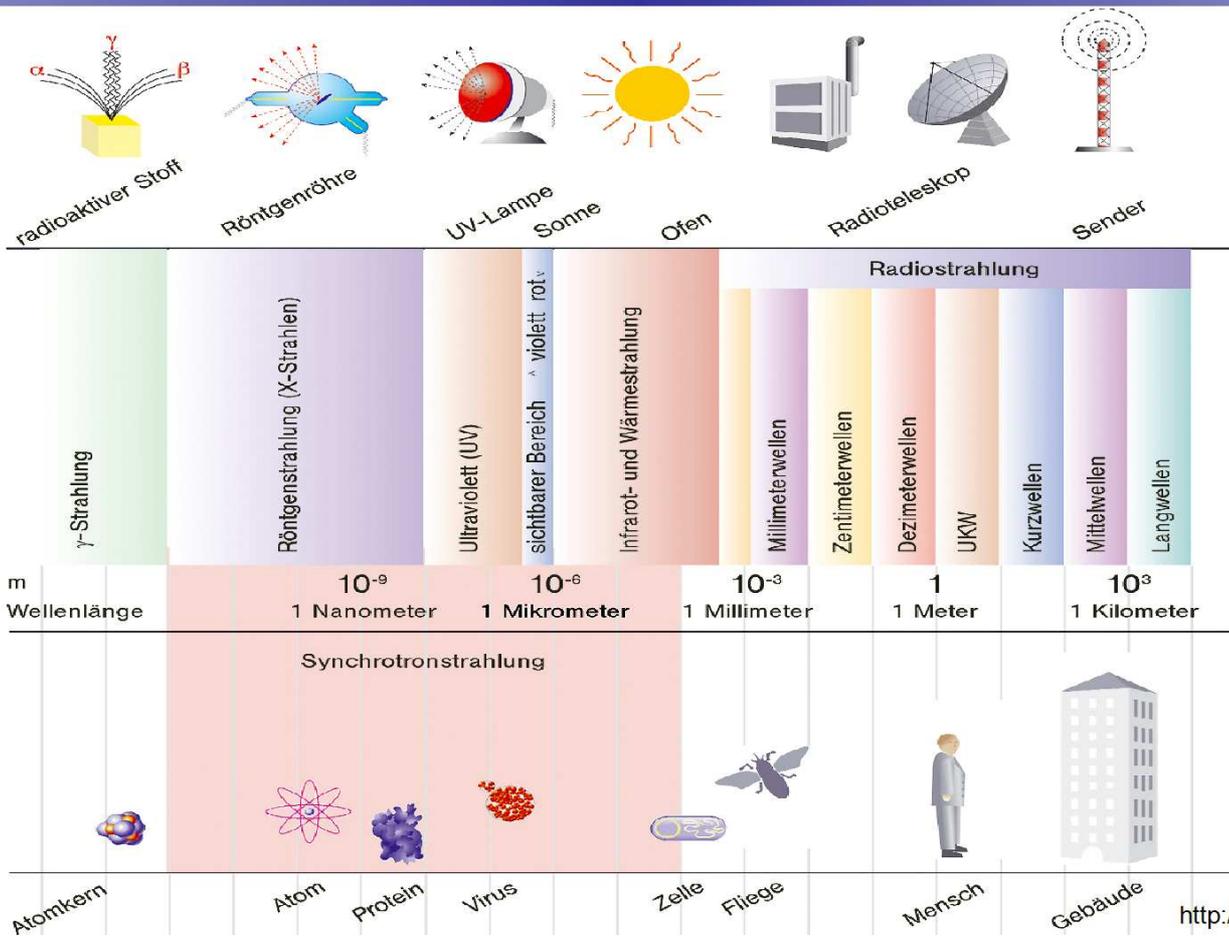


# 5. Elektromagnetische Schwingungen & Wellen



## 5.1 Elektromagnetischer Schwingkreis

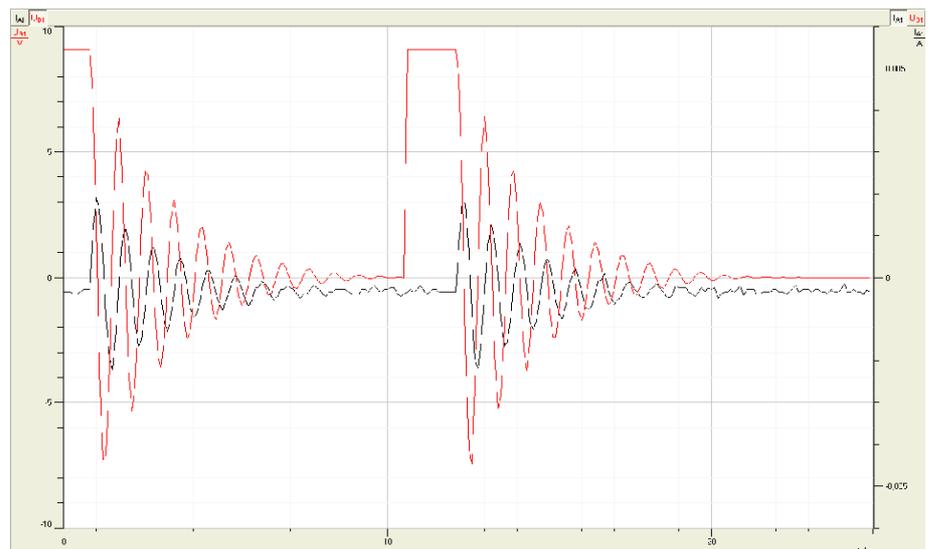
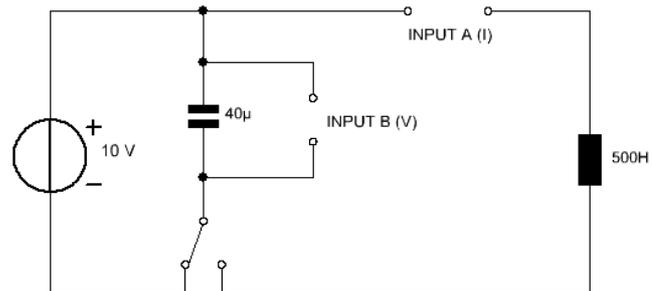


### Versuch Elektromagnetische Schwingung:

Schaltung aus Kapazität, Induktivität und Strom-/Spannungsmesser

Beobachtung:

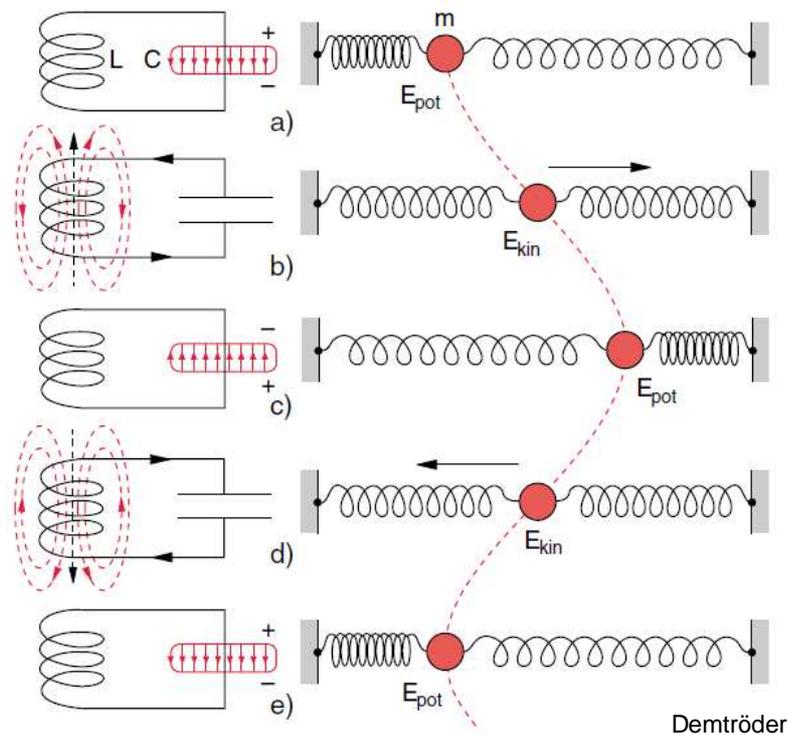
Oszillierende, abklingende Kurvenverläufe



Anschauliche Erklärung:

- (a) Elektrische Energie ist im Kondensator gespeichert.
- (b) Kond. entlädt sich → Stromfluss
- (c) B-Feld in Spule baut sich auf → magnetische Energie
- (d) Induktionsspannung → Kondensator lädt sich wieder auf (entgegenges. Vorzeichen)
- etc

Vergleich: Federpendel,  
Oszillation zwischen  
kinetischer ↔ potentieller Energie



Demtröder

Betrachten Serienschaltkreis (rechts):

Umlegen des Schalters → Anfangsbeding.:  
 $U(0) = U_0, I(0) = 0$

für  $t > 0$ : 
$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = 0$$

(aus Maschenregel & Zeitableitung)

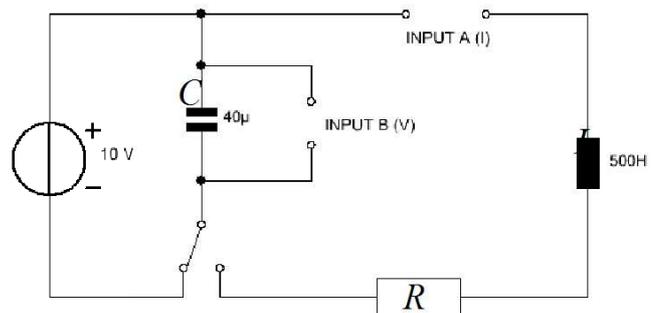
**Lösungsansatz der Differentialgleichung:**  $I(t) = Ae^{\lambda t}$

Einsetzen liefert: 
$$\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0$$

ergibt: 
$$\lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

→ **allgemeine Lösung:**  $I(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$

( $A_1$  und  $A_2$  sind Integrationskonstanten, die man aus den Anfangsbedingungen, z.B.  $I(0)$  und  $U(0)$  erhält)



**Randbedingungen:**  $U(0) = U_0$  und  $I(0) = 0$

geben:

$$I(0) = A_1 + A_2 = 0 \quad \rightarrow \quad A_1 = -A_2$$

$$\begin{aligned} \text{und} \quad U(0) &= -RI(0) - L\dot{I}(0) = -L\dot{I}(0) = -\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 \\ &= -A_1(\lambda_1 - \lambda_2) = -2A_1 \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} = U_0 \end{aligned}$$

$$\text{daraus erhält man} \quad A_1 = -A_2 = -\frac{U_0}{\sqrt{R^2 - 4L/C}}$$

### (a) Kriechfall (starke Dämpfung)

für  $R^2 > 4\frac{L}{C}$  sind die Eigenwerte  $\lambda_{1,2}$  reell und negativ.

Die Anfangsbedingungen (Spannung am Kondensator  $U_0$  bei  $t = 0$ ) geben:

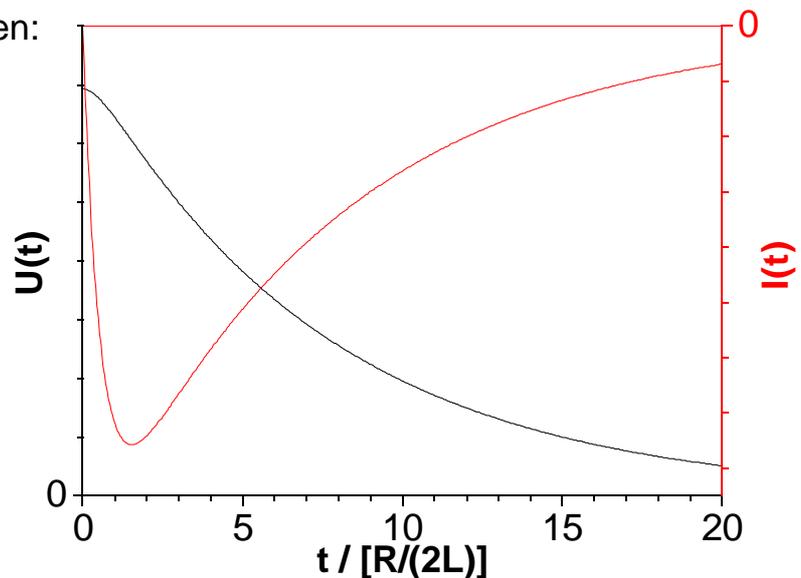
$$I(0) = A_1 + A_2 = 0$$

$$U(0) = -RI(0) - L\dot{I}(0) = -L(A_1\lambda_1 + A_2\lambda_2) = U_0$$

und daraus die Integrationskonstanten:

$$A_1 = -A_2 = -\frac{U_0}{\sqrt{R^2 - 4L/C}}$$

Plot rechts zeigt, dass der Strom ansteigt (mit negativem Vorzeichen) dann aber Strom & Spannung stark gedämpft werden.



## (b) Gedämpfte Schwingung

für  $R^2 < 4\frac{L}{C}$  wird der Radikant unter der Wurzel negativ

und die **Eigenwerte komplex**:  $\lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm i \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = -\alpha \pm i \omega_0$

mit  $\alpha = \frac{R}{2L}$  und  $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$

Der **komplexe** Strom wird zu:  $I(t) = e^{-\alpha t} (A_1 e^{i\omega_0 t} + A_2 e^{-i\omega_0 t})$

Anfangsbedingungen:  $I(0) = A_1 + A_2 = 0$

und  $U(0) = -RI(0) - LI'(0) = -L(A_1 i\omega_0 - A_2 i\omega_0) = U_0$

ergeben:  $A_1 = -A_2 = i \frac{U_0}{2\omega_0 L}$

Die **physikalischen Größen (Realteil)** sind dann:

$$I_{\text{phys}} = \text{Re } I = -\frac{U_0}{\omega_0 L} e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t$$

$$U_{\text{phys}} = \text{Re } U = U_0 e^{-\alpha t} \cos \omega_0 t$$

→ **gedämpfte Schwingung**

mit **Schwingungsperiode**

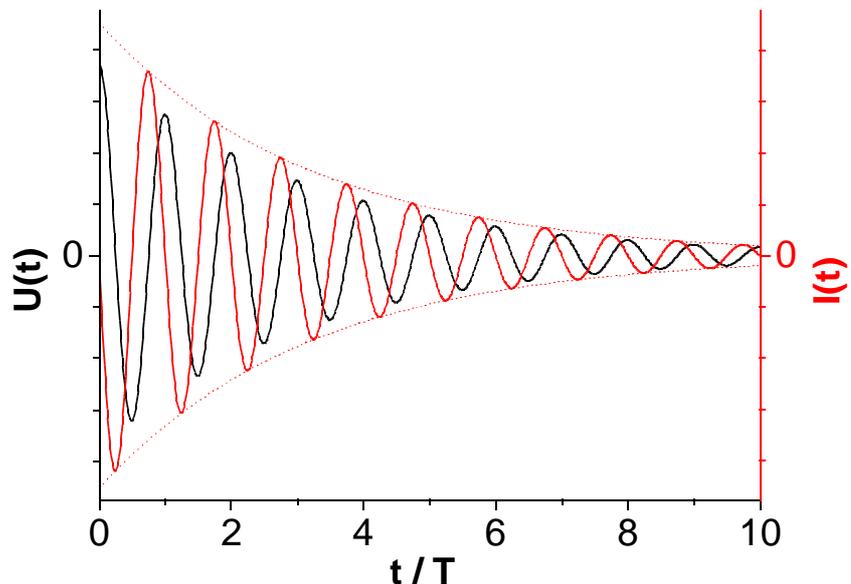
$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

**Einhüllende** (gepunktete Linie):

$$e^{-\alpha t}$$

mit typ. **Abklingzeit**

$$\alpha = \frac{R}{2L}$$



### (c) Aperiodischer Grenzfall

Dieser liegt vor bei  $R^2 = 4\frac{L}{C}$ , dann gibt es nur einen Eigenwert  $\lambda = -\alpha = -\frac{R}{2L}$

Es werden aber zwei Anfangsbedingungen benötigt.

→ neuer Lösungsansatz  $I(t) = c(t) e^{\lambda t}$

Einsetzen in DGL liefert:  $\frac{d^2 c}{dt^2} = 0$ , also  $c(t) = c_1 + c_2 t$

→ allgemeine Lösung:  $I(t) = (c_1 + c_2 t) e^{\lambda t}$

mit Anfangsbedingungen:

$$I(0) = c_1 = 0$$

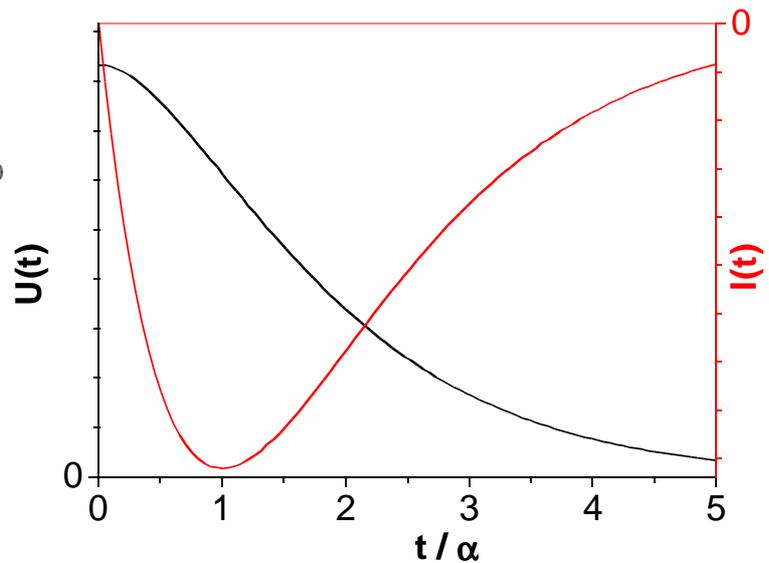
$$U(0) = -RI(0) - L\dot{I}(0) = -Lc_2 = U_0$$

$$c_2 = -U_0/L$$

erhält man:

$$I(t) = -\frac{U_0}{L} t e^{-\alpha t}$$

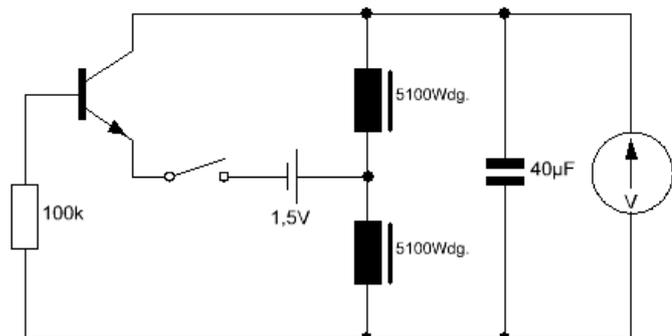
$$U(t) = U_0 \left(1 + \frac{R}{2L} t\right) e^{-\alpha t}$$



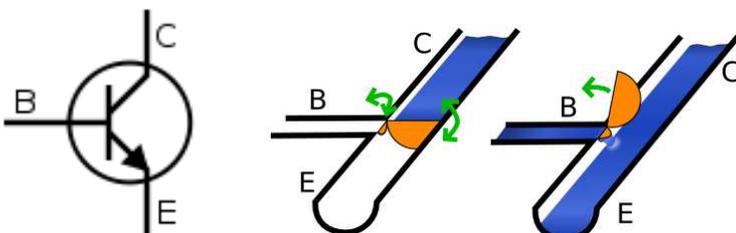
### Versuch: Ungedämpfte Schwingungen

Um dies zu erreichen muss dem System die verlorene Energie periodisch von außen zugeführt werden.

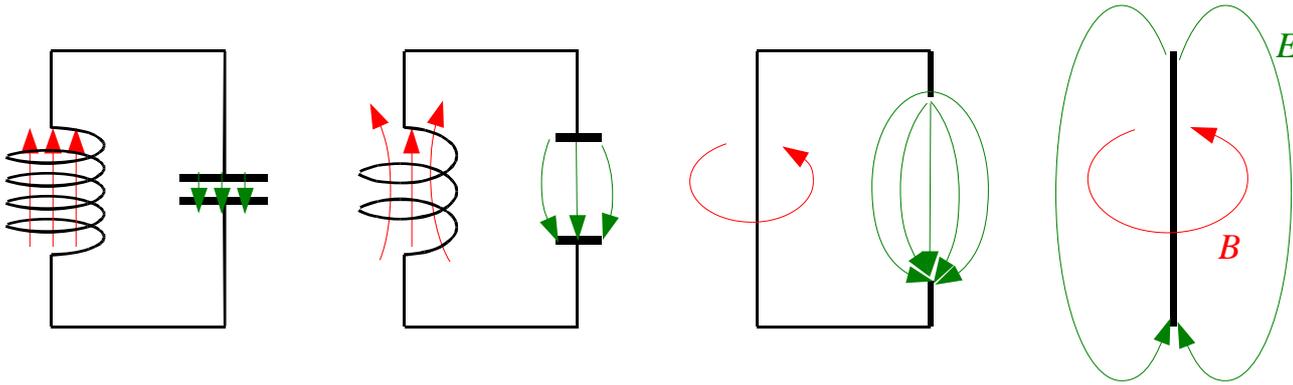
Dies kann wie im Bsp. rechts durch einen Transistor geschehen, dessen angelegte Spannung (B – C) einen Stromfluss in E freischaltet und so den Schwingkreis in Phase aufschaukelt.



Wirkung eines Transistors:



## Übergang vom Schwingkreis zur Antenne:



Auseinanderbiegen des Schwingkreises zu einem geraden Leiter mit oszillierenden Ladungsträgern

$L$  und  $C$  werden immer kleiner

→ die Eigenfrequenz des Schwingkreis  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  wird größer

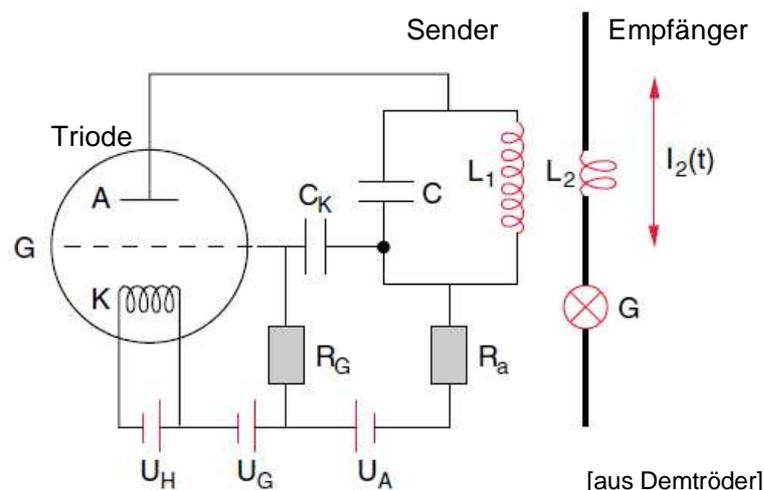
E- und B-Feld dringen immer tiefer in den Außenraum ein, die Streufelder werden schließlich zu Wellen.

## Beispiel einer Realisierung eines Senders elektromagnetischer Wellen

z.B. durch induktive Kopplung mit einem Schwingkreis in Resonanz mit der Antenne.

Wie beim der Erzeugung ungedämpfter Schwingungen, muss auch hier die ausgestrahlte Energie in Phase nachliefert werden.

Stabantenne mit Glühbirne dient als Empfänger.



Anmerkung zur Triode (Elektronenröhre mit Gate/Gitter G):

Spannung zw. Anode und Kathode, bei geheizter Kathode → Stromfluss  
Durch Anlegen einer Spannung an G kann dieser reguliert werden

→ ähnliche Wirkung wie beim Transistor

## Stabantenne:

Fließt in einem Stab der Länge  $l$  ein Wechselstrom

$$I(z, t) = I_0(z) \sin \omega t$$

mit einer räumlichen Verteilung  $I_0(z)$ ,  
so muss an den Stabenden  
die Randbedingung  $I_0(z = \pm l/2) = 0$  gelten,  
da dort ja keine Ströme mehr abfließen können.

→ stehende Wellen mit Knoten an den Enden

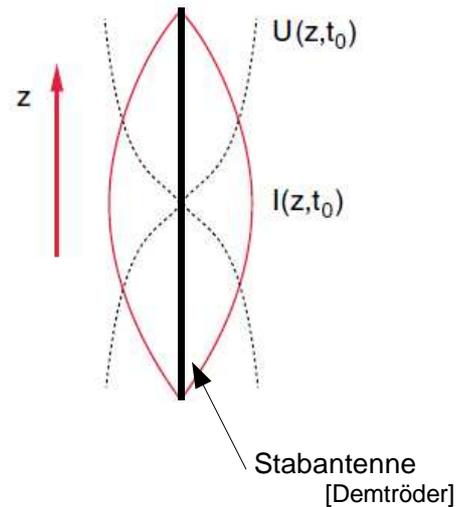
und einer Wellenlänge  $\lambda = \frac{2l}{n}$ ,  $n = 1, 2, 3 \dots$

Die niedrigste Resonanzfrequenz der Antenne ist daher

$$\omega_0 = \frac{2\pi v_{\text{ph}}}{\lambda} = \frac{\pi}{l} v_{\text{ph}}$$

bei einem Stab der Länge  $l = \lambda/2$

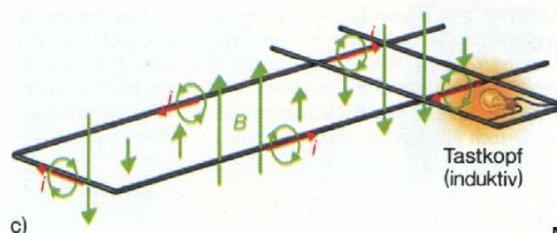
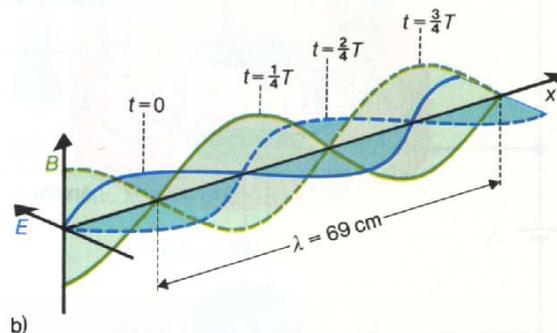
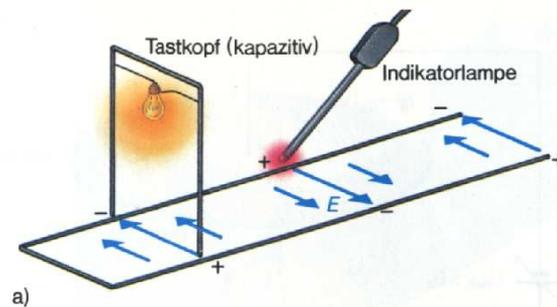
$$v_{\text{ph}} = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon \mu_0 \mu}} \quad \text{ist die Phasengeschwindigkeit im Medium}$$



## Versuch: Lecher-Leitung

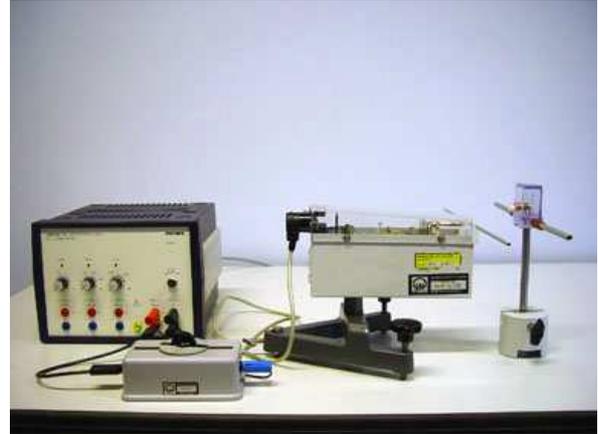
2 parallel geführte Drähte können  
eine elektromagnetische Wellen  
leiten (Wellenlänge  $\sim 70$  cm).

Mit einem Tastkopf können die  
Spannungsbüuche abgetastet  
werden.



## Versuch: Hertzscher Dipol

Eine Antenne ( $\lambda/2$ ) Sendedipol an einen Dezimeterwellengenerator induktiv angekoppelt. Mit der Empfangs-Antenne kann nach Einschalten des Senders das Nahfeld nachgewiesen werden, die angeschl. Lampe beginnt schwach zu leuchten. Das schwache Aufleuchten der Lampe kann verstärkt werden, wenn in geeignetem Abstand hinter den Antennen ein zusätzlicher Antennenstab als Reflektor gehalten wird.



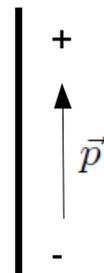
Für den Nachweis der Wellenausbreitung im Wasser (aber geringere Wellenlänge) ersetzt man den  $\lambda/2$ -Empfangs-Dipol durch den leeren Wassertank mit den 2 Dipolen. Der lange Dipol entspricht wieder  $\lambda/2$  in Luft, der kurze (ca. 6 cm)  $\lambda/2$  der gleichen Frequenz im Wasser. Schaltet man den Sender ein, leuchtet zuerst die Lampe am langen Dipol. Wird der Tank langsam mit destilliertem Wasser gefüllt, so erlischt die Lampe am langen Dipol, die am Kurzen leuchtet auf.

## Modellierung der Stabantenne als oszillierender Dipol

Ladungen oszillieren in der Stabantenne und bilden eine

**zeitlich veränderliches Dipolmoment:**  $\vec{p} = Q \vec{x} = \vec{p}_0 \cos \omega t$

außerdem **oszillierende Stromdichte:**  $\vec{j} = \frac{Q}{V} \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{1}{V} \frac{d\vec{p}}{dt}$



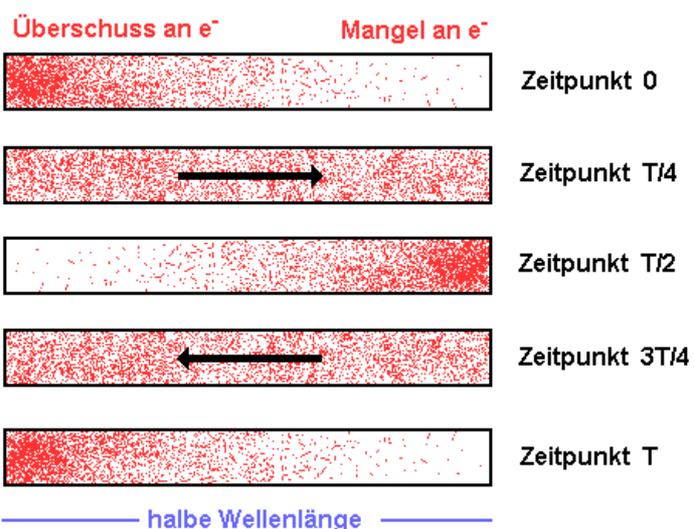
→ Erzeugung von zeitabhängigen B- und E-Feldern

gemäß den Maxwell-Gleichungen

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

und

$$\text{div } \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon} \rho$$



### (a) Nahfeld (Ort $r \ll \text{Wellenlänge } \lambda$ )

Hier werden die von  $\rho$  und  $\vec{j}$  erzeugten Felder praktisch instantan aufgebaut.

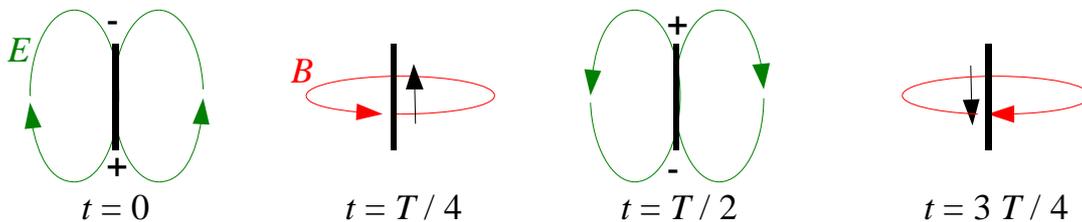
→ Dipolfeld aus der Elektrostatik:  $\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}_0 - 3(\vec{e}_r \cdot \vec{p}_0)\vec{e}_r}{r^3} \cos \omega t$   
(wobei  $\vec{e}_r = \vec{r}/r$ )

Mit Biot-Savart-Gesetz der Magnetostatik (für Dipollänge  $l \ll \lambda$ ):

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{l \vec{e}_x \times \vec{r}}{r^3} \quad \text{und wegen} \quad I l = j V = \frac{dp}{dt}$$

→ zeitl. veränderl. B-Feld:  $\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{p}/dt \times \vec{e}_r}{r}$

→ E und B sind  $\sim \vec{p}$  und  $d\vec{p}/dt$  und damit gegeneinander um  $\pi/2$  phasenverschoben:



### (a) Fernfeld / Wellenzone ( $r \gg \lambda$ )

Biot-Savart-Gesetz (hier für das Vektorpotential):

$$\vec{A}(\vec{r}_1, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}_2, t - r_{12}/c)}{r_{12}} dV_2$$

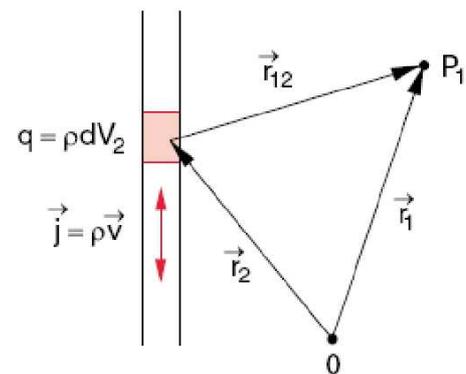
der Ausdruck  $t - r_{12}/c$  berücksichtigt, dass eine zeitl. Änderung in der Stromdichte am Ort  $r_1$  sich erst nach einer Zeit  $r_{12}/c$  am Ort bemerkbar macht (Ausbreitung mit Lichtgeschwindigkeit).

Bei großen Entfernungen ist  $r_{12} \approx r$

außerdem: Geschwindigkeit mit der die Ladungen schwingen  $v \ll c$

→ Wellen, die von Ladungen/Ströme an verschiedenen Orten entlang des Stabs erzeugt wurden kommen praktisch zeitgleich d.h. in Phase an.

$$\vec{A}(\vec{r}_1, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int \vec{v} \rho(\vec{r}_2, t - r/c) dV_2$$



mit Abstand der Ladungsschwerpunkte:  $\vec{d}(t) = d_0 \vec{e}_z \sin \omega_0 t$

kann man den Dipol schreiben als  $\vec{p}(t) = q \vec{d}(t) = q d_0 \sin \omega t = \vec{p}_0 \sin \omega t$

und wegen  $d\vec{p}/dt = q \vec{v}$  und  $dq = \rho dV$  ist  $d(d\vec{p}/dt) = \rho \vec{v} dV$

$$\begin{aligned} \text{damit wird das Vektorpotential zu } \vec{A}(\vec{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi r} \frac{d\vec{p}(t - r/c)}{dt} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} p_0 \frac{\cos(\omega t - kr)}{r} \vec{e}_z \end{aligned}$$

Das ist Feld einer **Kugelwelle**, welche sich vom Mittelpunkt des Dipols mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet.

$k = \omega/c = 2\pi/\lambda$  ist die **Wellenzahl** (Einheit  $[k] = 1/m$ )

bzw. als Vektor der in Ausbreitungsrichtung zeigt: **Wellenvektor**  $\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{e}_r$

### Berechnung der E- und B-Felder dieser Kugelwelle:

$$(1.) \text{ Magnetfeld: } \vec{B} = \text{rot } \vec{A} = \text{rot } (0, 0, A_z) = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y}, -\frac{\partial A_z}{\partial x}, 0 \right)$$

betrachten zunächst  $x$ -Komponente:

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\dot{p}(t - r/c)}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \dot{p}(t - r/c) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial y} \dot{p}(t - r/c) \right]$$

$$\text{es gilt: } \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{y}{r^3}$$

ersetze außerdem  $\tau = t - r/c$ ,

$$\text{dann ist } \dot{p} = \frac{dp}{dt} = \frac{dp}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{dp}{d\tau} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \dot{p}}{\partial y} = \frac{\partial \dot{p}}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} = -\ddot{p} \frac{1}{c} \frac{y}{r}$$

$$\text{damit erhält man } \frac{\partial A_z}{\partial y} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \dot{p} \frac{y}{r^3} + \ddot{p} \frac{y}{cr^2} \right) \quad \text{und analog: } \frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \dot{p} \frac{x}{r^3} + \ddot{p} \frac{x}{cr^2} \right)$$

Ausnutzen von  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$  und  $\vec{p} = p\vec{e}_z$

liefert schließlich das B-Feld: 
$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\dot{\vec{p}} \times \vec{r} + (r/c)\ddot{\vec{p}} \times \vec{r}}{r^3}$$

wobei nach wie vor  $\vec{p} = \vec{p}(t - r/c)$  gilt  
(zeitl. Verzögerung aufgrund Ausbreitung mit Lichtgeschwindigkeit).

(2.) E-Feld: 
$$\vec{E} = -\text{grad } \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

hierfür benötigen wir also noch das elektrische Potential  $\phi$ , welches wir unter Verwendung der Lorentz-Eichung  $\text{div } \vec{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t}$  bekommen.

Zunächst: 
$$\text{div } \vec{A} = \frac{\partial A_z}{\partial z} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{r} \cdot (\dot{\vec{p}} + (r/c)\ddot{\vec{p}})}{r^3}, \text{ wobei: } \vec{p} = \vec{p}(t - r/c)$$

Zeitintegration liefert dann: 
$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} \cdot (\vec{p} + (r/c)\dot{\vec{p}})}{r^3}$$

damit kann man  $\vec{E} = -\text{grad } \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$  bestimmen:

(Erinnerung:  $\vec{p} = \vec{p}(t - r/c)$  und  $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = -\dot{p} \frac{1}{c} \frac{x}{r}$ )

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\vec{p}^* + 3(\vec{p}^* \cdot \vec{e}_r)\vec{e}_r}{r^3} + \frac{1}{c^2} \frac{(\ddot{\vec{p}} \times \vec{r}) \times \vec{r}}{r^3} \right]$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left[ \dot{\vec{p}} \times \vec{r} + \frac{(r/c)\ddot{\vec{p}} \times \vec{r}}{r^3} \right]$$

Interpretation:

der **erste Term** ist das statische E-Feld eines bzgl. der

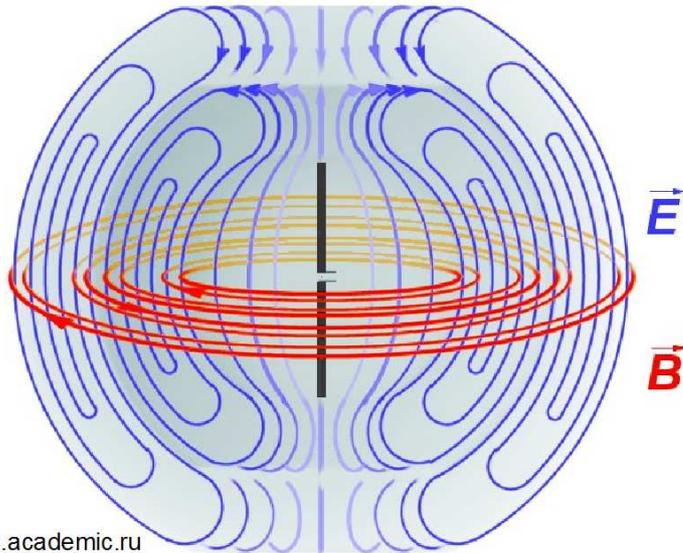
Zeitverzögerung  $\tau = t - r/c$  **korrigierten Dipols**  $\vec{p}^* = \vec{p}(t - r/c) + \frac{r}{c}\dot{\vec{p}}(t - r/c)$

dieser Term dominiert bei kleinen Abständen (**Nahfeld**)

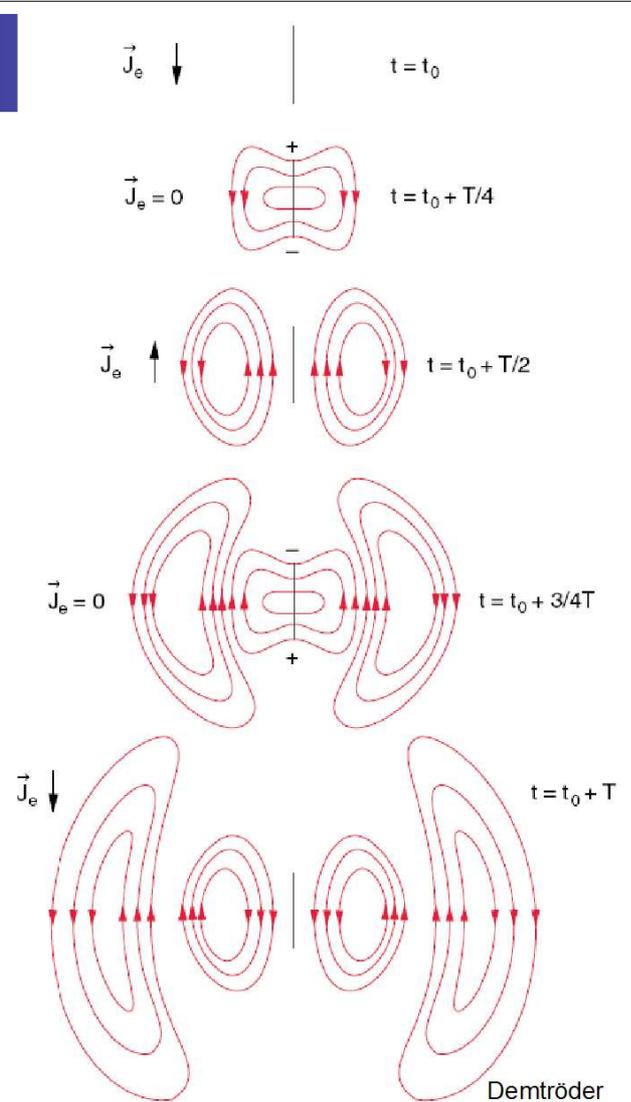
Bei großen Abständen dominiert der **zweite Term (Fernfeld)**. Hier ist das E-Feld proportional zur Beschleunigung der Ladungen und steht **senkrecht** zu  $\vec{r}$ .

Hier schwingen außerdem E und B **in Phase**

## Feldverteilung des Hertzschen Dipols:



de.academic.ru



Demtröder



## Abgestrahlte Leistung des Hertzschen Dipols

Im Fernfeld dominieren jeweils die zweiten Terme:

$$|\vec{E}_{\text{ff}}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\ddot{p}}{c^2} \sin\theta \quad \text{und} \quad |\vec{B}_{\text{ff}}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\ddot{p}}{c^3} \sin\theta$$

Für die **Energiedichte des el.mag. Felds** gilt also

$$w_{\text{em}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 (E^2 + c^2 B^2) = \epsilon_0 E^2$$

Diese gibt die Energie am Ort  $\vec{r}$  und zur Zeit  $t$  an.

Die **Energiestromdichte** ist der Energiefluss durch eine Einheitsfläche pro Zeiteinheit:

$$S = \frac{dW}{dt dA} = \frac{dW (dx/dt)}{dx dA} = c \frac{dW}{dV} = c w_{\text{em}}$$

Für den Hertzschen Dipol bedeutet dies:

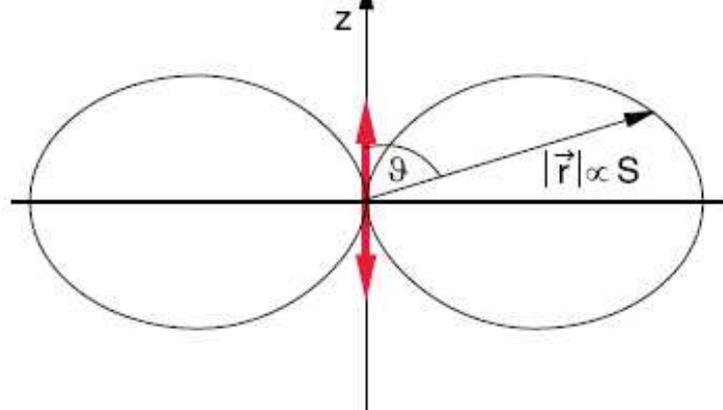
$$S = \epsilon_0 c E^2 = \frac{p_0^2 \omega^4}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \sin(\omega t - kr) \frac{\sin^2 \theta}{r^2}$$

Man sieht:

- Der Dipol strahlt bevorzugt **senkrecht zur Dipolachse** ab, in Richtung der **Dipolachse** wird **keine Energie** abgestrahlt
- Der **Energiestrom** durch eine **Kugeloberfläche** ( $A \sim r^2$ ) ist **konstant**, da auch  $S \sim 1/r^2$ .

Abstrahlcharakteristik:

[aus Demtröder]



- Die Leistung, die durch eine umschlossene Fläche strömt:

$$P = \oint \vec{S} d\vec{A} = \frac{p_0^2 \omega^4}{6\pi \epsilon_0 c^3} \sin^2(\omega t - kr)$$

und die **zeitlich gemittelte Leistung** ist:  $\bar{P} = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi \epsilon_0 c^3}$

## 5.3 Strahlung beschleunigter Ladungen

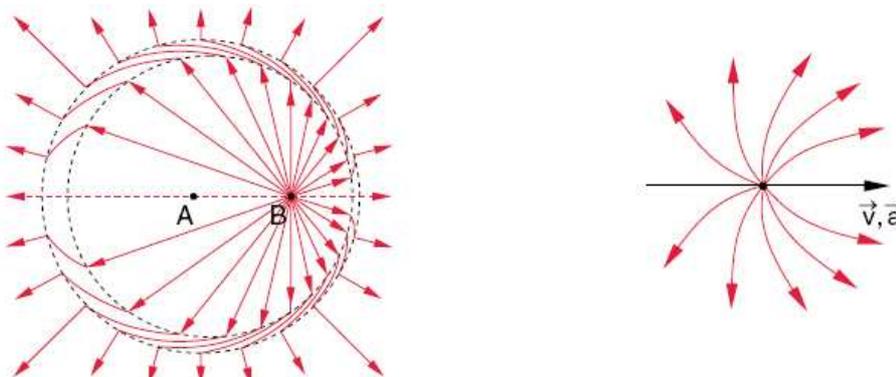
Hertzscher Dipol: abgestrahlte E- und B-Felder im Fernfeld proportional zu  $\ddot{\vec{p}}$ , und damit zur **Beschleunigung** der Ladungen.

**Verallgemeinerung auf beliebig beschleunigte Ladungen:**

E-Feld (Coulomb-Feld) einer ruhenden bzw. bewegten ( $v \sim c$ ) Ladung:

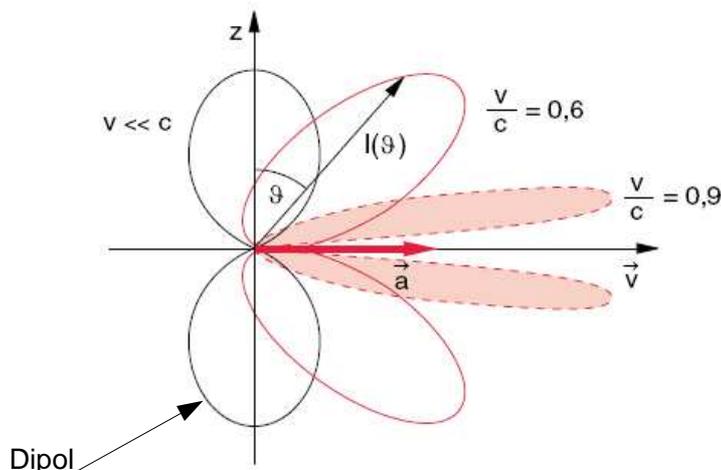


abrupte bzw. kontinuierliche Änderung der Geschwindigkeit (hohe Beschleunigung) gäbe folgende Feldlinienbilder:



Auch das B-Feld verändert sich, da mit der Geschwindigkeit auch die Stromstärke  $\vec{j} = q \vec{v}$  sich ändert.

→ Abstrahlcharakteristik einer in Bewegungsrichtung beschleunigten Ladung:

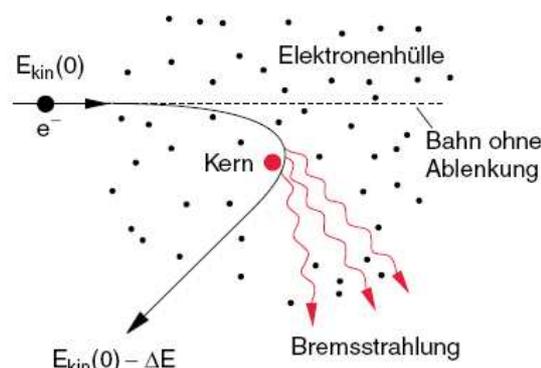
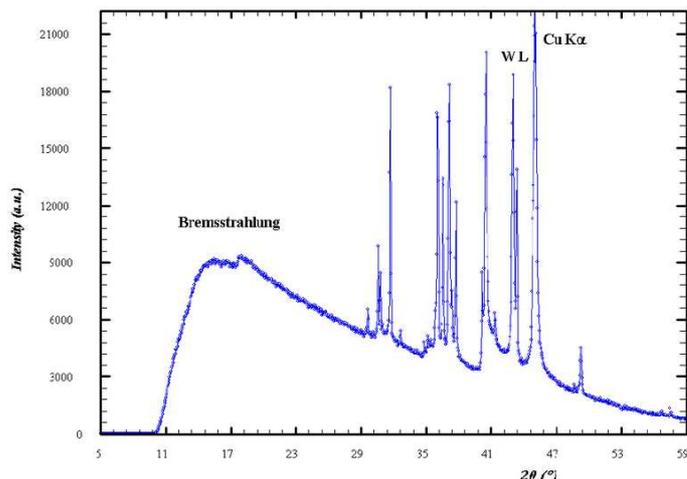
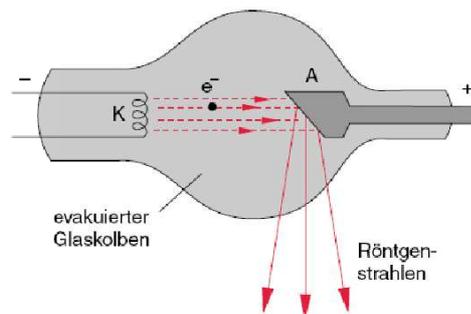


Analog strahlen auch Ladungen deren Bewegungsrichtung sich ändert.

Beispiele:

**(a) Röntgenbremsstrahlung**

Elektronen werden in der Anode abgebremst  
 → Erzeugung von **Röntgenstrahlung**  
 (Energie typ. 10 – 100 keV)



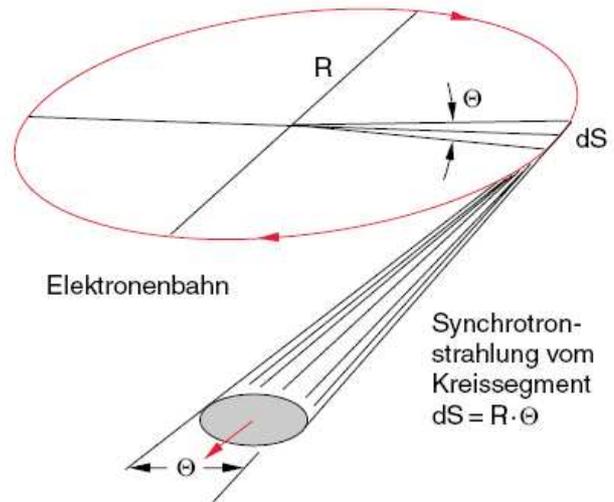
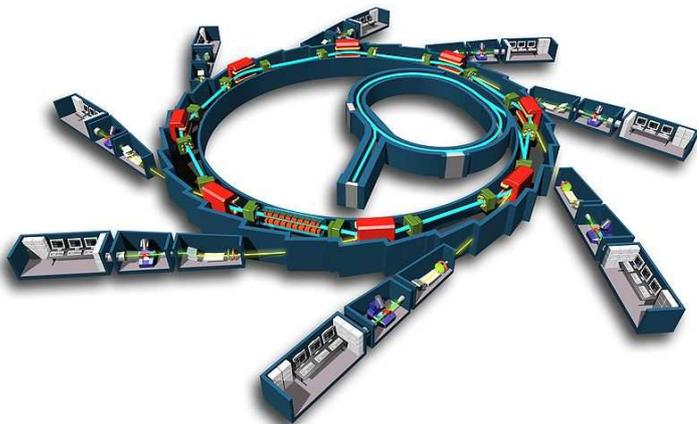
Bsp: Röntgenstrahlung an einer Cu-Anode  
 [aus Wikipedia]

## (b) Synchrotronstrahlung

Elektronen werden im Magnetfeld mit konst. Geschwindigkeit auf einer Kreisbahn bewegt (Synchrotron, z.B. BESSY (HZB) Berlin)

Ständige Richtungsänderung

→ tangentielle Abstrahlung hochenergetischer Strahlung.



## 5.4 Elektromagnetische Wellen

Die Strahlung eines schwingenden Dipols ist nur ein Spezialfall elektromagnetischer Wellen.

Diese lassen sich als Lösungen der Maxwell-Gleichungen verstehen.

In Abwesenheit von Ladungen & Strömen ( $\rho = \vec{j} = 0$ ) gilt:

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \quad (1) \quad \text{und} \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (3) \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4)$$

Rotationsableitung (rot) zu beiden Seiten von (2) und Einsetzen in (4) liefert:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) = -\operatorname{rot} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \vec{B}) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

nun gilt außerdem:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) = \operatorname{grad}(\underbrace{\operatorname{div} \vec{E}}_{=0 \text{ wegen (1)}}) - \underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})}_{\equiv \Delta} \vec{E} = -\Delta \vec{E}$$

Dies zusammen (analog auch für B) ergibt die

**Wellengleichung:**

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \text{und} \quad \Delta \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

mit dem **Laplace-Operator**:  $\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

Hier erkennt man bereits, dass die Wellenausbreitung fundamental mit der **Lichtgeschwindigkeit**  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$  erfolgt.

Es ist:

$$c \equiv 299\,792\,458 \text{ m/s} \quad (\approx 3 \times 10^8 \text{ m/s})$$

Die Festlegung der Lichtgeschwindigkeit gilt exakt.  
Die Größen  $\epsilon_0$  und  $\mu_0$  werden daraus abgeleitet.

## Lösungen der Wellengleichung: ebene Wellen

**Ebene Wellen** haben die Form:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i\phi} e^{+i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

mit Amplitude  $\vec{E}_0$

es gilt  $\frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} = -\omega^2 \vec{E}$  und  $\Delta \vec{E} = -|\vec{k}|^2 \vec{E}$

einsetzen in Wellengleichung ergibt:

**Dispersionsrelation in Vakuum:**

$$\omega = c|\vec{k}|$$

$\vec{k}$  ist der **Wellenvektor** (auch „k-Vektor“).  
Er zeigt in Ausbreitungsrichtung der ebenen Welle

Zusammenhang mit der **Wellenlänge**:  $|\vec{k}| = 2\pi/\lambda$

**Flächen konstanter Phase** ( $\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} = \text{konst.}$ )

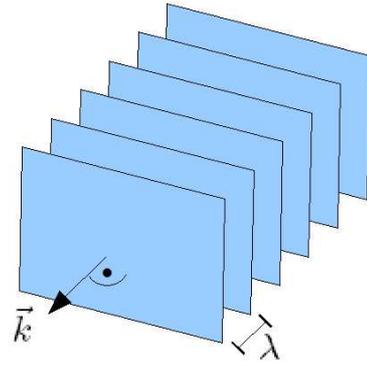
(z.B. Position der Wellenberge)

bilden zu einem gegebenen Zeitpunkt  $t$

**parallele Ebenen** mit Abstand  $\lambda$ .

Mit fortlaufender Zeit wandern diese Ebenen mit **Lichtgeschwindigkeit** in Richtung des Wellenvektors.

Der **Wellenvektor** steht dabei **senkrecht** auf den Ebenen.



Einsetzen der ebenen Welle in Maxwell-Gleichungen  $\text{div } \vec{E} = 0$  &  $\text{div } \vec{B} = 0$

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = i \vec{k} \cdot \vec{E} \equiv 0 \quad \text{und analog: } i \vec{k} \cdot \vec{B} = 0$$

→ der Wellenvektor steht **senkrecht zum E-Feld und zum B-Feld**.  
Man spricht daher von **transversalen Wellen**.

Außerdem aus  $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

folgt  $-i \vec{k} \times \vec{E} = i\omega \vec{B}$

→ k-, B- und E-Vektor stehen sogar **paarweise senkrecht zueinander!**

Die physikalischen Felder ergeben sich wie gewohnt aus dem Realteil und bilden **sinusförmige Wellen**:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\text{phys}} &= \text{Re } \vec{E} = \text{Re} \left( \vec{E}_0 e^{i\phi_0} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \right) \\ &= \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \phi_0) \end{aligned}$$

Die Richtung des E-Vektors definiert die **Polarisationsrichtung** der Welle; der B-Vektor steht dann stets senkrecht dazu

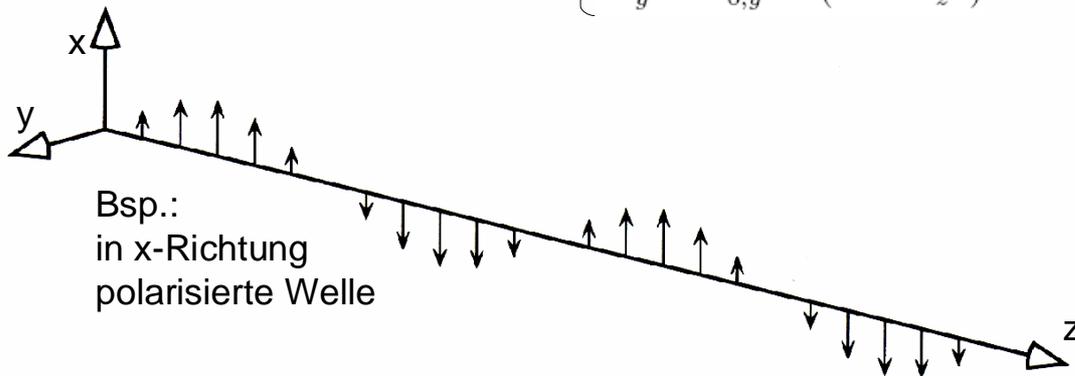
### (a) Linear polarisiert Wellen

Hier zeigt der E-Vektor immer in die selbe Richtung.

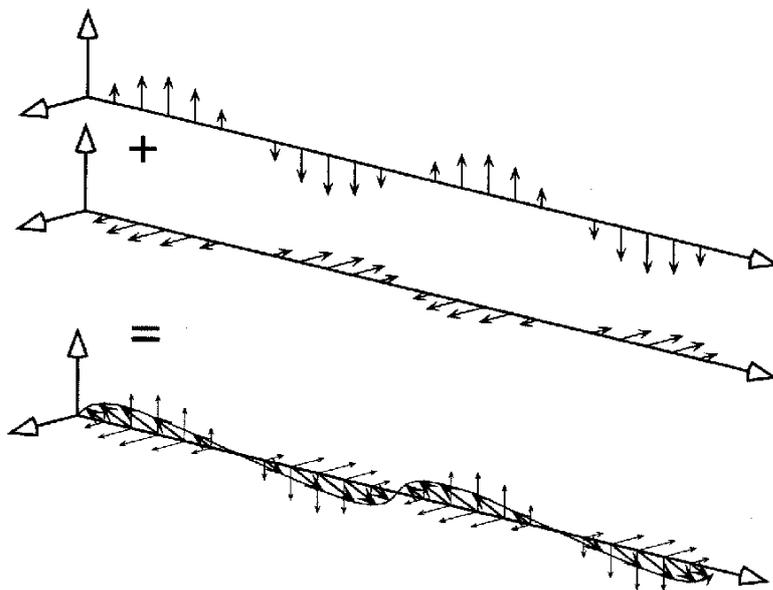
Für eine Welle die in z-Richtung propagiert (d.h.  $\vec{k} = (0, 0, k_z)$ ) ist der E-Vektor wegen  $\vec{k} \perp \vec{E}$  gegeben durch:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - k_z z) \quad \text{mit} \quad \vec{E}_0 = E_{0,x} \vec{e}_x + E_{0,y} \vec{e}_y$$

beide Komponenten schwingen in Phase: 
$$\begin{cases} E_x = E_{0,x} \cos(\omega t - k_z z) \\ E_y = E_{0,y} \cos(\omega t - k_z z) \end{cases}$$



**Beliebige lineare Polarisationen** können durch **Superposition** von x- und y-polarisiertem Licht unterschiedlicher (reeller) Amplitude aufgefasst werden:



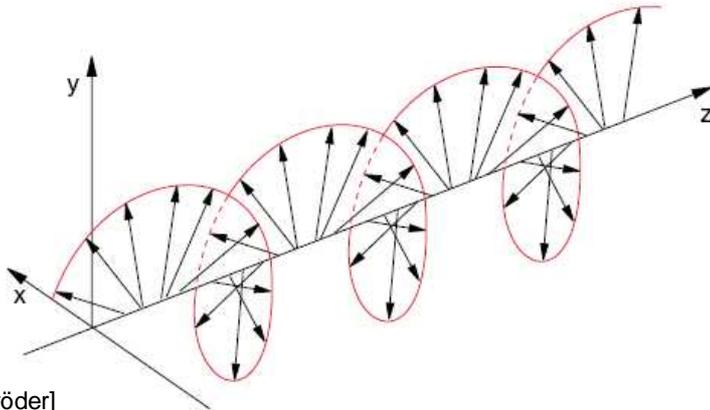
Man spricht oft auch von **horizontaler/vertikaler Polarisation** oder von **s- und p-Polarisation** (senkrecht bzw. parallel zu einer Einfallsebene)

## (b) Zirkulare Polarisation

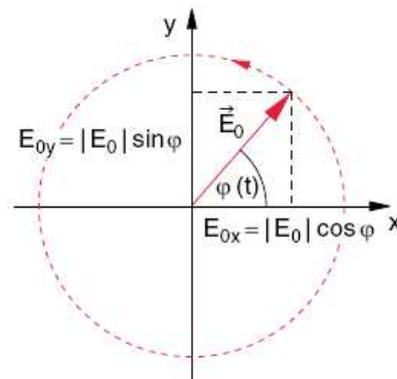
Diese erhält man, wenn zwischen den Komponenten  $E_x$ ,  $E_y$  ein **Phasenunterschied von  $\pi/2$**  vorherrscht:

$$\begin{cases} E_x = E_{0,x} \cos(\omega t - k_z z) \\ E_y = E_{0,y} \cos\left(\omega t - k_z z \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

Dann beschreibt der E-Feld-Vektor zu einem festen Zeitpunkt entlang der z-Achse eine **Spiralbahn** mit Wellenlänge  $\lambda$  bzw an einem festen Punkt zeitlich eine **Kreisbahn** mit Periode  $T = 2\pi / \omega$ .



[Demtröder]



Wählt man eine komplexe Schreibweise, so kann man die Phasenverschiebung auch durch einen komplexen E-Feld-Vektor darstellen:

$$\vec{E}_0 = |E_0| (1, i) \quad \text{bzw.} \quad \vec{E}_0 = |E_0| (i, 1)$$

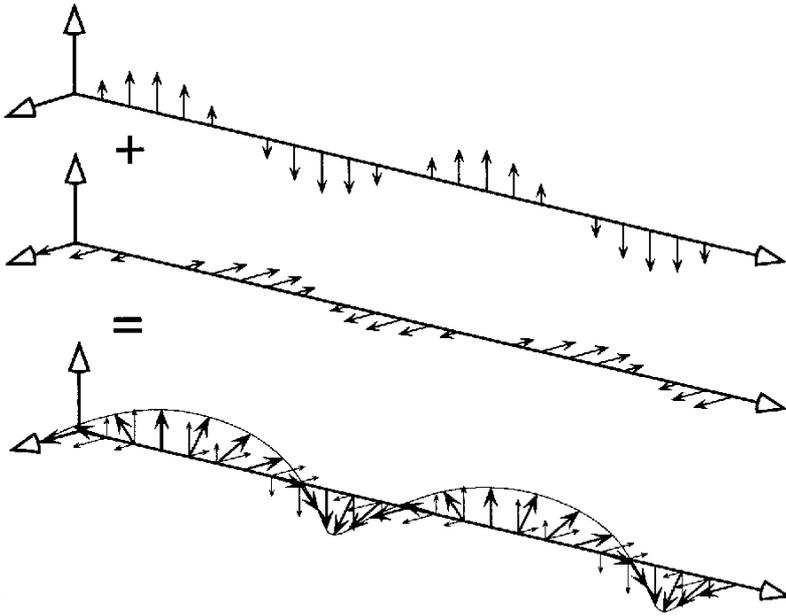
je nach Richtung der Phasenverschiebung (+ oder  $-\pi/2$ ).

Die beiden Fälle unterscheiden sich in der Drehrichtung der Schrauben-/Kreisbahn. Man spricht daher auch von einer

**links-zirkular ( $\sigma^+$ )** und **rechts-zirkular ( $\sigma^-$ ) polarisierter Welle.**

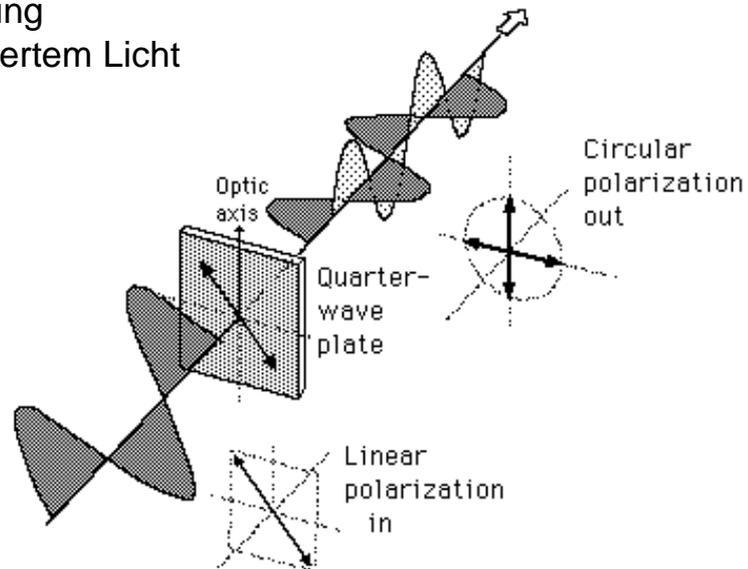
### (c) Elliptische Polarisation

Für alle anderen Phasenverschiebungen  $0 < |\phi| < \pi/2$  durchläuft der E-Vektor eine elliptische Schraubenbahn.



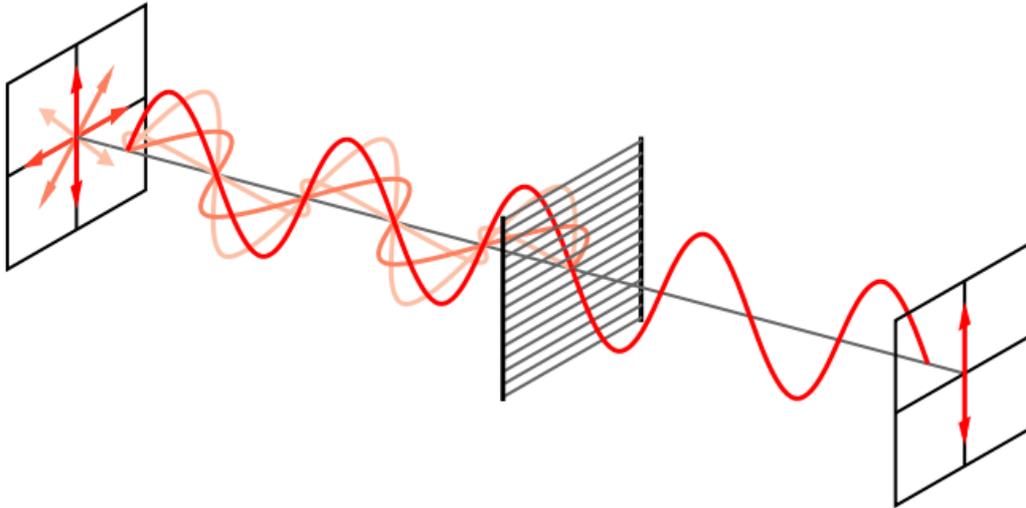
Durch Veränderung der Phasenverschiebung können die Polarisationen ineinander umgewandelt werden.

Beispiel:  $\lambda/4$ -Phasen-Platten erzeugen Phasenverschiebung um  $\pi/2$  zwischen x- und y-Komponente  $\rightarrow$  Umwandlung zwischen linear und zirkular polarisiertem Licht



**Polarisatoren** sind Bauteile, die nur eine lineare Polarisationsrichtung durchlassen  
→ Präparation und Messung der Polarisationsrichtung.

Beispiel: Wire Grid-Polarisatoren bestehen aus einem engen Metallgitter.  
Elektrische Felder die parallel zu den Stäben schwingen, regen die Elektronen im Metall zum Schwingen an und werden daraufhin reflektiert, die senkrecht orientierte Polarisierung wird transmittiert.



## 5.6 Energie & Impuls von Wellen

Energiedichte:  $w_{\text{em}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 (E^2 + c^2 B^2) = \epsilon_0 E^2$

**Intensität** oder **Energiestromdichte** ist die Energie, die **pro Zeit** durch eine **Flächeneinheit** senkrecht zum Ausbreitungsrichtung (k-Vektor) transportiert wird:

$$I = c \epsilon_0 |E|^2$$

wegen  $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$  ist auch  $I(t) = c \epsilon_0 |E_0|^2 \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$  zeit- und ortsabhängig.

Hohe Frequenzen (z.B. sichtbares Licht:  $\nu = \frac{\omega}{2\pi} \approx 500 \times 10^{12} \text{ Hz}$ ) können aber üblicherweise nicht mehr zeitlich aufgelöst werden.

→ tatsächliche Messgröße: **zeitlicher Mittelwert**  $\langle I(t) \rangle = \frac{1}{2} c \epsilon_0 |E_0|^2$

Die Richtung des Energieflusses (Energie, die pro Zeit durch Einheitsfläche strömt) ist gegeben durch den

$$\text{Poynting-Vektor } \vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

im Vakuum ist dieser:  $\vec{S} = \epsilon_0 c^2 (\vec{E} \times \vec{B})$

Da E, B und k paarweise senkrecht stehen ist (wegen Kreuzprodukt)  $\vec{S} \parallel \vec{k}$

Der **Poynting-Vektor** und somit die **Richtung des Energieflusses** zeigt also in **Ausbreitungsrichtung der Welle**.

$$\begin{aligned} \text{Der Betrag des Poynting-Vektors ist } S &= |\vec{S}| = \epsilon_0 c^2 |\vec{E}| |\vec{B}| \\ &= \epsilon_0 c E^2 = I \end{aligned}$$

Seine Einheit:  $[S] = 1 \text{ W} / \text{m}^2 = \text{J} / (\text{s m}^2)$

### Energieerhaltung:

in einem Volumen V des Feldes im Vakuum steckt die elektr.mag. Energie

$$W_{\text{em}} = \int w_{\text{em}} dV$$

Die Energie, die pro Zeiteinheit durch die Oberfläche dieses Volumens fließt, muss gleich sein der zeitlichen Abnahme der Energie im Inneren des Volumens. Mithilfe des Gaußschen Satzes erhält man:

$$-\frac{\partial W_{\text{em}}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V w_{\text{em}} dV = \oint_{A=\partial V} \vec{S} \cdot d\vec{A} = \int_V \text{div } \vec{S} dV$$

Da dies für bel. Volumina gilt, müssen die Integranden gleich sein:

$$-\frac{\partial w_{\text{em}}}{\partial t} = \text{div } \vec{S}$$

Dies ist ein Spezialfall des **Poyntingschen Satzes** und drückt die **Energieerhaltung** im elektromagnetischen Feld aus.

## Impuls des elektromagnetischen Felds

Man kann einer ebenen Welle auch eine **Impulsdichte** zuordnen:

$$\vec{\pi}_{\text{st}} = \frac{d\vec{p}}{dV} = \frac{1}{c^2} \vec{S} = \epsilon_0 (\vec{E} \times \vec{B}) = \frac{w_{\text{em}}}{c} \vec{e}_{\vec{S}}$$

sie zeigt in **Richtung des Poynting-Vektors** bzw. in Ausbreitungsrichtung.

(die kann man auch so sehen: Energie und Impuls eines „Teilchens“, das sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegt, sind  $E = m c^2$  und  $p = m c$ . Man kann daher dem Feld eine „Massendichte“ zuordnen:  $\rho = dm/dV = (dE/dV)/c^2 = w/c^2$   
Damit ist der Betrag der Impulsdichte  $\pi_{\text{st}} = dp/dV = \rho c = w/c$

Dass das elektromagnetische Feld tatsächlich aus Teilchen (Photonen) besteht, ist aber erst im Rahmen der Quantenmechanik ersichtlich.)



## Strahlungsdruck

Wird eine elektromagnetische Welle vollständig von einem Körper absorbiert, so überträgt sie auch ihren Impuls.

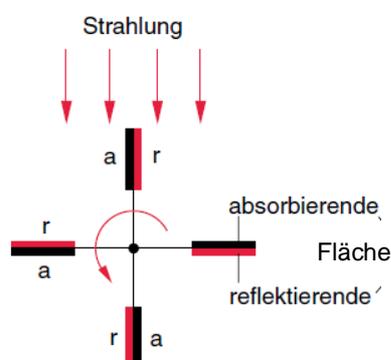
Analog: Bei einer Reflexion wird der doppelte Impuls übertragen.

ausgeübter Strahlungsdruck = Kraft / Fläche = Impuls / Zeiteinh. / Fläche

$$p_{\text{st}} = \frac{\pi_{\text{st}}}{dt dV} = \frac{\pi_{\text{st}} ds}{dt} = c \pi_{\text{st}} = w_{\text{em}} = \frac{I}{c}$$

Beispiel: Lichtstrahl mit 10 W Leistung auf Fläche  $A=1 \text{ mm}^2$  übt eine Kraft von  $3,3 \cdot 10^{-8} \text{ N}$  auf die Fläche aus.

Beispiel: Lichtmühle  
im Vakuum!



Strahlungsdruck der Sonne:

Strahlungsintensität der Sonne am Ort der Erde:

$$I = 1,4 \text{ kW/m}^2$$

→ Strahlungsdruck von  $4,6 \mu\text{Pa}$

Strahlungsdruck und Sonnenwind bilden gemeinsam die Ursache für Kometenschweife

Der Strahlungsdruck ist auch für das Gleichgewicht von Sternen gegen einen Gravitationskollaps verantwortlich.



## 5.7 Wellenpakete

Die Maxwell-Gleichungen sind linear bzgl. E und B.

→ eine **Überlagerung (Linearkombination) ebener Wellen**

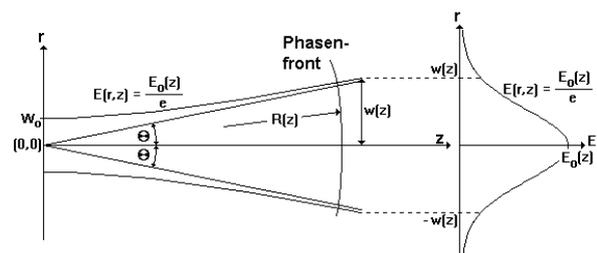
$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} \vec{E}_{\vec{k}} e^{i(\omega_{\vec{k}} t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

ist **ebenfalls eine Lösung der Wellengleichung** sofern  $\omega_{\vec{k}} = c|\vec{k}|$  gilt.

Da dies die Form einer Fourier-Reihe ist, lassen sich durch geeignete Wahl der komplexen Komponenten  $\vec{E}_{\vec{k}}$  beliebige Wellenpakete bilden.

**Beispiele solcher Wellenpakete:**

- Strahlungsfeld des Hertzschen Dipols
- Kugelwellen  $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \frac{\cos(\omega t - kr)}{r}$
- Gaußsche Strahlen (z.B Laserstrahlen) = gerichtete, fokussierte Strahlen mit Gaußschem Strahlprofil
- Lichtpulse (zeitliche Wellenpakete)



## Beispiel: Stehende Wellen

Elektromagnetische Welle fällt auf senkrecht eine Leiterebene.

Idealer Leiter: Tangentialkomponente des el. Felds auf der Oberfläche  $E_{x,y} = 0$ .

Da aber das el.mag. Feld transversal polarisiert ist, ist auch  $E_z = 0$ .

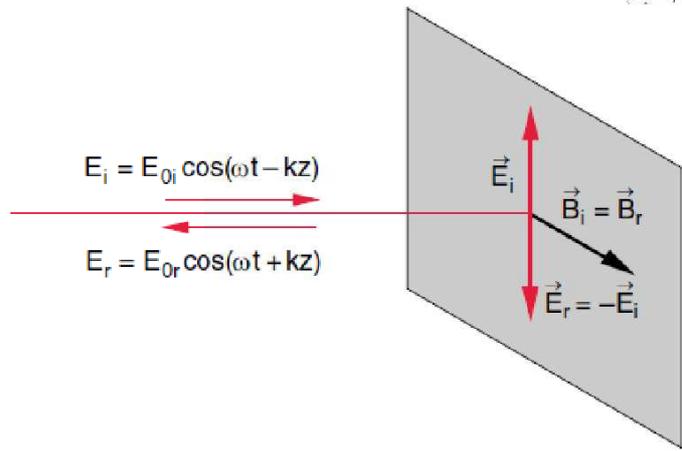
Also gilt auf der Leiteroberfläche  $\vec{E}(z = 0) = 0$

Damit dies für eine beliebige einfallende Welle  $\vec{E}_i = \vec{E}_{0,i} \cos(\omega t - k_z z)$  erfüllt ist, muss das Gesamtfeld aus der einfallenden

und einer reflektierten Welle  $\vec{E}_r = \vec{E}_{0,r} \cos(\omega t + k_z z)$  zusammensetzen, so dass gilt:

$$\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_r = 0$$

und damit  $\vec{E}_{0,i} = -\vec{E}_{0,r}$



Die Überlagerung beider Wellen ist dann:

$$\begin{aligned} \vec{E}(z, t) &= \vec{E}_{0,i} \cos(\omega t - k_z z) + \vec{E}_{0,r} \cos(\omega t + k_z z) \\ &= 2\vec{E}_{0,i} \sin(\omega t) \sin(k_z z) \end{aligned}$$

Das ist eine **stehende Welle**, d.h. die Positionen der Wellenbäuche und -knoten sind zu jedem Zeitpunkt ortsfest.

Wegen  $\text{rot } \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$

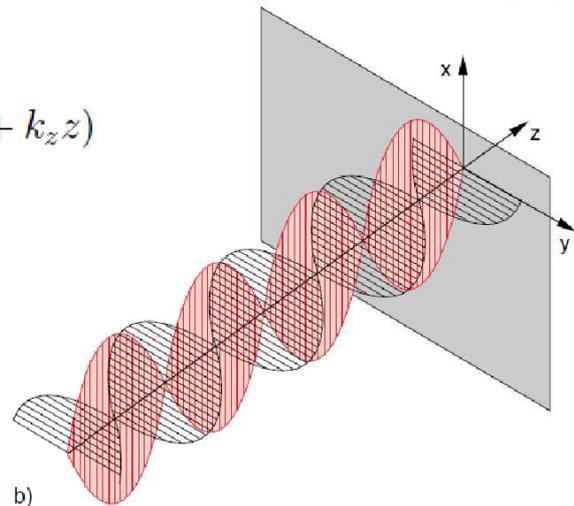
und damit  $\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}$

ist das B-Feld  $\vec{B}(z, t) = 2\vec{B}_0 \cos(\omega t) \cos(k_z z)$

und damit gegen E um  $\pi/2$  **phasenverschoben**.

Es ist daher auch  $\vec{B}(z = 0) = \vec{B}_i(z = 0) + \vec{B}_r(z = 0) \propto 2\vec{B}_0 \neq 0$

d.h. es gilt hier  $\vec{B}_{0,i} = \vec{B}_{0,r}$





In Materie verändern sich elektromagnetische Größen gemäß

$$\epsilon_0 \rightarrow \epsilon_0 \epsilon \quad \text{und} \quad \mu_0 \rightarrow \mu_0 \mu$$

Die Wellengleichung wird dann zu  $\Delta \vec{E} = (\epsilon_0 \epsilon \mu_0 \mu) \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

→ Die „Lichtgeschwindigkeit“ elektromagnetischer Wellen in Materie weicht von der Vakuum-Lichtgeschwindigkeit ab:

Die neue **Phasengeschwindigkeit** (=Geschwindigkeit mit der sich Flächen konstanter Phase durch den Raum bewegen) wird zu:

$$v_{\text{ph}} = \frac{c}{n}$$

Der **Brechungsindex** ist

$$n = \sqrt{\epsilon \mu}$$

Er ist eine **einheitenlose Materialgröße** und hängt von den relativen Dielektrizitäts- und Permeabilitätskonstanten ab.



$\epsilon$  und  $\mu$  selbst hängen außerdem von der Frequenz (bzw. der Wellenlänge) der eingestrahlten Welle ab, da die Polarisierungen und Kreisströme im Material je nach Frequenz der eingestrahlten Welle unterschiedlich schnell auf diese reagieren.

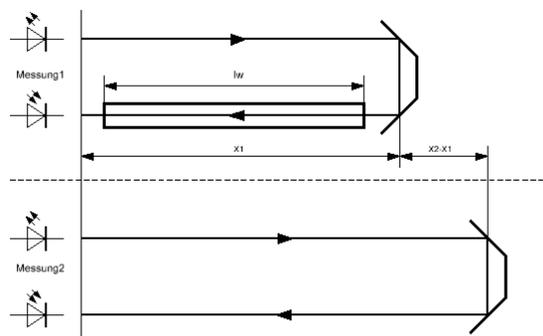
Also ist auch  $n = n(\omega)$  und somit  $v_{\text{ph}} = v_{\text{ph}}(\omega)$

→ Wellen **unterschiedlicher Frequenz** breiten sich mit **unterschiedlicher Phasengeschwindigkeit** im Medium aus. Dieser Effekt wird **Dispersion** genannt

### Versuch: Messung Lichtgeschwindigkeit in Luft & Wasser

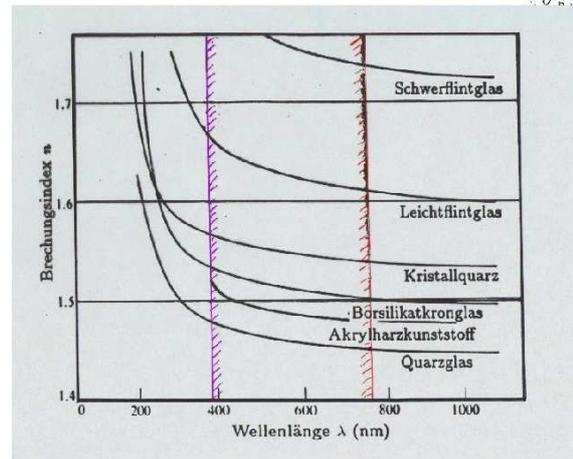
Das Licht einer Diode wird über einen Umweg mittels Umlenkspiegel auf einen Detektor gelenkt.

Die Phasenverschiebung des Signals liefert die Verzögerungszeit zwischen 2 Positionen und damit die Lichtgeschwindigkeit.

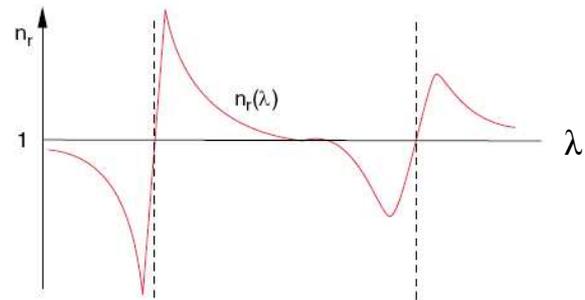


## Beispiele für Brechungsindizes:

$\lambda/\text{nm}$	480	589	656
FK3	1,470	1,464	1,462
BK7	1,522	1,516	1,514
SF4	1,776	1,755	1,747
SFS1	1,957	1,923	1,910
Quarzglas	1,464	1,458	1,456
Lithium-fluorid LiF	1,395	1,392	1,391
Diamant	2,437	2,417	2,410



- Vakuum  $n = 1$
- Luft  $n = 1,0002(7\dots9)$
- Wasser  $n = 1,33$
- nahe atomarer Übergänge:
- in sog. Metamaterialien sogar  $n < 0$  möglich!



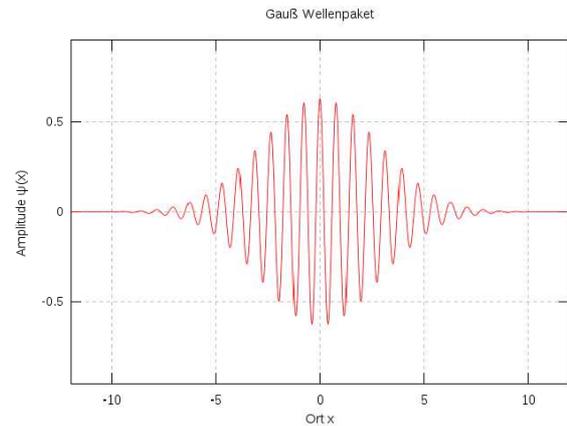
Quellen: Demtröder & mv-sirius.fh-offenburg.de

Die Frequenzabhängigkeit der Phasengeschwindigkeit führt dazu, dass Wellenpakete, die sich aus Teilwellen unterschiedl. Frequenz zusammensetzen:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_{\omega} \vec{E}_{\omega} \exp [i(\omega t + k(\omega)z)]$$

(1.) ihre Form ändern, z.B. zerfließen und breiter werden, und

(2) sich mit der **Gruppengeschwindigkeit** fortbewegen:  $v_G = \frac{\partial \omega}{\partial k}$



Diese ist nur dispersionsfreien Medium (Brechungsindex unabhängig der Frequenz) gleich der Phasengeschwindigkeit.

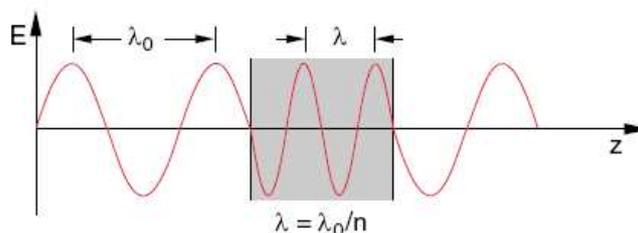
Die **Gruppengeschwindigkeit** kann **maximal die Lichtgeschwindigkeit** annehmen.

Die Phasengeschwindigkeit kann auch größer sein. Sie transportiert aber keine „Energie/Information“, so dass dies kein Widerspruch zur Relativitätstheorie darstellt.

Betrachten Übergang einer Welle vom Vakuum in Materie:

Da die Felder an der Grenzfläche zu beiden Seiten mit derselben Frequenz schwingen, muss gelten:

$$\omega = v_{\text{ph}} |\vec{k}| = \underbrace{\frac{c}{n}}_{\text{Materie}} \frac{2\pi}{\lambda} = \underbrace{c}_{\text{Vakuum}} \frac{2\pi}{\lambda_0}$$

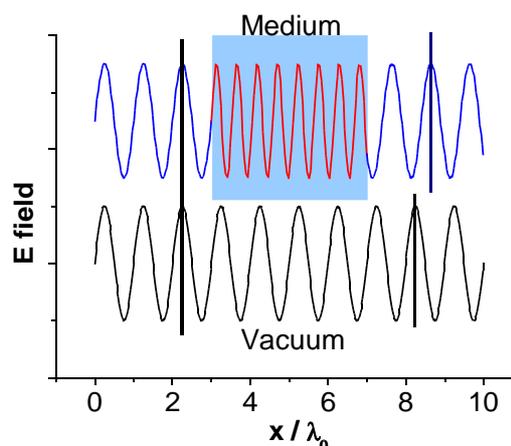


→ Die **Wellenlänge ändert sich** ebenfalls gemäß

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$$

Beim Durchtritt durch das Medium der Dicke  $d$  erfährt die Welle dadurch eine zusätzliche **Phasenverschiebung**, verglichen mit einer Welle im Vakuum:

$$\frac{E_{\text{medium}}}{E_{\text{vac}}} = \frac{\exp(i[\omega t + (\omega n/c)d])}{\exp(i[\omega t + (\omega/c)d])} = e^{i(\omega/c)(n-1)d}$$



Im Allgemeinen sind  $n$ ,  $\epsilon$  und  $\mu$  ein **komplexe Größen!**

(Z.B. in Metallen meist:  $\epsilon < 0$  und  $\mu \approx 1$  und daher  $n \approx \sqrt{\epsilon}$  imaginär.)

In diesem Fall schreibt man für die komplexen Größen:

$$\epsilon = \epsilon' + i\epsilon''$$

$$\mu = \mu' + i\mu''$$

$$\tilde{n} = n - i\kappa$$

Beim Durchtritt durch ein Medium der Dicke entlang der  $z$ -Richtung gilt dann:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i[\omega t - (\omega/c)(n+i\kappa)z]} = \vec{E}_0 e^{i[\omega t - (\omega/c)nz]} e^{-\frac{\omega}{c}\kappa z}$$

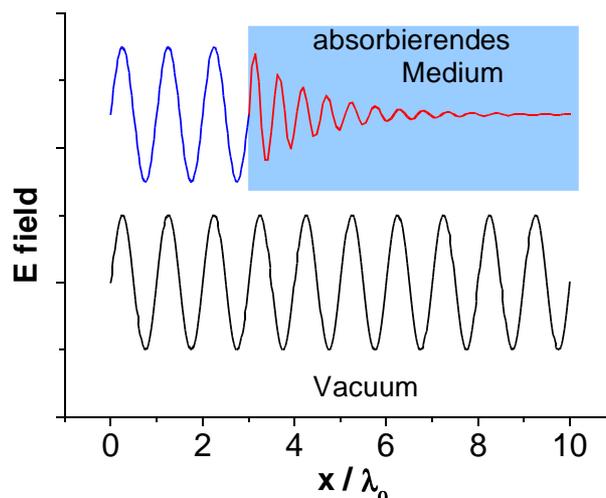
Die **Intensität** des Feldes

$$I = c\epsilon_0 |\vec{E}|^2 = I_0 \exp\left(-\frac{2\omega\kappa}{c} z\right)$$

**fällt exponentiell** mit der charakteristischen Länge  $1/\alpha$  ab.

$$\alpha = \frac{2\omega\kappa}{c} \text{ heißt Absorptionskoeffizient}$$

Einheit:  $[\alpha] = 1/\text{m}$



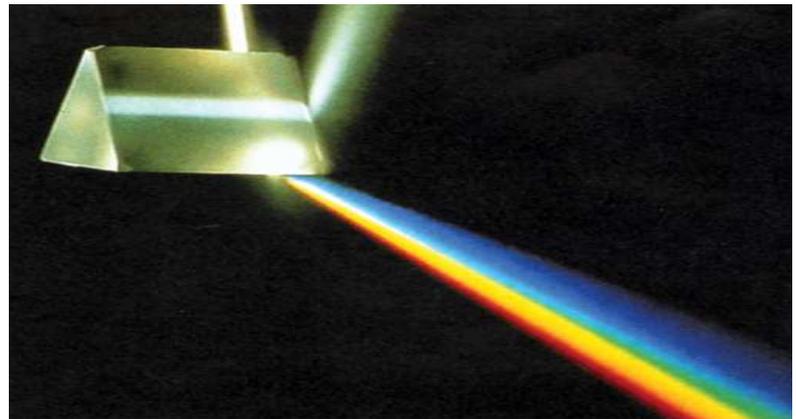
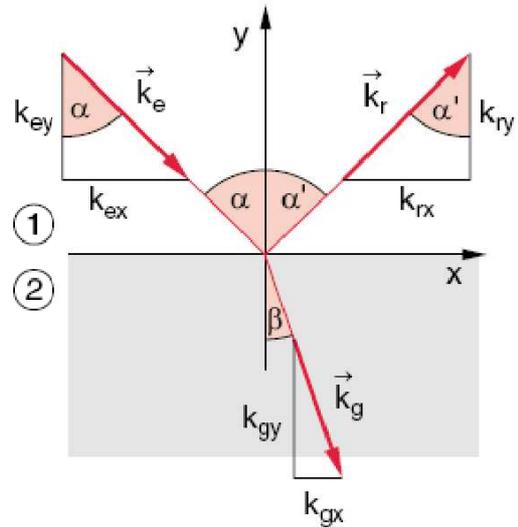
## Lichtbrechung:

Fällt eine ebene el.mag. Welle unter einem Winkel  $\alpha$  auf eine Grenzfläche zweier Materialien (Brechungsindex  $n_1$  und  $n_2$ ) so gilt für die den Ausfallswinkel  $\beta$  der transmittierten Welle das

### Snelliussche Brechungsgesetz

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1}$$

da  $n = n(\omega)$  erfolgt eine Aufspaltung verschiedener Frequenzen, wie sie z.B. in Prismen auftritt.



Bilder: Demtröder & www.physik.uni-bayreuth.de

## 5.9 Wellen an Grenzflächen

Betrachten Übergang einer Welle zwischen zwei Medien versch. Brechzahl (1) und (2)

### Stetigkeitsbedingungen

(s. Kapitel 1 - „Elektrostatik“):

(a) **Tangentialkomponente** ( $\parallel$ ) des E-Felds bleibt an der Grenzfläche erhalten:  $\vec{E}_{\parallel}^{(1)} = \vec{E}_{\parallel}^{(2)}$

(b) **Normalkomponente** ( $\perp$ ) der diel. Verschiebung bleibt erhalten:

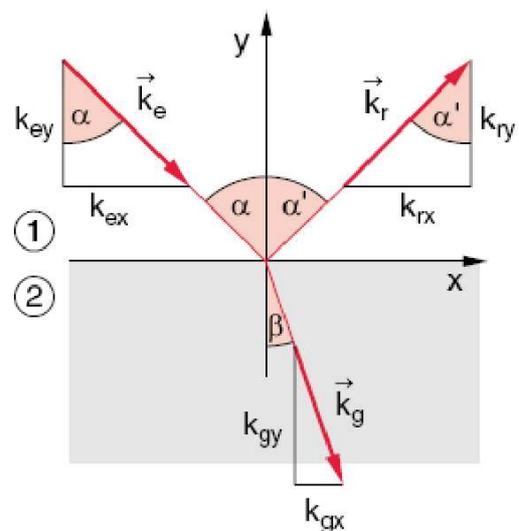
$$\vec{D}_{\perp}^{(1)} = \vec{D}_{\perp}^{(2)} \quad \text{bzw.} \quad \vec{E}_{\perp}^{(1)} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \vec{E}_{\perp}^{(2)}$$

analoge Herleitungen zeigen

$$\vec{B}_{\perp}^{(1)} = \vec{B}_{\perp}^{(2)} \quad \text{und} \quad \vec{H}_{\parallel}^{(1)} = \vec{H}_{\parallel}^{(2)} \quad \text{bzw.} \quad \vec{B}_{\parallel}^{(1)} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \vec{B}_{\parallel}^{(2)}$$

**einfallende** (i), **reflektierte** (r) und **transmittierte** (t) Wellen seien ebene Wellen, die in x-y-Ebene laufen ( $\alpha = i, r, t$ ):

$$\vec{E}^{\alpha} = \vec{E}_0^{\alpha} e^{i(\omega_{\alpha} - \vec{k}^{\alpha} \cdot \vec{r})} = (\vec{E}_{\parallel}^{\alpha} + \vec{E}_{\perp}^{\alpha}) e^{i(\omega_{\alpha} - \vec{k}^{\alpha} \cdot \vec{r})}$$



An der Grenzfläche muss gelten:  $\vec{E}_{||}^{(i)} + \vec{E}_{||}^{(r)} = \vec{E}_{||}^{(t)}$

Da dies für beliebige Zeiten gilt, ist:  $\omega_i = \omega_r = \omega_t$

→ **Frequenz ändert sich nicht**

auch muss Phase für beliebige Orte  $\vec{r}$

auf der Oberfläche (x-z-Ebene) für alle

drei Wellen dieselbe sein, also:  $\vec{k}_i \cdot \vec{r} = \vec{k}_r \cdot \vec{r} = \vec{k}_t \cdot \vec{r}$

Da  $\vec{k}_i = (k_{i,x}, k_{i,y}, 0)$  ist dann auch  $k_{r,z} = k_{t,z} = 0$

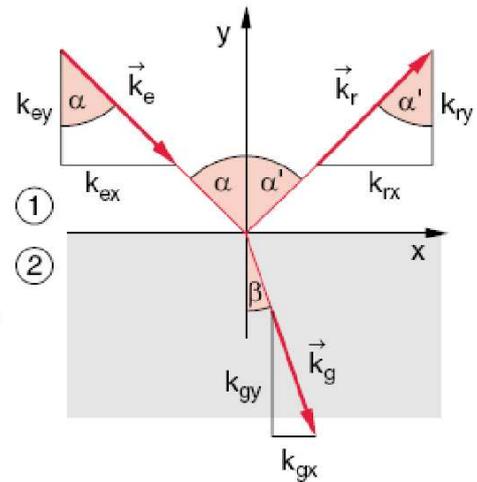
→ **alle drei Wellen verlaufen in der x-y-Ebene**

mit  $k_{i,x} = k_i \sin \alpha$ ,  $k_{r,x} = k_r \sin \alpha'$  und  $k_{t,x} = k_t \sin \beta$

und weil  $k_{i/r/t} = \frac{\omega n_{1,2}}{c}$

folgt: (1.)  $\alpha = \alpha'$  → **Einfallswinkel = Reflexionswinkel**

und (2.)  $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1}$       **Snelliussches Brechungsgesetz**



Wir unterscheiden im Folgenden nicht

mehr nur zwischen **Felder**

**normal** ( $\perp$ , z-Ebene) bzw. **tangential** ( $\parallel$ , x-y-Ebene)

**zur Grenzfläche** (x-y-Ebene)

sondern zusätzlich zwischen **Polarisationen**

**senkrecht** (**s**) bzw. **parallel** (**p**)

**zur Einfallsebene** (x-z-Ebene)

Eine **s-polarisierte** Welle hat offensichtlich nur

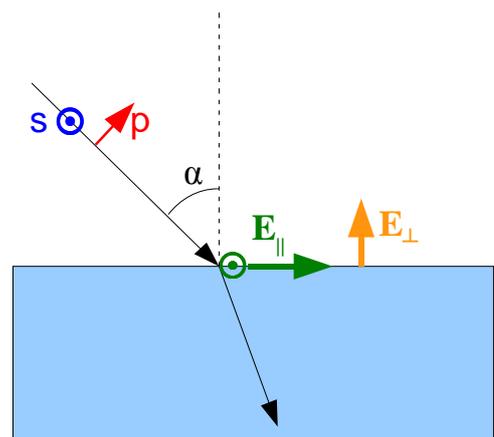
eine bzgl. der Grenzfläche **Tangential-Komponente**:

$$\vec{E}_s = (0, E_y, 0) = (0, E_{||}, 0)$$

Eine **p-polarisierte** Welle kann man dagegen zerlegen in einen

bzgl. der Grenzfläche **Tangential-** und **Normal-Anteil**:

$$\vec{E}_p = (E_x, 0, E_z) = E_p (\sin \alpha, 0, \cos \alpha) = (E_{||}, 0, E_{\perp})$$



Setzt man diese Ergebnisse in die Stetigkeitsbedingungen der Felder ein  
 (  $\vec{E}_{\parallel}^{(1)} = \vec{E}_{\parallel}^{(2)}$  ,  $\vec{E}_{\perp}^{(1)} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \vec{E}_{\perp}^{(2)}$  ,  $\vec{B}_{\perp}^{(1)} = \vec{B}_{\perp}^{(2)}$  und  $\vec{B}_{\parallel}^{(1)} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \vec{B}_{\parallel}^{(2)}$  )

zusammen mit dem Ebene-Wellen-Ansatz, so kann man die **Amplitudenverhältnisse** der reflektierte und transmittierten Felder relativ zum einfallenden Feld bestimmen:

$$t_s = \frac{E_s^{(t)}}{E_s^{(i)}} = \frac{2(n_1/\mu_1) \cos \alpha}{(n_1/\mu_1) \cos \alpha + (n_2/\mu_2) \cos \beta}$$

$$t_p = \frac{E_p^{(t)}}{E_p^{(i)}} = \frac{2(n_1/\mu_1) \cos \alpha}{(n_2/\mu_2) \cos \alpha + (n_1/\mu_1) \cos \beta}$$

$$r_s = \frac{E_s^{(r)}}{E_s^{(i)}} = \frac{(n_1/\mu_1) \cos \alpha - (n_2/\mu_2) \cos \beta}{(n_1/\mu_1) \cos \alpha + (n_2/\mu_2) \cos \beta}$$

$$r_p = \frac{E_p^{(r)}}{E_p^{(i)}} = \frac{(n_2/\mu_2) \cos \alpha - (n_1/\mu_1) \cos \beta}{(n_2/\mu_2) \cos \alpha + (n_1/\mu_1) \cos \beta}$$

Diese heißen **Fresnelsche Gleichungen**,  
 $t$  und  $r$  heißen **Transmissions- und Reflexionskoeffizienten**

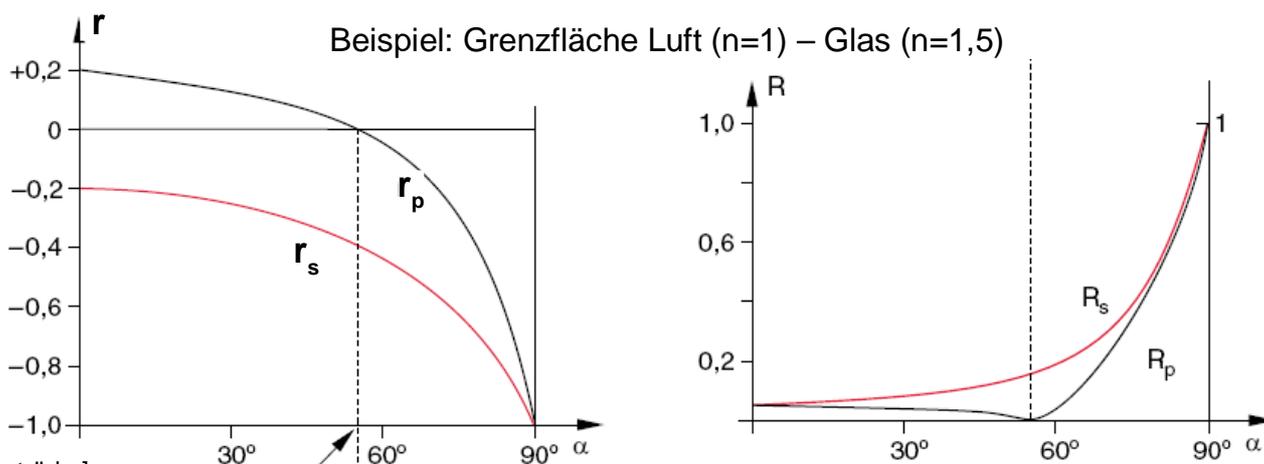
Für die **Intensität** der Felder gilt  $I \propto |\vec{E}|^2$

Hier spricht man von **Reflektivität  $R$**  und **Transmittivität  $T$** :

Für s- bzw. p-polarisierte Wellen gilt hier:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{s,p} = \frac{I_{s,p}^{(r)}}{I_{s,p}^{(i)}} = |r_{s,p}|^2 \\ T_{s,p} = \frac{I_{s,p}^{(t)}}{I_{s,p}^{(i)}} = |t_{s,p}|^2 \end{array} \right.$$

Wegen der **Energieerhaltung** muss  $R + T = |r|^2 + |t|^2 = 1$



## Brewster-Winkel:

Für  $\alpha + \beta = 90^\circ$  hat der Reflexionskoeffizient bzw. die Reflektivität der **p-polarisierten Welle** einen Nulldurchgang, d.h. **es findet keine Reflexion statt**.

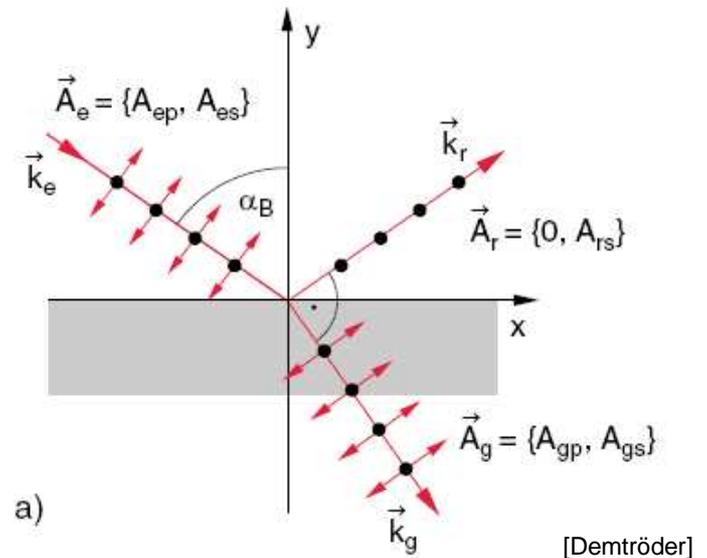
Der Einfallswinkel, bei dem dies der Fall ist, heißt **Brewster-Winkel**.

$$\text{Es gilt } \tan \alpha_B = \frac{n_2}{n_1}$$

Anschauliche Erklärung:

Elektronen werden in Medium (2) zum Schwingen entlang  $\vec{E}_p^{(2)}$  angeregt.

Dieser steht aber senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der reflektierten Welle  $\rightarrow$  keine Emission der Welle in diese Richtung möglich.



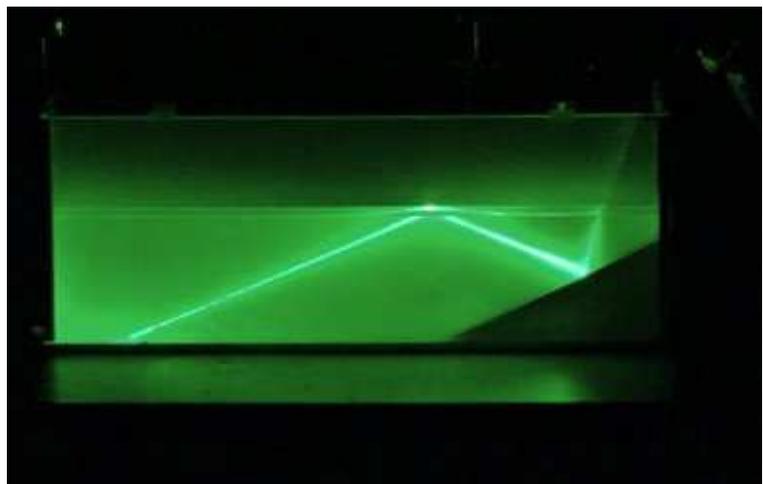
## Totalreflexion

Für Reflexion an der Grenzfläche von einem optisch dichteren Medium ( $n_1$ ) zu einem optisch dünneren Medium ( $n_2 < n_1$ ) gibt es ab einem gewissen Einfallswinkel  $\alpha$  keine Lösung mehr für den gebrochenen Winkel  $\beta$ .

Dies ist der Fall wenn:  $\sin \beta = \frac{n_1}{n_2} \sin \alpha > 1$ , da ja  $\sin \beta < 1$  sein muss.

Es kommt zur **Totalreflexion** unterhalb des **Grenzwinkels**

$$\sin \alpha_T = \frac{n_2}{n_1}$$

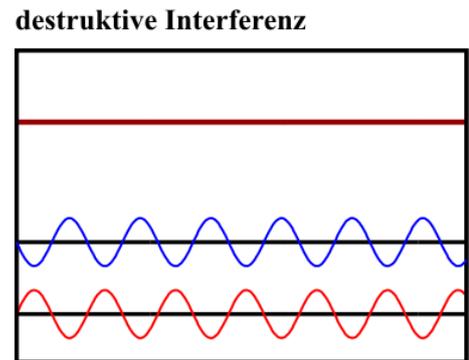
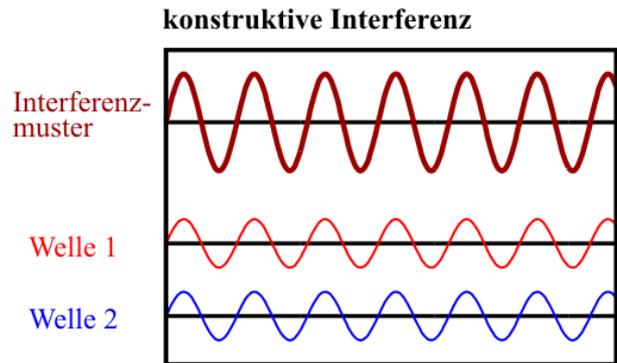


Treffen zwei Wellen mit einer **definierten Phasenbeziehung** untereinander am selben Ort & Zeit aufeinander, kommt es zur **Interferenz**, d.h. ihre Felder addieren sich am jeweiligen Ort / zur jew. Zeit.

Sind die Wellen phasengleich (Wellenberge treffen auf Wellenberge etc.), so verstärken sich ihre Amplituden, es kommt zur **konstruktiven Interferenz**.

Sind die Wellen um  $180^\circ$  phasenverschoben (Wellenberge treffen auf Wellentäler) so löschen sie sich gegenseitig aus: destruktive Interferenz

Es gilt dabei stets **Energieerhaltung**; ausgelöschte Wellen führen ihre Energie dann anderweitig ab.



### Beispiel: Beugung am Doppelspalt (Youngscher Doppelspalt)

Ebene Welle  $\vec{E}_{\text{in}} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$   
trifft auf Doppelspalt  $\rightarrow$  Ausgangspunkt für  
2 Kugelwellen gleicher Frequenz.

Die Wellen werden auf einem weit entfernten Schirm ( $s \gg r_{1,2}$ ) beobachtet.

Feld von Spalt 1 (Radius  $R_s$ ) am Beobachtungsort  $r$  im Abstand  $s_1 = |\vec{r}_1 - \vec{r}|$

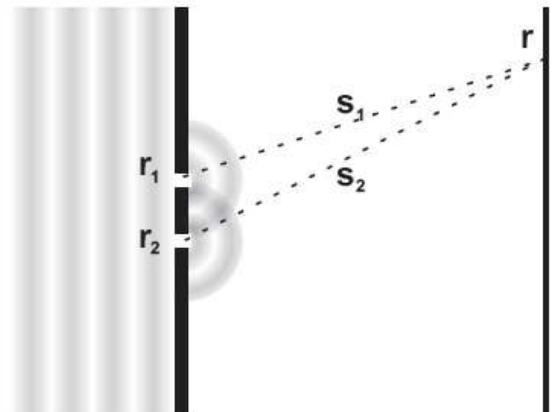
$$\vec{E}_1(\vec{r}, t) = \vec{E}_{\text{in}}(\vec{r}_1, t - s_1/c) \frac{R_s}{s_1}$$

Feld von Spalt 2 analog.

Für große Entfernungen ist  $s_1 \approx s_2 \approx s$

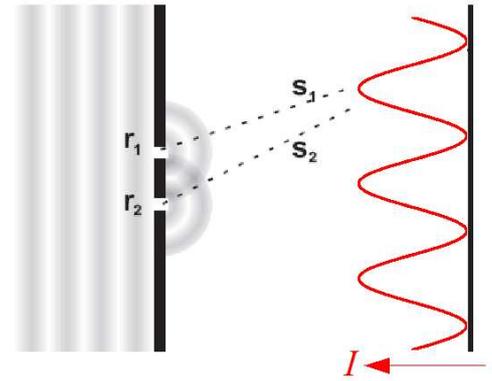
Das Gesamtfeld am Beobachtungsort ist dann

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\text{ges}}(\vec{r}, t) &= \vec{E}_1(\vec{r}, t) + \vec{E}_2(\vec{r}, t) \\ &\approx \frac{R_s}{s} \left( \vec{E}_{\text{in}}(\vec{r}_1, t - s_1/c) + \vec{E}_{\text{in}}(\vec{r}_2, t - s_2/c) \right) \end{aligned}$$



Die beobachtete Intensität am Schirm ist:

$$\begin{aligned}
 I &= |\vec{E}_{\text{ges}}|^2 \\
 &= \frac{R_{\text{slit}}^2}{s^2} \left( |E_{\text{in}}(\vec{r}_1, t - s_1/c)|^2 + |E_{\text{in}}(\vec{r}_2, t - s_2/c)|^2 + \right. \\
 &\quad \left. + 2\text{Re} \vec{E}_{\text{in}}^*(\vec{r}_1, t - s_1/c) \vec{E}_{\text{in}}(\vec{r}_2, t - s_2/c) \right) \\
 &= \boxed{I_1 + I_2} + \boxed{I_{12} \cos \left[ \omega \frac{s_2 - s_1}{c} + \vec{k} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \right]}
 \end{aligned}$$



Die beobachtete Intensität setzt sich zusammen als **Summe der Einzelintensitäten** beider Spaltöffnungen plus einem **Interferenzterm**, der entlang der Schirmfläche als Funktion von  $s_2 - s_1$  kosinusförmig oszilliert.

Es gilt  $0 < I < I_1 + I_2$ .

### Beispiel: Michelson-Interferometer

Einlaufende Welle wird an einem Strahlteiler gleichmäßig in zwei Interferometerarme geschickt.

Nach Rückreflexion an einem Spiegel interferieren die Wellen am Strahlteilerausgang.

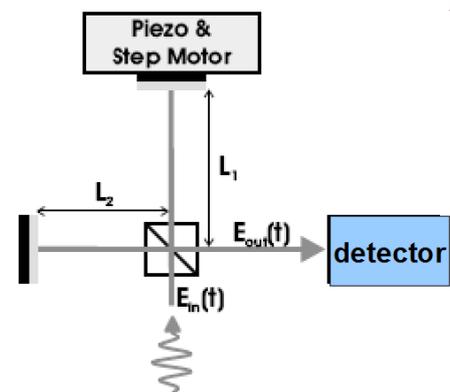
Einer der Interferometerarme kann dann mit einem Motor verfahren werden.

Eine ähnlich Rechnung ergibt auch hier:

$$\begin{aligned}
 I_{\text{detector}} &= \frac{1}{2} \left| \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \right|^2 = \frac{1}{2} \left| \vec{E}_{\text{in}} \left( t - \frac{2L_1}{c} \right) + \vec{E}_{\text{in}} \left( t - \frac{2L_2}{c} \right) \right|^2 \\
 &= I_{\text{in}} + I_{\text{in}} \cos \left( \omega \frac{2|L_1 - L_2|}{c} \right)
 \end{aligned}$$

Je nach Längendifferenz  $2|L_1 - L_2|$  sieht der Detektor konstruktive ( $I_{\text{detector}} = 2I_{\text{in}}$ ) oder destruktive ( $I_{\text{detector}} = 0$ ) Interferenz.

Frage: Wo bleibt die Energie bei destruktiver Interferenz?



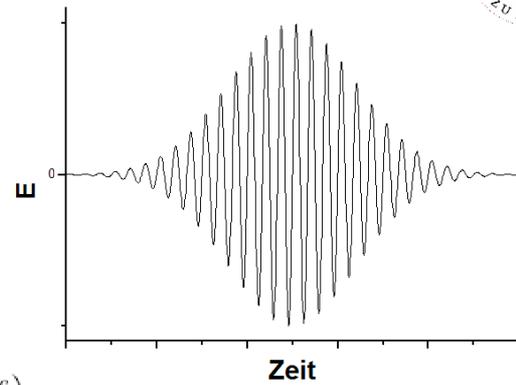
## Michelson-Interferometrie mit Wellenpaketen:

Einfallendes Feld sei ein Wellenpaket  
mit **Frequenz  $\omega_0$**  und einer **Einhüllenden  $E(t)$** :

$$E_{\text{in}}(t) = E(t)e^{i\omega_0 t}$$

Intensität am Detektor:

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{1}{2} |E_{\text{in}}(t + L_1/c) + E_{\text{in}}(t + L_2/c)|^2 \\ &= I_{\text{in}}(t) + \text{Re} \left( E^*(t + L_1/c) E(t + L_2/c) e^{i\omega_0 s/c} \right) \end{aligned}$$



bei hohen Frequenzen können nur Zeitmittelungen gemessen werden:

$$\begin{aligned} \langle I \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T I(t) dt \\ &= \langle I_{\text{in}} \rangle + \text{Re} \left[ \int |E_\omega|^2 e^{i\omega s/c} d\omega \right] \cos \omega_0 s/c \\ &= \langle I_{\text{in}} \rangle + f(s) \cos \omega_0 s/c \end{aligned}$$

→ auch das **Interferenzmuster** hat eine **Einhüllende**  $f(s) = \int |E_\omega|^2 e^{i\omega s/c} d\omega$

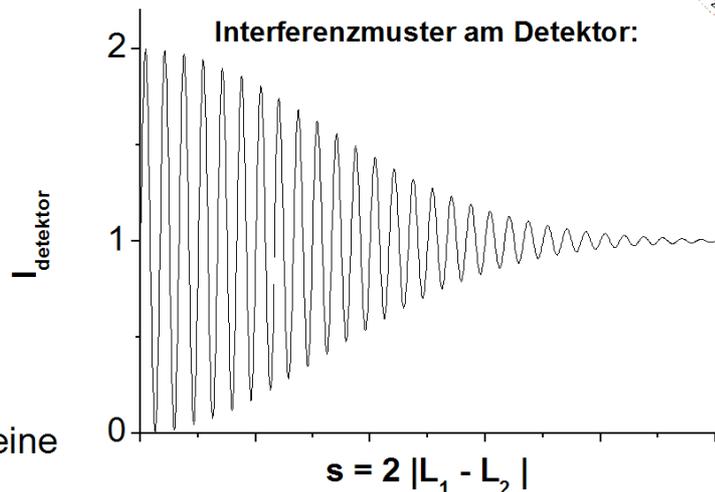
Diese ist außerdem die Fourier-Transformierte der Spektralverteilung des Wellenpakets.

→ Interferenz kann nur über eine gewisse Streckendifferenz beobachtet werden.

Die typische Größenordnung dafür heißt **Kohärenzlänge**  $s_{\text{coh}}$

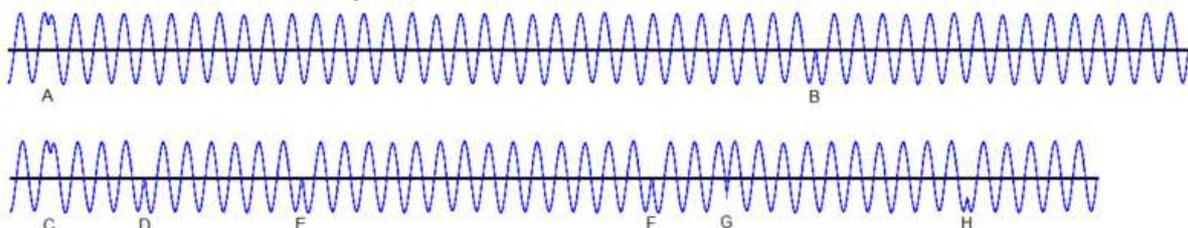
bzw. **Kohärenzzeit**  $\tau_{\text{coh}} = s_{\text{coh}}/c$

Die Kohärenz gibt an, über welche Strecken/Zeiten hinweg eine Welle eine definierte Phase besitzt



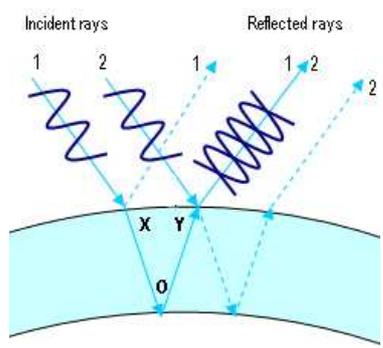
### Beispiele für Kohärenzlängen:

- Laser: Meter – Kilometer
- Sonnenlicht, Glühbirnen:  $\sim \mu\text{m}$



### Weitere Interferenzphänomene:

Interferenz an dünnen Filmen:



Speckle-Muster:

Kohärentes Licht (Laser) wird an einer rauen Oberfläche gestreut

→ granulenartiges Interferenzmuster

