

Quanten-Zeno-Effekt

Antonia Karamatskos

3.12.2007

Übersicht

- Geschichtliches
- Quanten-Zeno-Effekt
 - Definition
 - Herleitung
 - Grundlagen
- Experimentelle Realisation
- Interpretation
- Optisches Analogon
- Anti-Zeno-Effekt, Ausblick
- Zusammenfassung

Zur Geschichte

- Zenon von Elea (ca. 490 v.Chr.):
„Das Universum ist statisch.“



- Zenons Pfeilparadoxon
 - Pfeil hat in jedem Moment t , in dem er beobachtet wird, einen wohl definierten Ort r , d.h. in jedem Moment ist er unbeweglich
 - Summation aller Momente
- **Pfeil bewegt sich nicht**
- Pfeil muss zuerst die Hälfte der Strecke zurücklegen, dann Hälfte der Hälfte usw...

- Damals nicht geläufig:
 - Endlicher Grenzwert einer unendlichen Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} - 1; \quad \text{hier: } q = \frac{1}{2} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1$$

- Infinitesimalrechnung

$$v(t) = \dot{r}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r(t + \Delta t) - r(t)}{\Delta t}$$

- Entgegengesetzte Denkrichtung:
 - Heraklitos (540 v.Chr.): „Alles ist in ständiger Bewegung.“

Quanten-Zeno-Effekt

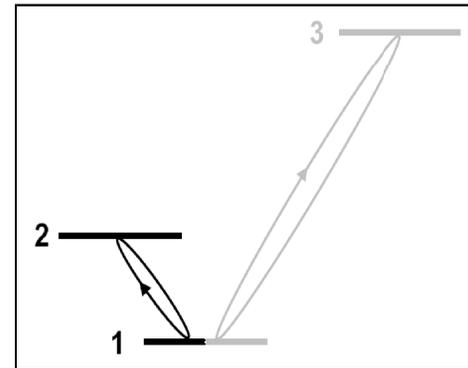
- Effekt 1976 von Misra und Sudarshan theoretisch hergeleitet und benannt

„Will the cat escape the cruel death awaiting it, against which it has no defense, provided its vital signs are constantly watched with loving care?“

(Misra, Sudarshan, Journal of Math.Ph., Vol. 18, No 4, 1977, p. 757)

Der Effekt

- Führen Überlegungen an einem einzelnen Ion durch
- Instabiler Zustand: Teilchen zwischen Level 1 und 2
- Wellenfunktion



$$|\psi\rangle = p_1 |\text{nicht zerfallen}\rangle + p_2 |\text{zerfallen}\rangle$$

mit $p_1^2 + p_2^2 = P_1 + P_2 = 1$

- Messung, dass der Zustand nicht zerfallen ist
- Kollaps der Wellenfunktion auf
→ $|\text{nicht zerfallen}\rangle$

- n Messungen (entsprechen idealerweise instantanen Projektionen auf Eigenzustände) in T/n Intervallen
- Messungen lassen Wellenfunktion kollabieren
- Für die Wahrscheinlichkeit des Überlebens in der Zeit T gilt dann (nach qm Überlegungen):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(|\text{nicht zerfallen}\rangle) = 1$$

D.h.:

**Der Zerfall findet im Grenzfall
nicht statt!**

Herleitung

- Rein theoretische Überlegung

H Hamilton - Operator

$U = e^{-\frac{i}{\hbar} H t}$ Zeit - Evolutionsoperator

Ψ Wellenfunktion

- Überlebenswahrscheinlichkeit P ist gegeben durch:

$$P(t) = |\langle \Psi | U | \Psi \rangle|^2 \rightarrow \text{für kleine } t \text{ mit } e^{-\frac{i}{\hbar} H t} \approx \hat{1} - \frac{\hat{H}}{\hbar} t - \frac{1}{2\hbar^2} \hat{H}^2 t^2$$

$$P(t) \approx 1 - (\Delta \hat{H})^2 t^2$$

$$\text{mit } (\Delta \hat{H})^2 = \frac{1}{\hbar^2} (\langle \Psi | \hat{H}^2 | \Psi \rangle - \langle \Psi | \hat{H} | \Psi \rangle^2)$$

- Wahrscheinlichkeit hängt für kleine Zeiten t quadratisch von der Zeit ab
- n Messungen in Intervall T : $T/n, 2T/n, \dots$
- Dann gilt für die Wahrscheinlichkeit

$$P(t) \approx 1 - (\Delta \hat{H})^2 t^2 \rightarrow$$

$$P(T/n) = [1 - (\Delta \hat{H})^2 (T/n)^2]^n \rightarrow$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [1 - (\Delta \hat{H})^2 (T/n)^2] = 1$$

- Klassischer Verlauf:

$$dN = -N \gamma dt \rightarrow N(t) = N(0) e^{-\gamma t} \rightarrow$$

$$P(t) = \frac{N(t)}{N(0)} = e^{-\gamma t} = 1 - \gamma t + \dots$$

γ bezeichnet hier die klassische Zerfallsrate

Grundlagen

Benötigen für das Experiment Beschreibung eines **Zwei-Niveau-Systems** der Frequenz

$$\omega_{21} = \frac{E_2 - E_1}{\hbar},$$

das durch hinreichend intensives äußeres Feld gestört wird:

$$E(t) = E_0 \cos \omega t$$

Es folgen die Koeffizienten p_1, p_2 :

Falls für $t=0$ gilt: $p_1 = 1, p_2 = 0 \Rightarrow$ mit geeigneten Näherungen :

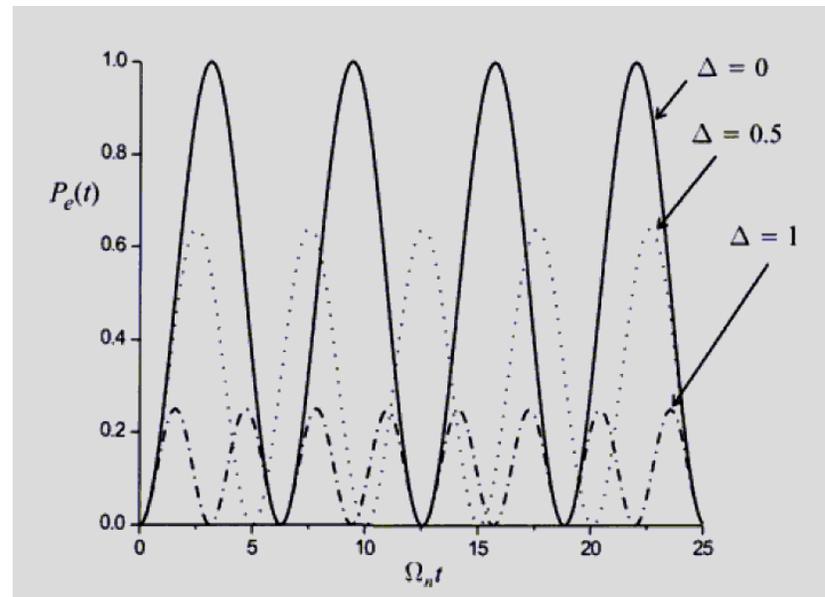
$$p_2(t) = -i \frac{d_{21}^* E_0}{\Omega \hbar} e^{i \frac{\Delta t}{2}} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right),$$

mit $\Delta = \omega_{21} - \omega$; $\Omega = \left(\Delta^2 + \frac{(d_{21}^* E_0)^2}{\hbar^2} \right)^{\frac{1}{2}}$ (\hat{d} - Dipoloperator)

Daraus folgt aber für die Besetzungswahrscheinlichkeit der Niveaus (sogenanntes **Rabi-flopping**):

$$P_1(t) = C \cdot \cos^2\left(\frac{\Omega t}{2}\right)$$
$$P_2(t) = C \cdot \sin^2\left(\frac{\Omega t}{2}\right)$$

also eine quadratische
Abhängigkeit von den
trigonometrischen Funktionen



$$\Delta = \omega_{21} - \omega = 0$$

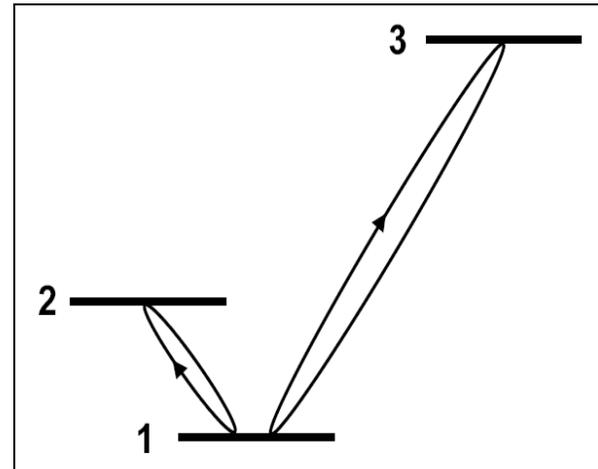
Herleitung im Hinblick auf das Experiment

- Benötigen Drei-Niveau-System

Level 1: Grundzustand

Level 2: Metastabiler Zustand

Level 3: Dipolübergang (ausschließlich zwischen 1 und 3)



- Sei Teilchen zur Zeit $\tau=0$ in Level 1
- Störung der Frequenz $\frac{E_2 - E_1}{\hbar}$
- Wohldefinierte Rabi-Frequenz Ω

$P_1(\tau)$ ($P_2(\tau)$) Wahrscheinlichkeit, dass Teilchen zur Zeit τ in Zustand 1 (2) ist.

Sei Teilchen zur Zeit $\tau = 0$ in Zustand 1 präpariert :

$$P_1(\tau) = \cos^2\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right)$$

$$P_2(\tau) = \sin^2\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right)$$

Für kleine Zeiten ($\Omega\tau \ll 1$) lassen sich die Ausdrücke entwickeln:

$$P_1(\tau) \approx 1$$

$$P_2(\tau) \approx \frac{1}{4}\Omega^2\tau^2$$

Nach n Messungen in $\frac{\pi}{n\Omega}$ Abständen, erhalten wir :

$$P_2(\tau) = \frac{1}{2}\left[1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right)\right] \rightarrow \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} P_2(\tau) = 0}$$

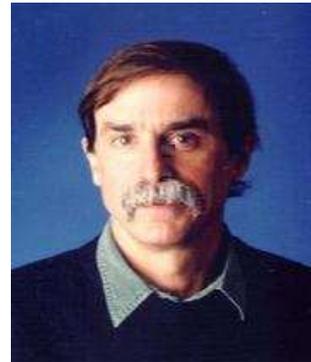
- Wir entwickeln für große n:

$$P_2(T) = \frac{1}{2} \left[1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right) \right] \approx \frac{1}{2} \left[1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{n}\right)^2 \right)^n \right] = \frac{1}{2} \left(1 - e^{\frac{-\pi^2}{2n}} \right)$$

- Wie wir sehen, geht die Wahrscheinlichkeit für unendlich häufige Messungen innerhalb des Zeitraums T gegen 0, d.h. der **Zustand zerfällt nicht**.
- **FRAGE: Wie können wir das messen?**
- Probleme:
 - Sehr kurzes τ mit quadratischer Abhängigkeit im Vergleich zur benötigten Messzeit
 - Können ein Atom / Ion nur sehr schwierig vermessen

Das Experiment

- Von Cook 1989 vorgeschlagen:
Messung an einem einzelnen Ion, das einen induzierten Übergang zwischen Level 1 und 2 durchführen soll.
- Im gleichen Jahr führen Itano, Heinzen, Bollinger und Wineland am NIST ähnliches Experiment durch



5000 ${}^9\text{B}^+$ Ionen werden in einer zylinderförmigen **Penning - Falle** gefangen.

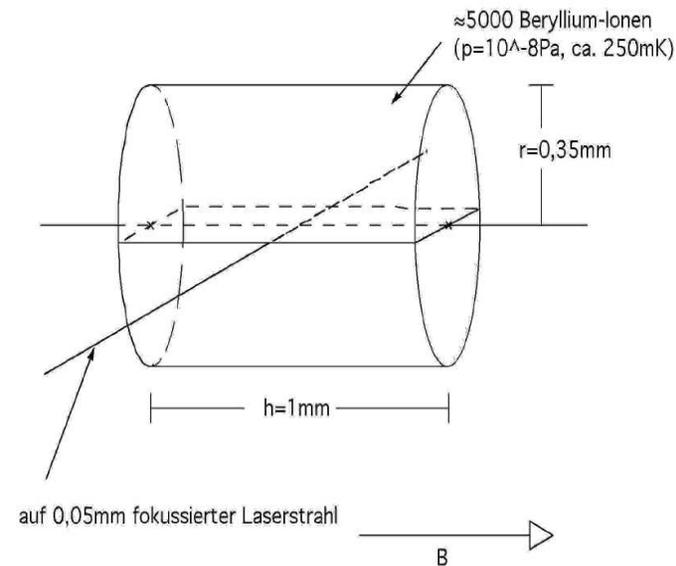
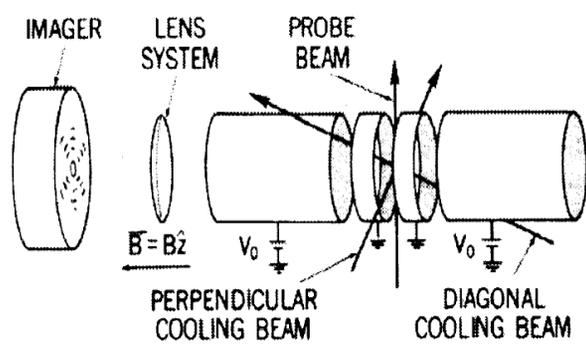
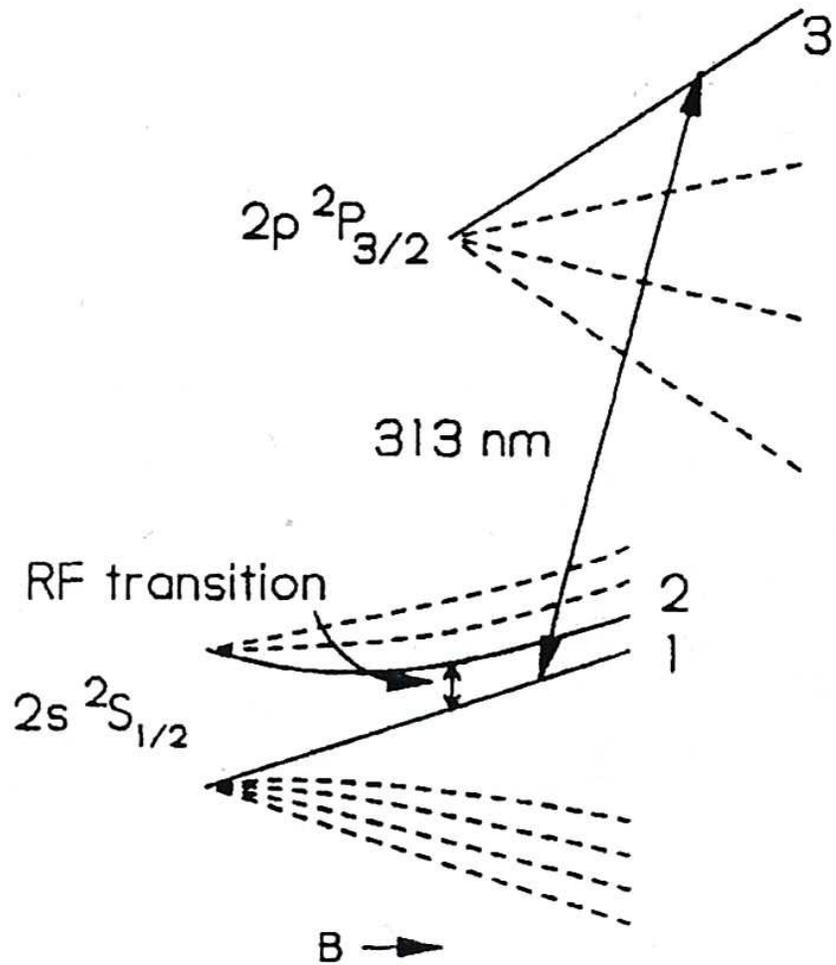


FIG. 1. Schematic drawing of the trap electrodes, laser beams, and imaging system (not to scale). The overall length of the trap is 10.2 cm. The trap consists of two end cylinders and two electrically connected central cylinders with 2.5-cm inner diameters. Ion clouds are typically less than 1 mm in both diameter and axial length. The diagonal cooling beam crosses the cloud at an angle of 51° with respect to the z axis.

Folgende Übergänge
werden verwendet:



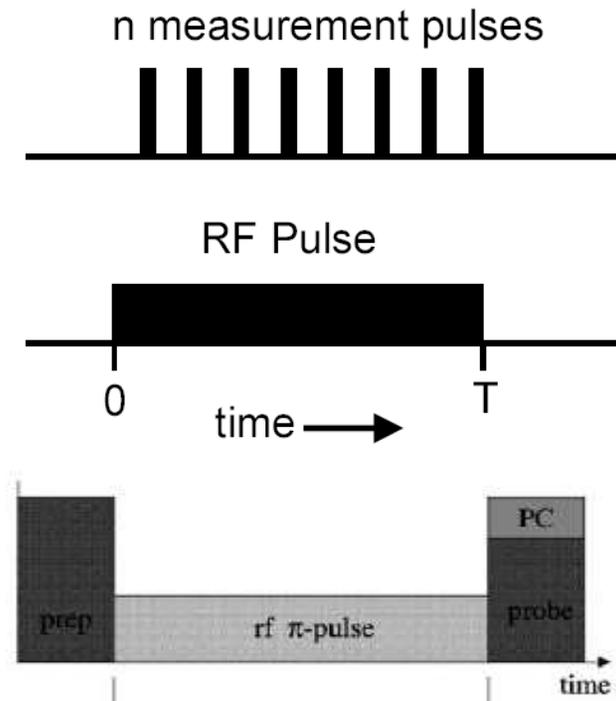
- $1 \leftrightarrow 2$ Radiofrequenz-
Übergang,
strahlungslos
- $1 \leftrightarrow 3$ Dipolübergang der
Frequenz $\frac{E_3 - E_1}{\hbar}$
(kein spontaner Zerfall)
- $2 \leftrightarrow 3$ unmöglich(nach
Auswahlregeln)

Experiment besteht aus **6 Schritten**:

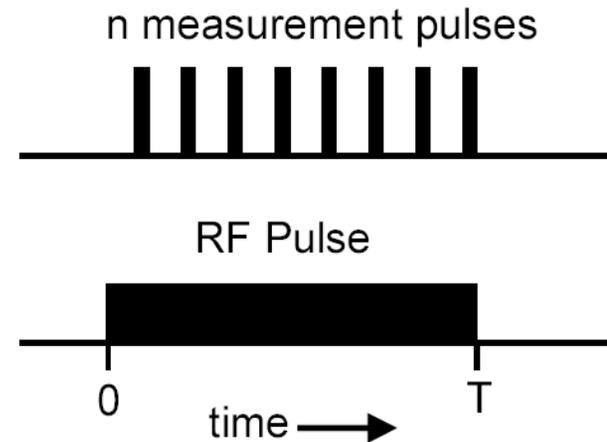
- 5s Anwendung einer **313nm**-Laser-Strahlung, die die meisten Ionen in Level 1 pumpt und Level 2 leert.
- Ausschalten der 313nm-Strahlung

1. Anschalten eines Radiofrequenz-Feldes für **T=256ms** (resonanter π -Puls)

- Während dieses Pulses werden n Pulse (313nm) der Länge **t=2,4ms** angewandt.



5. Abschalten des π -Pulses, Anwendung der 313nm-Strahlung
6. Während 100ms werden die **Photonen gezählt**, die gestreut werden.
 - Das Signal der Photonen ist ungefähr proportional den in Level 1 verbleibenden Ionen
 - Daraus kann geschlossen werden, wie viele Ionen einen Übergang ausgeführt haben



Das Experiment wird für **$n = 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64$** durchgeführt

Ergebnisse

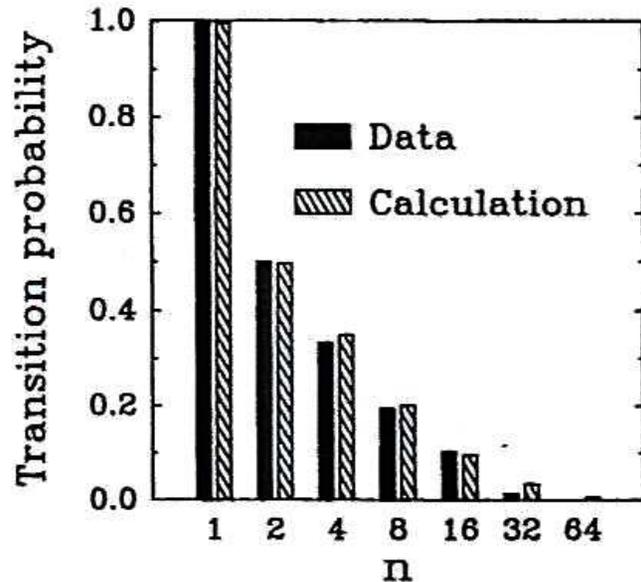


Abb.1: Transition 1 \rightarrow 2

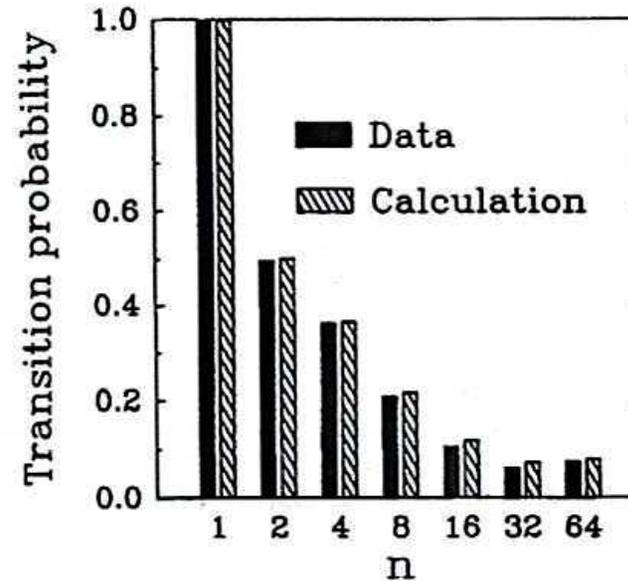


Abb.2: Transition 2 \rightarrow 1

Berechnete und gemessene Werte

- Messfehler:
 - Schwankung des Magnetfeldes
 - Hintergrundzählrate und Totzeit des Detektors
 - Optisches Pumpen während der Messungen

Interpretation der Ergebnisse

- Erreichen mit der gewählten Methode eine fast ideale, projektive quantenmechanische Messung
- Mit der Anzahl der Messungen, d.h. Erhöhung der Messfrequenz, sinkt die Wahrscheinlichkeit, das Ion in Level 2 zu finden
- Das Nichtstreuen von Photonen stellt eine Messung dar:

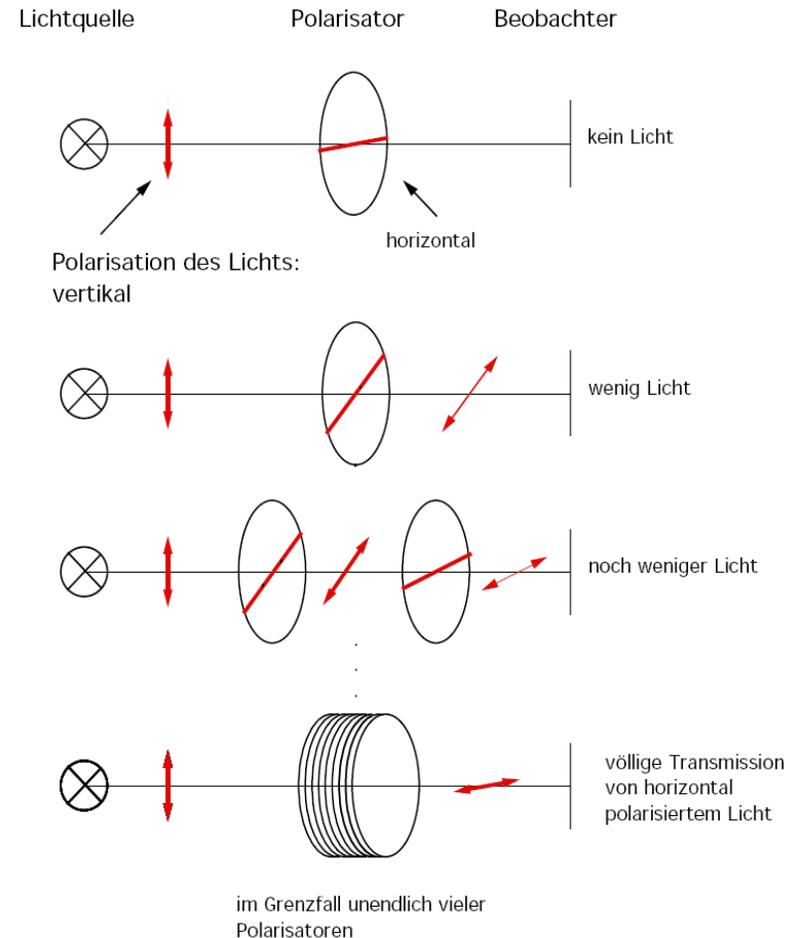
Nullmessung \longrightarrow Wellenfunktion kollabiert

Trotzdem:

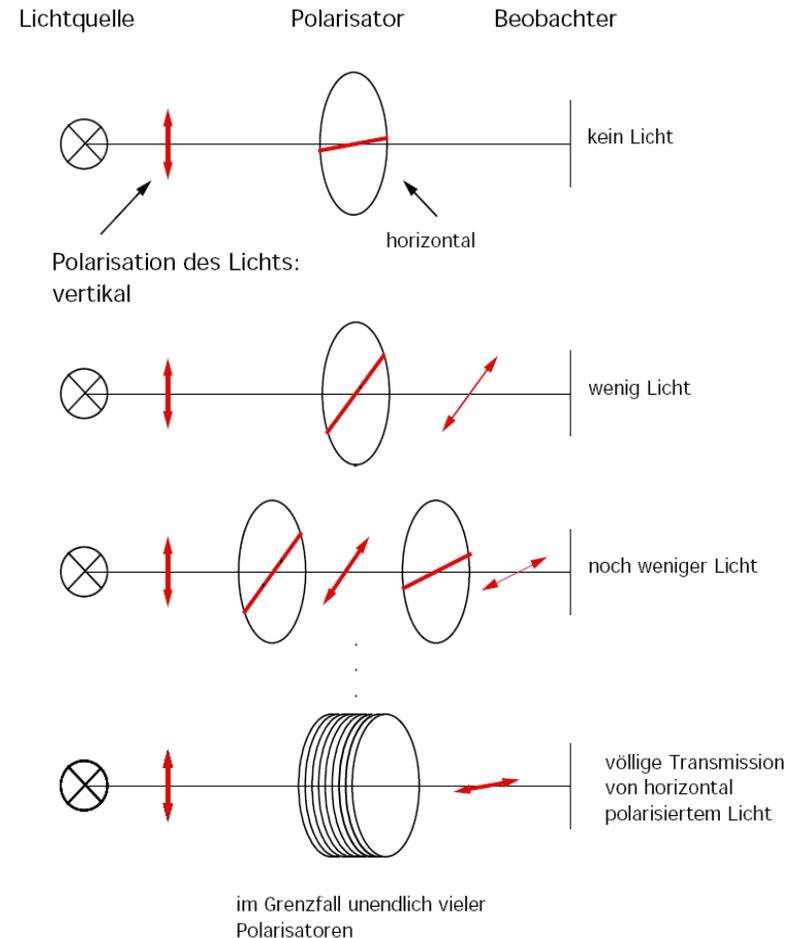
- Experiment misst nicht an einem einzigen Ion und keinen spontanen Übergang, sondern durch äußeres Feld induzierten
- Nichtideale Messungen erlauben eine Evolution der Wellenfunktion zwischen den Wellenfunktionskollapsen

Optischer Quanten-Zeno-Effekt

- Betrachten Photon mit senkrechter Polarisation
- Falls wir mit einem horizontalen Polarisator messen, kommt kein Licht durch
- Stellen nun n Polarisatoren auf, die jeweils um $\Delta\Phi$ gedreht sind
- Jeder Polarisator stellt eine quantenmechanische Messung dar, die den Zustand auf die Polarisationsrichtung projiziert



- Bei jeder Messung werden einige Photonen absorbiert
- Im Grenzfall von unendlich vielen Polarisatoren, die um $d\Phi$ gedreht sind, geht die Transmission gegen 1, d.h. am Ende erhält man das Licht horizontal polarisiert
- **Fazit:** Durch kontinuierliche Messung kann die Polarisation gedreht werden

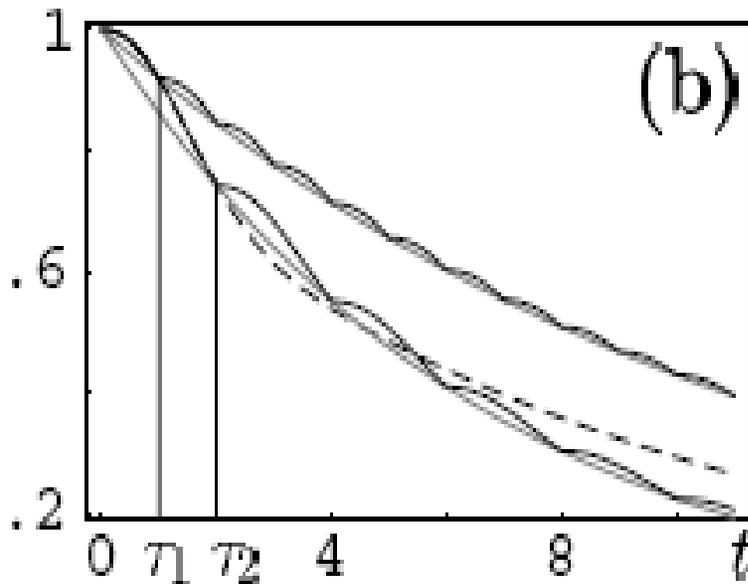


Anti-Zeno-Effekt

- Gegensatz zum Zeno-Effekt: Durch Messungen in größeren Abständen als der Zeno Zeit kann der Zerfall eines instabilen Systems beschleunigt werden
- Nachweis dieses Effektes an einem instabilen System im Jahr 2001 durch Raizen et al.

Résumé

- Messungen (vernachlässigbarer Dauer) lassen die Wellenfunktionen kollabieren
- Für die Entwicklung der Wahrscheinlichkeit in der Zeit ergibt sich:



Unterbrochene Linie:
Wahrscheinlichkeit ohne
Messung

Durchgezogene Linien:
Wahrscheinlichkeiten
mit Messungen in
verschiedenen Abständen τ

Diskussion

- Wechselwirkung zwischen Apparatur und Quanten-System?
 - Art des Experiments
 - Berücksichtigung der Stärke der Wechselwirkung
 - Präzision der Messanordnung
 - Frequenz der Messung
- Ist eine kontinuierliche Messung aus theoretischer Sicht umsetzbar?
- Wie ist eine ideale Messung zu definieren?

Entwicklungen und Ausblick

- 2002 wird der Zeno-Effekt an einem einzigen Ion gemessen
- 2004 wird die Zeno-Zeit von Wasserstoff mit einer Genauigkeit von 0,01fs gemessen
- Der Effekt wird im Hinblick auf seine Anwendungen im Bereich der Quanteninformation untersucht
- Weitere Experimente zur genauen Messung der Zeno-Zeit sind geplant

Zusammenfassung

- Durch kontinuierliche Messung an einem System wird das Kurzzeit-Verhalten nachhaltig beeinflusst:
 - Zerfall wird **beschleunigt** (Zeno-Effekt)
oder
 - **verlangsamt** (Anti-Zeno-Effekt)
 - Z.B. kann Lebensdauer eines Teilchens modifiziert werden durch effektive Zerfallsrate
 - Optisches Analogon zeigt, dass Erwartungswert einer Größe durch kontinuierliche Messung geändert wird
- Diese Effekte konnten an einem einzigen Teilchen nachgewiesen werden!

Verwendete und weiterführende Literatur

- Wayne M. Itano, D.J. Heinzen, J.J. Bollinger and D.J. Wineland, Phys. Rev. A 41, 2295 (1990)
- R.D. Cowan, The theory of atomic structure and spectra, University of California Press, 1981
- M.C. Fischer, B. Gutiérrez-Medina and M.G. Raizen, Phys. Rev. Letters, vol. 87, No.4, (2001)
- W. Nolting, Grundkurs Theoretische Physik 5/2, Quantenmechanik 1, Grundlagen, Springer Verlag, 2004
- P. Facchi, H. Nakazato, and S. Pascazio, Phys. Rev. Letters, vol. 86, No. 13, 2699 (2001)
- H. Fearn, W.E. Lamb, Jr., Phys. Rev. A 46, 1199 (1992)
- Gilbert, Bollinger, Wineland, Phys. Rev. Lett. 60, No 20, 2022 (1988)
- Diverse weitere Phys. Rev. Artikel
- Bergmann/Schaefer, Struktur der Materie, W. Demtröder, Einführung in die Laserspektroskopie
- Haken, Wolf, Atom- und Quantenphysik, Springer Verlag

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit

Ende der Präsentation