - \phi)}$

$$\text{dann: } i\omega U(t) = \left(-L\omega^2 + i\omega R + \frac{1}{C} \right) I(t)$$

Umformen:

$$\begin{aligned} U(t) &= \left(i\omega L + R + \frac{1}{i\omega C} \right) I(t) \\ &= (R + X_L + X_C) I(t) \end{aligned}$$



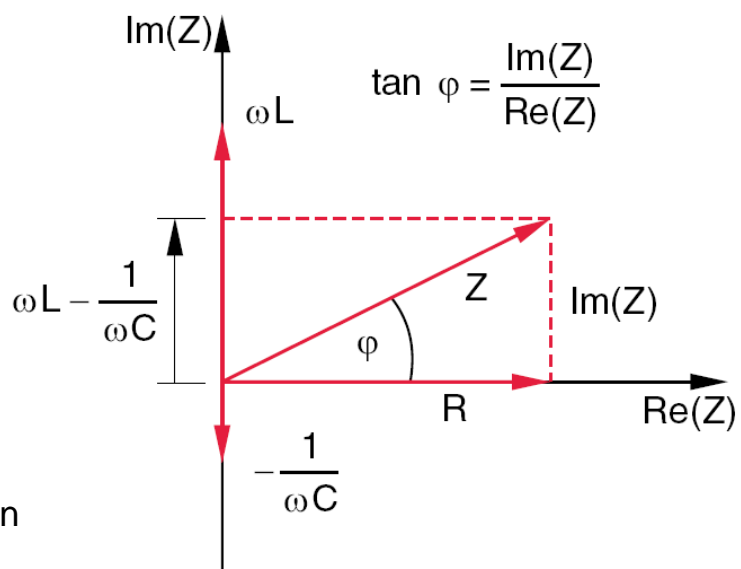
mit der **komplexen Impedanz**

$$Z = R + X_L + X_C$$

Der Betrag der Impedanz $|Z|$ heißt **Scheinwiderstand**.

Die **Phasenverschiebung** ϕ zwischen Strom und Spannung ergibt sich aus:

$$\tan \phi = \frac{\text{Im } Z}{\text{Re } Z} = \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R}$$



rechts: vektorielle Addition der einzelnen Widerstände

Leistung im Wechselstromkreis:

Achtung: es müssen die physikalisch relevanten **Realteile** zur Berechnung

herangezogen werden: $U_{\text{phys}}(t) = \text{Re } U(t) = \frac{1}{2}(U(t) + U^*(t))$

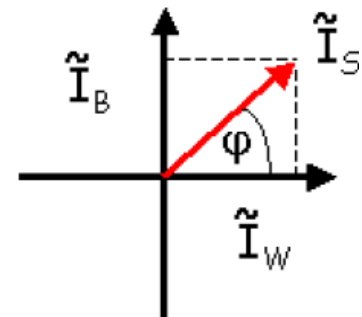
damit ist mittlere Leistung:
$$\begin{aligned} \bar{P} &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2}(U(t) + U^*(t)) \frac{1}{2}(I(t) + I^*(t)) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} (ZI_0 e^{i(\omega t + \phi)} + k.k.) \frac{1}{2} (I_0 e^{i(\omega t + \phi)} + k.k.) dt \\ \text{wegen } \int_0^{T=2\pi/\omega} e^{i 2\omega t} dt &= 0 : & &= \frac{1}{4} (Z + Z^*) I_0^2 \\ & & &= \text{Re}(Z) I_{\text{eff}}^2 = R I_{\text{eff}}^2 \end{aligned}$$

nur der Ohmsche Widerstand trägt Leistung

→ **Wirkwiderstand**, die anderen sind **Blindwiderstände**.

Durch beide Widerstände fließt aber Strom. Daher:

Scheinstrom = Wirkstrom + Blindstrom



Generelle Beschreibung

bei gegebener Frequenz ω : $U_\omega(t) = Z_\omega I_\omega(t)$

Fließen im Stromkreis gleichzeitig Ströme mit verschiedenen Frequenzen und relativen Phasen, so gilt das Superpositionsprinzip:

$$U(t) = \sum_k U_k(t) = \sum_k U_{k,0} e^{i(\omega_k t - \phi)}$$

und
$$I(t) = \sum_k I_k(t) = \sum_k I_{k,0} e^{i(\omega_k t - \psi)}$$

dann ist
$$Z_{\omega_k} = \frac{U_{k,0}}{I_{k,0}} e^{i(\psi_k - \phi_k)}$$

beliebige Spannungspulse lassen sich in eine Fourier-Reihe zerlegen und so die Ausgangssignale frequenzabhängig bei gegebenem Z_{ω_k} bestimmen.

(a) der Hochpass

Aus Maschenregel erhält man folgende Beziehung zwischen Ein- und Ausgangsspannung:

$$U_e = U_C + U_a = \frac{1}{i\omega C} I_C + R I_a$$

$$= \left(\frac{1}{i\omega C} + R \right) I_a = \frac{R + 1/(i\omega C)}{R} U_a$$

Umformen:
$$U_a = \frac{R}{R + 1/(i\omega C)} U_e$$

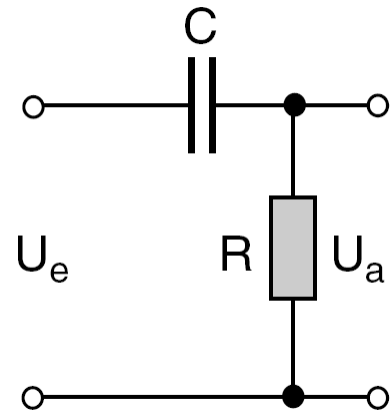


Bild: Demtröder

Betrag:

$$|U_a| = \sqrt{U_a U_a^*} = \sqrt{\frac{R^2}{(R + 1/(i\omega C))(R - 1/i\omega C)}} |U_e|$$

$$= \frac{RC \omega}{\sqrt{1 + R^2 C^2 \omega^2}} |U_e|$$

Phase:

$$\tan \phi = \frac{\text{Im } U_a/U_e}{\text{Re } U_a/U_e} = \frac{1}{RC\omega}$$

Grafik oben: Verhältnis zwischen Aus- und Eingangsspannung in Abh. der Frequenz

→ Wechselspannungen mit **niedrigen**

Frequenzen $\omega \lesssim \omega_0 = \frac{1}{RC}$

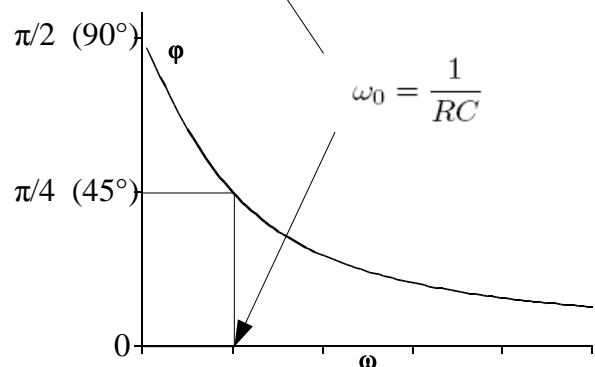
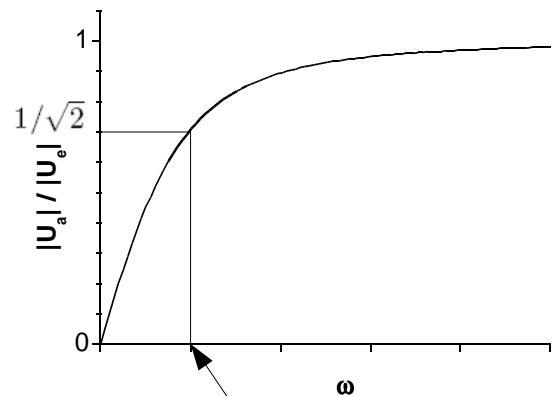
werden mit abnehmender Frequenz zunehmend **gedämpft**.

Hohe Frequenzen werden durchgelassen

→ **Hochpass**

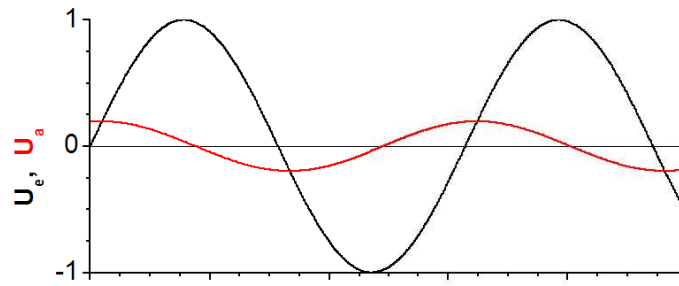
Außerdem (Grafik unten): **Phasenverschiebung** zwischen

$\phi = \pi/2$ (90°) bei $\omega = 0$,
 $\phi = \pi/4$ (45°) bei $\omega = 1/RC$ und
 $\phi = 0$ für $\omega \gg 1/RC$

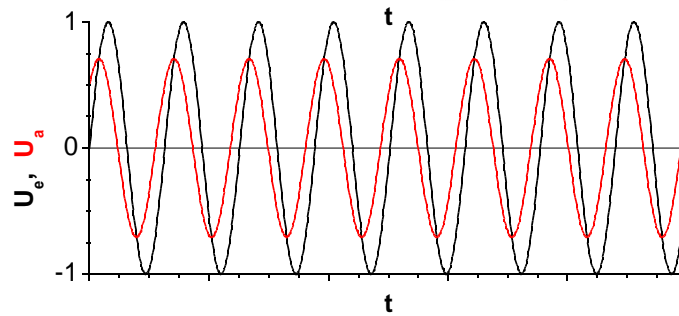


Beispiele Hochpass:

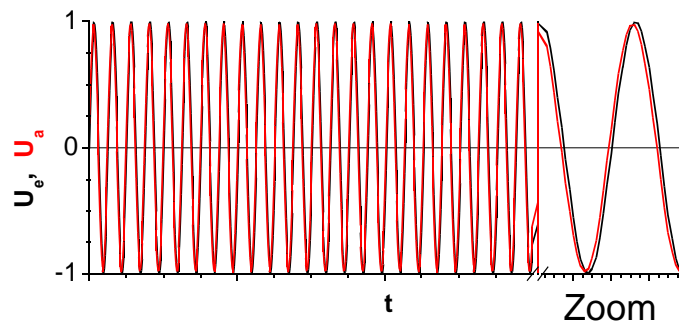
1. $\omega = 0,2 / RC$



2. $\omega = 1 / RC$



3. $\omega = 5 / RC$



(a) der Tiefpass

Hier sind R und C gegenüber der Hochpass vertauscht. Eine analoge Rechnung liefert:

$$U_a = \frac{1/(i\omega C)}{R + 1/(i\omega C)} U_e = \frac{1}{1 + iRC\omega} U_e$$

Betrag: $|U_a| = \frac{1}{\sqrt{1 + R^2 C^2 \omega^2}} |U_e|$

Phase: $\tan \phi = -RC \omega$

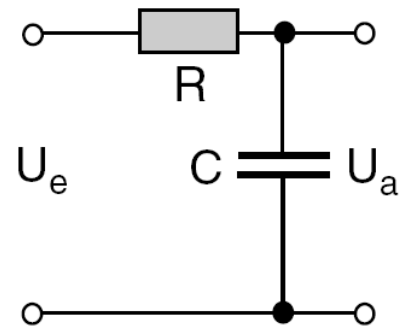


Bild: Demtröder

hier werden nun insbesondere

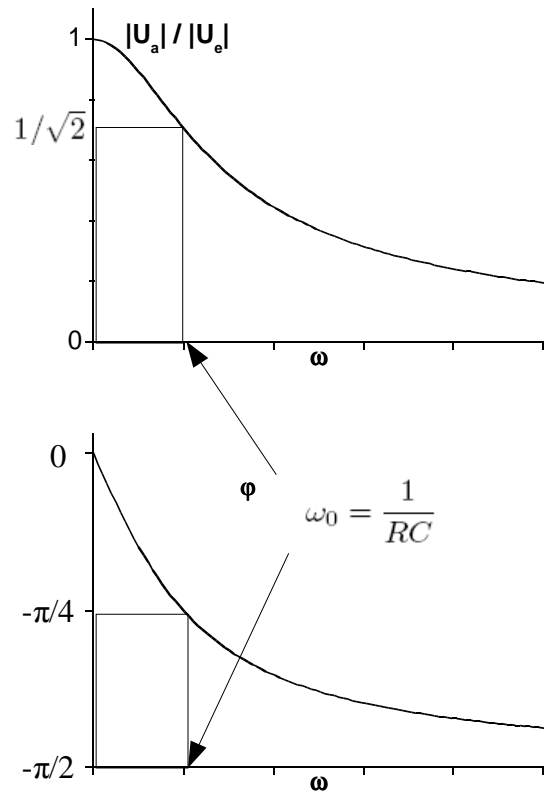
hohe Frequenzen mit $\omega \gg \omega_0 = \frac{1}{RC}$
gedämpft.

Wechselspannungen mit **niedrigen Frequenzen** werden durchgelassen

→ Tiefpass

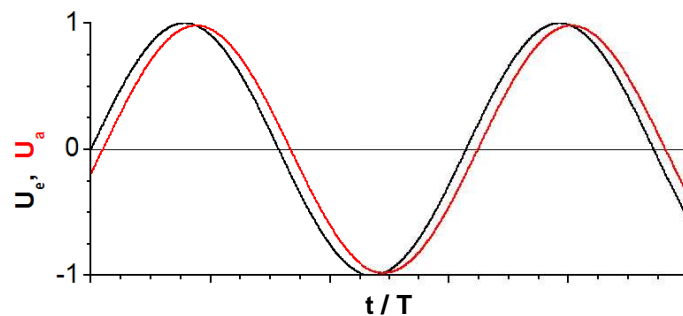
Außerdem (Grafik unten):
Phasenverschiebung mit negativem Vorzeichen:

$\varphi = 0$ bei $\omega = 0$,
 $\varphi = -\pi/4$ bei $\omega = 1/RC$ und
 $\varphi = -\pi/2$ für $\omega \gg 1/RC$

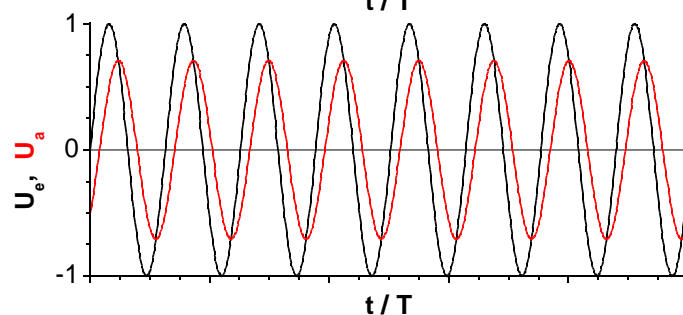


Beispiele Tiefpass:

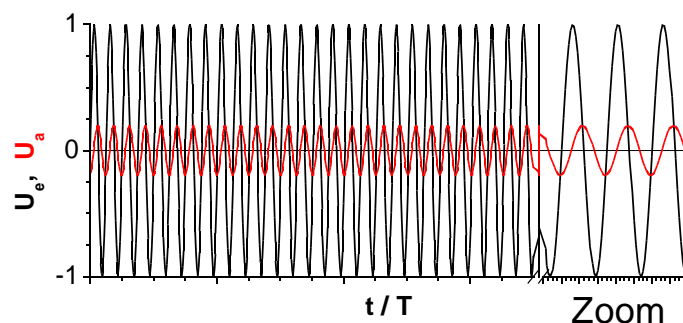
1. $\omega = 0,2 / RC$



2. $\omega = 1 / RC$



3. $\omega = 5 / RC$



(c) Frequenzfilter

Durch Kombination von Kapazität und Induktivität kann man einen Frequenzfilter bauen.

Ähnliche Rechnung wie zuvor liefert:

$$U_a = \frac{R}{R + i\omega L - 1/(i\omega C)} U_e$$

Betrag:

$$\begin{aligned} |U_a| &= \frac{R}{\sqrt{R^2 + [\omega L - 1/(\omega C)]^2}} |U_e| \\ &= \frac{R}{\sqrt{R^2 + \frac{L/C}{(\omega/\omega_0)^2} [(\omega/\omega_0)^2 - 1]^2}} |U_e| \end{aligned}$$

mit der **Resonanzfrequenz** $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

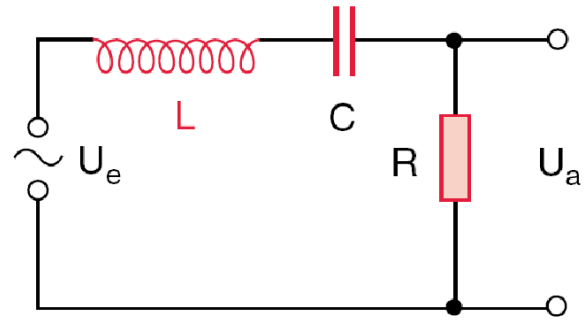


Bild: Demtröder

hier werden nun insbesondere

Frequenzen um die Resonanzfrequenz durchgelassen (schwarze Kurve)

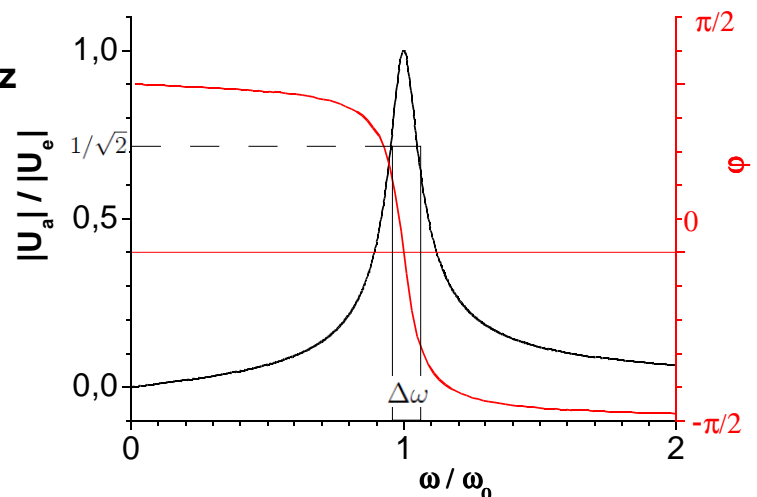
→ Frequenzfilter

Breite des Frequenzfilters (Transmission fällt auf $1/\sqrt{2}$):

$$\Delta\omega = \frac{R}{L} = \omega_0 \frac{R}{\sqrt{L/C}}$$

Phasenverschiebung (rote Kurve):

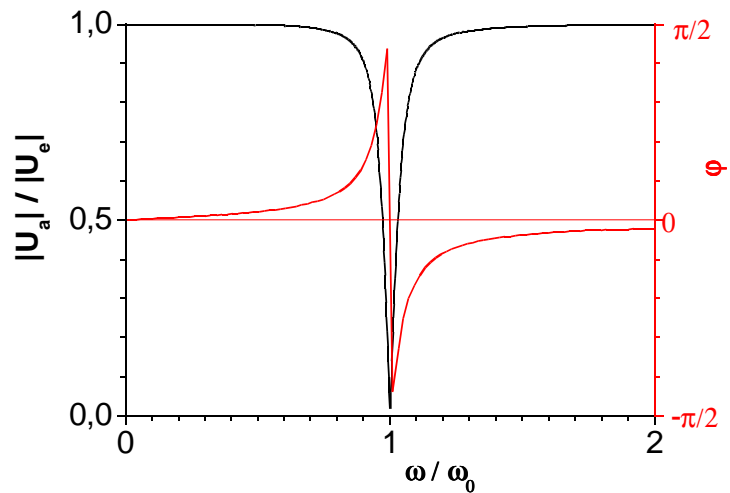
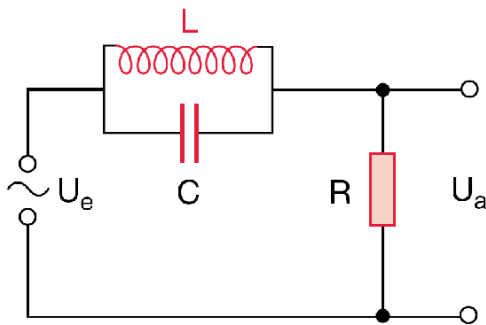
- $\varphi = +\pi/2$ für $\omega \ll \omega_0$
- $\varphi = 0$ bei $\omega = \omega_0$
- $\varphi = -\pi/2$ für $\omega \gg \omega_0$



$$\begin{aligned} \tan \phi &= \frac{1/(\omega C) - \omega L}{R} \\ &= \frac{\sqrt{L/C}}{R} \frac{1 - \omega^2/\omega_0^2}{\omega/\omega_0} \end{aligned}$$

Analog kann man auch einen **inversen Frequenzfilter (Notch-Filter)** bauen:

(Übung: Herleitung der Transmission, der Phasenverschiebung und der spektralen Breite des geblockten Bereichs)



linkes Bild: Demtröder

4.8 Transformatoren

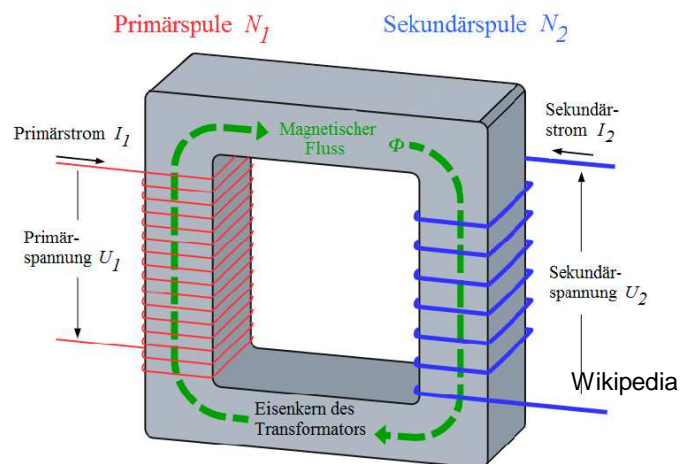
Transformatoren sind elektrische Bauteile, die es erlauben verschiedene Wechselspannungen ineinander **umzuformen**.

Aufbau:

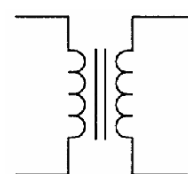
Zwei Spulen mit Windungszahlen N_1 & N_2 und Induktivitäten L_1 & L_2 werden durch ein Eisenjoch miteinander verbunden.

→ **gegenseitige Induktion**.

Wegen des hohen magnet. Permeabilität des Eisen durchläuft fast der gesamte magnet. Fluss durch beide Spulen.



Symbol:



Induzierte Spannungen:

$$U_{1,\text{ind}} = -L_1 \frac{dI_1}{dt} - L_{12} \frac{dI_2}{dt}$$

$$U_{2,\text{ind}} = -L_2 \frac{dI_2}{dt} - L_{21} \frac{dI_1}{dt}$$

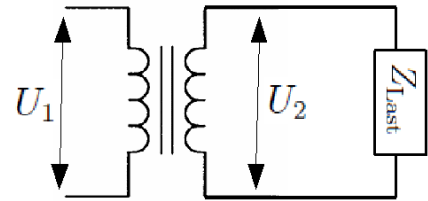
Selbst-induktion
Gegen-induktion

Induktivitäten:

$$L_1 = \mu_0 \mu \frac{N_1^2}{l} A$$

$$L_2 = \mu_0 \mu \frac{N_2^2}{l} A$$

$$L_{12} = L_{21} = \mu_0 \mu \frac{N_1 N_2}{l} A$$



mit **komplexen Amplituden:**

($U(t) = U_0 e^{i\omega t}$)

$$U_1 = i\omega(L_1 I_1 + L_{12} I_2)$$

$$U_2 = -i\omega(L_{12} I_1 + L_2 I_2)$$

$$U_2 = Z_{\text{Last}} I_2$$

Transformator-Gleichungen

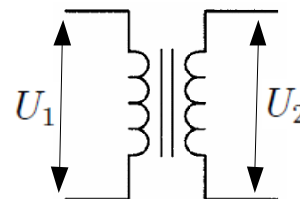
Z_{Last} : Impedanz der Last, die ggf. an der rechten Spule anliegt.

Fall 1: Unbelasteter Transformator

Hier ist $I_2 = 0$ bzw. $Z_{\text{Last}} = \infty$

dann ist:

$$\frac{U_2}{U_1} = -\frac{N_2}{N_1}$$



bzw. mit **umgekehrtem Vorzeichen**,
wenn die **Spulen gegensinnig gewickelt** wurden

Fall 2: Belasteter Transformator

Hier ist $I_2 \neq 0$ bzw. $Z_{\text{Last}} < \infty$

Transformatorgleichungen ergeben:

$$I_1 = \frac{i\omega L_2 + Z}{i\omega L_1 Z + \omega^2(L_{12}^2 - L_1 L_2)} U_1$$

$$I_2 = \frac{i\omega L_{12}}{i\omega L_1 Z + \omega^2(L_{12}^2 - L_1 L_2)} U_1$$

und daraus:

$$\frac{I_2}{I_1} = -\frac{i\omega L_{12}}{i\omega L_2 + Z} \sim -\frac{N_1}{N_2 + \frac{\alpha}{i\omega} Z}$$

und

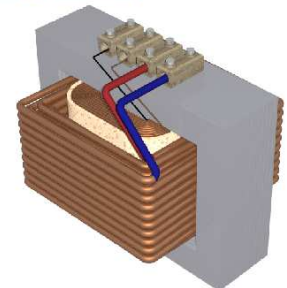
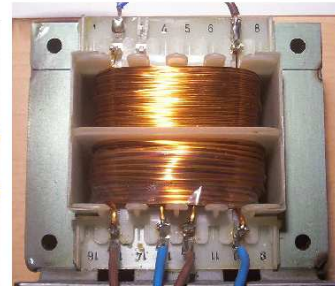
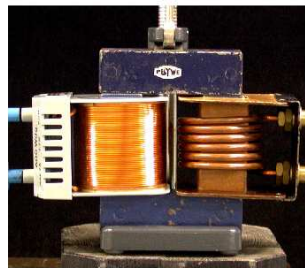
$$\frac{U_2}{U_1} = -\frac{i\omega L_{12} Z}{i\omega L_1 Z + \omega^2(L_{12}^2 - L_1 L_2)} \sim -\frac{N_1}{N_2}$$

für rein Ohmschen Widerstand $Z = R$:

$$\frac{U_2}{U_1} = -\frac{N_2}{N_1}$$

Aufbau von Transformatoren:

- verschiedene Designs möglich
- um Wirbelströme zu vermeiden (Aufwärmen, Brummen) kann das Eisenjoch in voneinander isolierte Scheiben aufgeteilt werden



Reale Transformatoren:

- Wicklungen haben Eigenwiderstand und Kapazität
- Wirbelstromverluste und Sättigung des Kerns
- Kopplungsgrad $0 < k < 1$

$$k = \frac{L_{12}}{\sqrt{L_1 L_2}}$$

Anwendungen:

- Erhöhung und Verringerung von Wechselspannungen
- Stromversorgung:
Stromtransport → hohe Spannung/niedriger Strom
Verbraucher → niedrige Spannung/hoher Strom
- Erzeugung hoher Ströme
(z.B. Erhitzen/Schmelzen/Schweißen von Metallen)
- Signalübertragung & -verstärkung