Institut für Physik - Humboldt-Universität zu Berlin

Seminar: Grundlagen der Quantenmechanik

Die Bell'schen Ungleichungen

Sebastian Beumler, Matr.Nr.: 509715

Betreuer: Dr. Alejandro Saenz

19. November 2007

1 Worum gehts es?

Kollision zweier Betrachtungsweisen bei einem (Gedanken)-Experiment

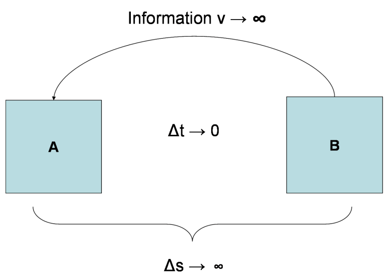
- klassische Betrachtungsweise
- Quantenmechanische Betrachtungsweise

1.1 Was ist mit der klassischen Betrachtungsweise gemeint?

Die klassische Betrachtungsweise fordert eine Theorie, welche Lokalität und Realismus als Bedingung vorraussetzt

genauer:

- Realismus bedeutet, dass es eine Beobachterunabhängige Realität gibt, das System also bereits die vollständige Information über alle mögliche Wahrscheinlichkeiten enthällt. Es existiert keine Unbestimmtheit, sondern höchstens unbekannte Parameter(sogenannte versteckte Variablen).
- Lokalität bedeutet, dass das Messergebnis eines Teilsystems A nicht (instantan) von dem Ausgang eines anderen Teilsystems B an einem anderen Ort abhängt.



Würde die Messung von A, welche nahezu gleichzeitig mit der Messung von B vorgenommen wird, von der Messung bei B abhängen, dann müsste A von B eine Information erhalten, welche bei beliebig großem Abstand mit unendlicher Geschwindigkeit von B zu A gesendet werden müsste. Es folgt: $v > c$ (Bruch mit der SRT).

1.2 Quantenmechanische Betrachtungsweise

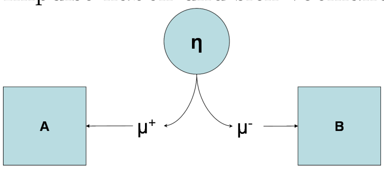
In der QM. gibt es den Begriff der maximalen Verschränkung. Dies bedeutet, dass mehrere Teilsysteme als ein Gesammtsystem behandelt werden müssen.
Um dies genauer zu erklären, betrachten wir folgendes Experiment:

$$\eta \longrightarrow \mu^+ + \mu^- \tag{1}$$

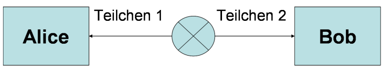
Ein Spin-0-Teilchen in Ruhe zerfällt. Es entstehen 2 neue Teilchen.
Spinerhaltung und Impulserhaltung liefern z.B

Teilchen 1: Spin:+1/2 und Impuls: p_x
Teilchen 2: Spin:-1/2 und Impuls: $-p_x$

Diese beiden Teilchen sollen im Folgenden untersucht werden. Nehmen wir an, dass sie entgegengesätzte Impulse haben und sich voeinander entfernen.



Nun kann Beobachter A (im Folgenden Alice genannt) am teilchen 1 eine Messung vornehmen und Beobachter B (im Folgenden Bob) an Teilchen 2. Die beiden Teilchen sind nun räumlich separiert, wesswegen sie klassisch betrachtet einer lokal-realistischen Theorie gehorchen müssen.



Nun wird Alice den Spin von Teilchen 1 z.B. mit einem Stern-Gerlach-Experiment messen. Sie erhällt entweder +1/2 oder -1/2 (gleiche Wahrscheinlichkeit). Misst Alice den Wert +1/2, dann kann sie den Ausgang von Bob's Experiment prophezeien, ehe er gemessen hat (Er erhällt -1/2). Nimmt Alice keine Messung vor, hat Bob eine 50-Prozent Chance +1/2, sowie -1/2 zu messen.
Es existieren also folgende Zustandsmöglichkeiten:
(Teilchen 1; Teilchen 2): (+;-) und (-;+).

Quantenmechanisch betrachtet gibt es nur ein Gesammtsystem, welches sich in einem Überlagerungszustand befindet.

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|+;-\rangle - |-;+\rangle\} \tag{2}$$

Eine Messung entspricht einem Filterprozess und hat eine Zustandsreduktion zur Folge.
Bsp.: Wird +1/2 gemessen wird $|\psi >$ folgendermaßen reduziert:

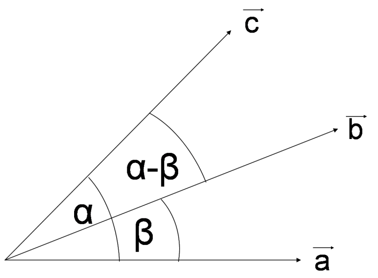
$$|\psi\rangle \longrightarrow |+;-\rangle \tag{3}$$

2 Herleitung der Bellschen Ungleichung

Nun wollen wir unsere Überlegung etwas erweitern und den Spin in 3 verschiedene Raumrichtungen messen. Wir benutzen eine Stern-Gerlach-Apparatur, welche um eine feste Achse gedreht werden kann. z.B. Raumrichtungen $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ in x,y-Ebene.

$\vec{a}$ schließt mit $\vec{b}$ einen Winkel α ein,
$\vec{a}$ schließt mit $\vec{c}$ einen Winkel β ein,

y-Achse ist Drehachse



Nun führen Alice und Bob getrennt voneinander ihre Spinmessungen entlang $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ durch (qm. Bezeichung: Operatoren $(\hat{a}, \hat{b}, \hat{c})$).

Wir werden nun eine lokal-realistische Auswertung vornehmen:

Nehmen wir an, dass der Zustand des Systems von vornerein bestimmt ist, und nicht von den Messungen abhängt. Dann können wir sagen, dass der Spin ein Drehimpulsvektor ist, fest im Raum steht und sich durch die Messung nicht verändert.

Überlapp zeichnen !!!

Führen Alice und Bob wiederholte Messungen, z.B an einem zerfallendem Köper durch, welcher permanent Elektronenpaare erzeugt, durch, dann erhallten sie folgende Auswertung:

Anzahl	Typ von Teilchen 1	Typ von Teilchen 2
N_1	(a+,b+,c+)	(a-,b-,c-)
N_2	(a+,b+,c-)	(a-,b-,c+)
N_3	(a+,b-,c+)	(a-,b+,c-)
N_4	(a+,b-,c-)	(a-,b+,c+)
N_5	(a-,b+,c+)	(a+,b-,c-)
N_6	(a-,b+,c-)	(a+,b-,c+)
N_7	(a-,b-,c+)	(a+,b+,c-)
N_8	(a-,b-,c-)	(a+,b+,c+)

Tabelle 1: N_i bezeichnet die Anzahl der gefundenen Teilchen

Nehmen wir nun an, dass Alice in $\vec{a}$-Richtung misst und + erhällt. Daraus folgt: Teilchen 1(a+) und Teilchen 2 (a-).
Weiterhin nehmen wir an, dass Bob in $\vec{b}$-Richtung misst und ebenfalls + erhällt. Daraus folgt: Teillchen 1(b-) und Teilchen 2 (b+).

Die Zusammensetzung von Teilchen 1 und Teilchen 2 sieht klassisch wie folgt aus:

Teilchen 1: (a+,b-,c?)
Teilchen 2: (a-,b+,c?)

Nach unserer Tabelle wird dies durch die Populationen $N_3 + N_4$ realisiert.

Da es keine negative Anzahl an Teilchen geben kann, läßt sich formal folgende Ungleichung aufstellen:

$$N_3 + N_4 \leq N_3 + N_4 + N_i + N_j \qquad \text{mit } N_i \geq 0, N_j \geq 0 \tag{4}$$

Also z.B.:

$$N_3 + N_4 \leq N_3 + N_4 + N_2 + N_7 \tag{5}$$

Wir stellen die Gleichung um und fügen der Übersicht halber Klammern ein, und teilen durch die Gesammtanzahl an Teilchen

$$\frac{(N_3 + N_4)}{\sum_i N_i} \leq \frac{(N_2 + N_4)}{\sum_i N_i} + \frac{(N_3 + N_7)}{\sum_i N_i} \tag{6}$$

Nun ändern wir unsere Notation ein wenig und Schreiben an die erste Stelle in unserer Klammer das Messergebnis für Teilchen 1 und an die zweite Stelle das Messergebnis für Teilchen 2. statt Teilchen 1: (a+,b-,c?) und Teilchen 2: (a-,b+,c?) schreiben wir zusammen: $(a^+; b^+)$. Die Anzahl der Teilchen $(a^+; b^+)$ war $N_3 + N_4$ und die Wahrscheinlichkeit, dass Alice a^+ und Bob b^+ misst ist:

$$P(a^+; b^+) = \frac{N_3 + N_4}{\sum_i N_i} \tag{7}$$

Somit läßt sich unsere Gleichung (6) umschreiben und wir erhalten Die Bell'sche[1] Ungleichung:

$$\underline{P(a^+; b^+) \leq P(a^+; c^+) + P(c^+; b^+)} \tag{8}$$

Die Bell'sche Ungleichung liefert eine Aussage über Messwahrscheinlichkeiten. Alle lokal-realistischen Theorien müssen die Ungleichung erfüllen, da sich die Gleichung nur aus einer einzigen Grundannahme herleitung ließ.
Nämlich, dass das System vorher bestimmt ist und nach einer Messung der Zustand des Systems nicht verändert wird. Keine Zustandsreduktion !!!

[1] benannt nach John Stewart Bell, 28. Juni 1928 bis 1. Oktober 1990

3 Quantenmechanische Auswertung

Wir werden jetzt eine quantenmechanische Auswertung vornehmen und überprüfen, ob die Bell'sche Ungleichung wirklich immer erfüllt ist. Aus Quantenmechanischer Sicht geschehen folgende Schritte:

- 1) Keine Messung wurde bisher ausgeführt. Bisher völlig unbestimmter Zustand $|\psi\rangle$
- 2) Messung von $\hat{a}$ ergibt $a_1 = \pm\frac{1}{2}$ und $a_2 = \mp\frac{1}{2}$, da beide Ereignisse gleich wahrscheinlich sind. Es erfolgt, falls $a_1 = +\frac{1}{2}$ eine Zustandsreduktion:

$$|\psi\rangle_1 \longrightarrow |a^+\rangle_1 \quad \text{und}|\psi\rangle_2 \longrightarrow |a^-\rangle_2 \tag{9}$$

- 3) Messung von $\hat{b}$ durch Bob:

  $< \hat{b} >= \langle a^-|\hat{b}|a^-\rangle$

  Entwicklung nach Basisvektoren $|b\rangle$: $\quad |a^-\rangle = I|a^-\rangle = \sum_b |b\rangle\langle b|a^-\rangle$

$$\begin{aligned} < \hat{b} > &= \langle a^-|\hat{b}|a^-\rangle = \sum_b c^*_{ba}\langle b|\hat{b}|b\rangle c_{ba} = \sum_b |c_{ba}|^2 \cdot \langle b^|\hat{b}|b^\rangle \\ &= |c_{(b^-;a^-)}|^2 \cdot \langle b^-|\hat{b}|b^-\rangle + |c_{(b^+;a^-)}|^2 \cdot \langle b^+|\hat{b}|b^+\rangle \end{aligned}$$

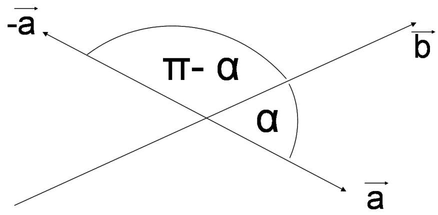
  Mit $\langle b^+|\hat{b}|b^+\rangle = +\frac{1}{2}$ und $\langle b^-|\hat{b}|b^-\rangle = -\frac{1}{2}$ ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, dass Alice a^+ misst und Bob b^+ misst zu:

$$P(a^+; b^+) = \frac{1}{2} \cdot |c_{(b^+;a^-)}|^2 \tag{10}$$

Um die oben genannte Wahrscheinlichkeit zu errechnen muss der Entwicklungskoeffizient $|c_{(b^+;a^-)}|^2$ bestimmt werden.
Es gilt:

$$\begin{aligned} |c_{(b^+;a^-)}|^2 &= \langle b^+|a^-\rangle \cdot \langle b^+|a^-\rangle^* \\ &= \langle b^+|a^-\rangle \cdot \langle a^-|b^+\rangle \end{aligned}$$

Das Skalarprodukt $\langle b^+|a^-\rangle$ läßt sich wie folgt bestimmen:
Der Vektor $\vec{b}$ ergibt sich aus einer Drehung von $\vec{a}$ um den Winkel α. Analog auch aus einer Drehung um den Winkel $\pi - \alpha$ aus $\vec{-a}$.



$$|b^+\rangle = |\hat{D}a^-\rangle \tag{11}$$

Die Quantenmechanische Drehmatrix hat die Form: $\hat{D} = \begin{pmatrix} cos(\frac{\delta}{2}) & -isin(\frac{\delta}{2}) \\ isin(\frac{\delta}{2}) & cos(\frac{\delta}{2}) \end{pmatrix}$
mit dem Drehwinkel $\delta = (\pi - \alpha)$.

$$\begin{aligned} \langle a^-|b^+\rangle &= \langle a^-|\hat{D}a^-\rangle \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos(\frac{\pi-\alpha}{2}) & -isin(\frac{\pi-\alpha}{2}) \\ isin(\frac{\pi-\alpha}{2}) & cos(\frac{\pi-\alpha}{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -isin(\frac{\pi-\alpha}{2}) \\ cos(\frac{\pi-\alpha}{2}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\langle a^-|b^+\rangle = cos(\frac{\pi - \alpha}{2}) \tag{12}$$

$$|c_{(b^+;a^-)}|^2 = cos^2(\frac{\pi - \alpha}{2}) = sin^2(\frac{\alpha}{2}) \tag{13}$$

Analog ergeben sich die anderen Entwicklungskoeffizienten, so dass sich diese in die Bellsche Ungleichung einsetzen lassen und sich nach kürzen der Faktoren 1/2 folgendes ergibt:

$$sin^2(\alpha/2) \leq sin^2(\beta/2) + sin^2(\frac{\alpha - \beta}{2}) \tag{14}$$

Für $\alpha = \pi$ und $\beta = \frac{\pi}{2}$ ergibt sich:

$$0.5 \leq 0.292 \tag{15}$$

Die Bellsche Ungleichung ist bei Wahl dieser Winkel offensichtlich verletzt. Dies konnte experimentell bestätigt werden.

Wie haben wir den Ausgang dieses Experimentes zu deuten? Um das Ergebnis richtig zu deuten ist es sinnvoll unsere Ergebnisse noch ein mal zu rekapitulieren.

4 Zusammenfassung

- Wir haben eine Bedingung aufgestellt, welche alle lokal-realistischen Theorien erfüllen müssen [Bell'sche Ungleichung, oder Bell'sche Theorem (Gl.8)]
- Wir haben einen Sachverhalt konstruiert, dessen quantenmechanische Beschreibung von der klassischen abweicht und welche die Bell'sche Ungleichung verletzt
- Wir haben den Sachverhalt experimentell überprüft und die Verletzung der Bell'schen Ungleichung bestätigt
- Die Ergebnisse betrachtend müssen wir zu dem Schluß kommen, dass die Natur sich nicht immer durch lokal-realistische Theorien beschreiben läßt und die quantenmechanische Beschreibung die besseren Vorraussagen liefert.