

1.4. Die Wahrscheinlichkeitsinterpretation

1.4.1. Die Heisenbergsche Unschärferelation

Wie kann der Welle-Teilchen-Dualismus in der Quantenmechanik interpretiert werden?

$|\psi(r)|^2$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, ein Teilchen an einem bestimmten Ort zu finden.

$$\psi(r) \text{ Wahrscheinlichkeitsamplitude}$$

Die Wahrscheinlichkeitsinterpretation erfordert:

$$\int |\psi(r)|^2 d^3r = 1 \quad \text{Normierung der Wellenfunktion}$$

Man schreibt das Wellenpaket als:

$$\psi(r) = \int \phi(p) e^{i(pr - Et/\hbar)} \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^{3/2}}$$

↑ Wahrscheinlichkeitsamplitude ↑ Wahrscheinlichkeitsverteilung f. Impuls ↑ Normierung

$\psi(r)$ und $\phi(p)$ sind Fouriertransformierte voneinander.

→ Vollständig äquivalente Beschreibung des Zustandes eines physikalischen Systems durch $\psi(r)$ oder $\phi(p)$
Ortsraum (-bild) Impulsraum (-bild)

Aus den Eigenschaften der Fouriertransformation folgt:

$$\int \psi^*(x)\psi(x) dx = \int \phi^*(p_x)\phi(p_x) dp_x = 1$$

Mit den Wahrscheinlichkeitsverteilungen können Mittelwerte der Momente x^n und p_x^n berechnet werden (hier: Beispiel eindimensionaler Fall)

$$\langle x^n \rangle = \int \psi^*(x)x^n\psi(x) dx$$

$$\langle p_x^n \rangle = \int \psi^*(p_x)p_x^n\psi(p_x) dp_x$$

Beispielsweise ergibt sich für $\langle x \rangle(t)$: $\langle x \rangle(t) = \langle x_0 \rangle + v_0 t$

konstant bei freiem Teilchen

oder für die Varianz:

$$\begin{aligned}(\Delta x)^2 &= \langle x^2 \rangle(t) - (\langle x \rangle(t))^2 \\ &= (\Delta x)_0^2 + \kappa_1 t + (\Delta v)^2 t^2\end{aligned}$$

Konstante ≥ 0

konstant bei freiem Teilchen

Die obige Gleichung beschreibt das Zerfließen eines Wellenpaketes.

Zahlenbeispiel:

Elektron mit $\Delta x_0 \approx 10^{-10} \text{ m}$
 $\Delta x \approx 600 \text{ km}$ nach 1 Sekunde

Masse von 1 g und $\Delta x_0 \approx 1 \text{ mm}$
 $\Delta x = 2\Delta x_0$ nach 10^{15} Jahren

Das Zerfließen ist für makroskopische Objekte vernachlässigbar.

Aus den Eigenschaften der Fouriertransformation folgt unmittelbar für die Varianz

Δx Und Δp_x :

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar/2$$

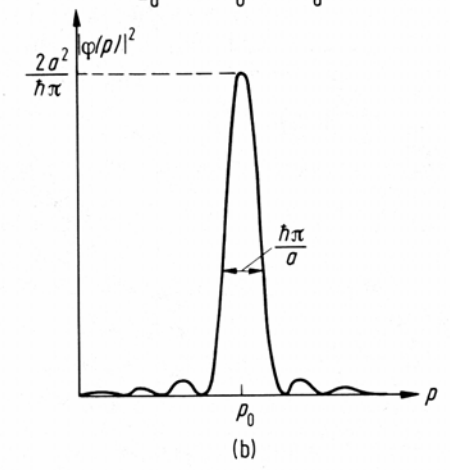
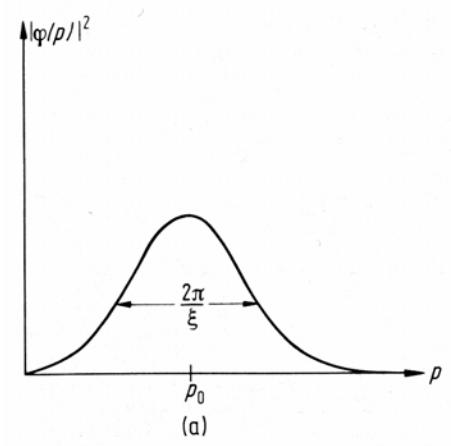
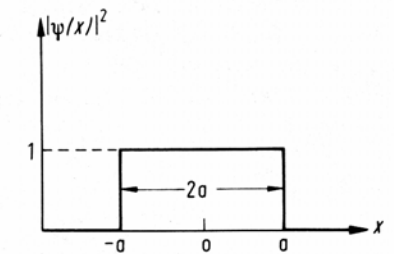
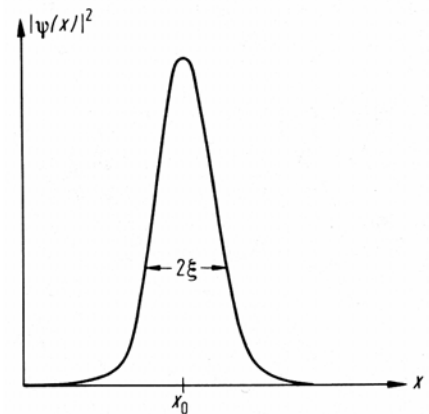
$$\Delta y \Delta p_y \geq \hbar/2$$

$$\Delta z \Delta p_z \geq \hbar/2$$

Heisenbergsche
Unschärferelation

Das Gleichheitszeichen gilt für
Gaußsche Wellenpakete!

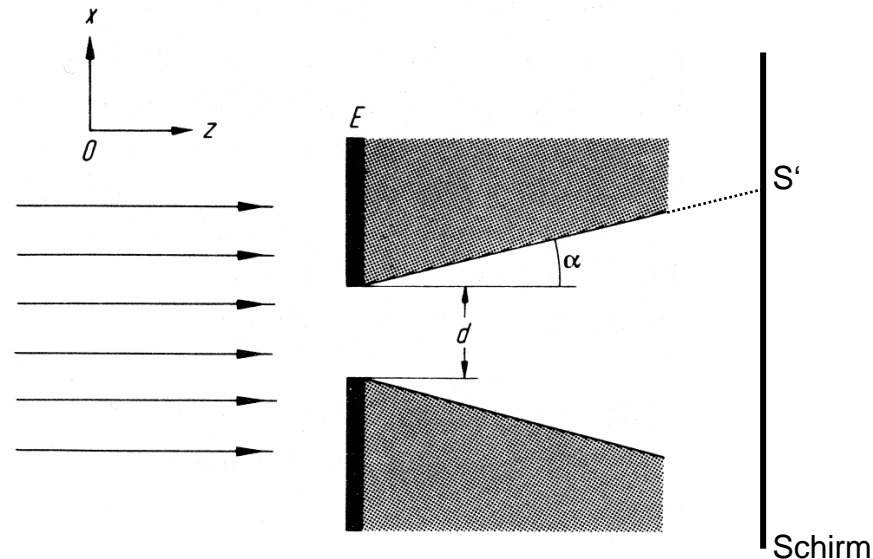
Einem Teilchen können nicht
gleichzeitig ein genau definierter Ort
und ein genau definierter Impuls
zugewiesen werden!



Breite eines Wellenpaketes im x- und p-Raum für
Gaußsches Paket (links) und Rechteckpaket (rechts)

1.4.2. Unschärferelation und Messung

Ortsmessung mit einer Blende:



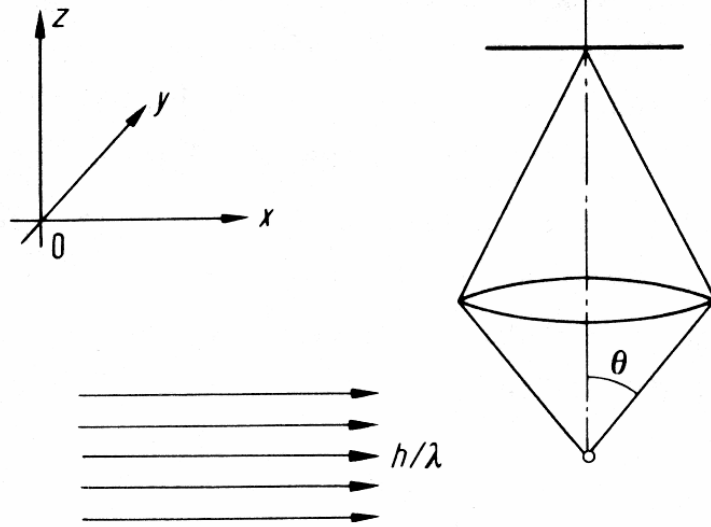
Zuordnung einer de Broglie Wellenlänge: $\lambda = h/p$

Beugungserscheinung: $\sin \alpha = \lambda/d = \frac{h}{p\Delta x}$

$$\Delta p_x \Delta x \approx p \sin \alpha \Delta x = h$$

Bemerkung: Man kann natürlich im Auftreffpunkt S' p über den Impulsübertrag auf den Schirm messen, nicht aber S' und p beliebig genau voraussagen, bevor das Teilchen aufgetroffen ist.

Ortsmessung mit einem Mikroskop:



Impulsübertrag in x-Richtung nach der Streuung von einem Photon:

$$\Delta p_x \approx (h/\lambda) \sin \theta$$

Ortsauflösung nach Rayleigh:

$$\Delta x \approx \frac{\lambda}{\sin \theta}$$

somit $\Delta x \Delta p_x = h$

d.h. nach der Detektion des Photons hat das Teilchen eine Orts/Impulsunschärfe, die der Heisenbergschen Unschärferelation genügt!

Ähnliche Überlegungen gelten für alle anderen experimentellen Konfigurationen.

1.4.3. Messprozess und Komplementarität

Wellenfunktion vor
der Messung

$$\psi_0(r, t)$$

Messung
(z.B. von r)



Wellenfunktion nach
der Messung

$$\tilde{\psi}(r = r_0, t)$$

Unmittelbar nach der Messung ist r genau bekannt, aber i.A. ist dann auch $\tilde{\psi} \neq \psi_0$
Die Messung der zu r komplementären Variablen p verändert r zwangsläufig.

„Ergebnisse von Beobachtungen, die unter verschiedenen experimentellen Bedingungen gemacht werden, können nicht notwendig in einem einheitlichen Bild zusammengefasst werden.“

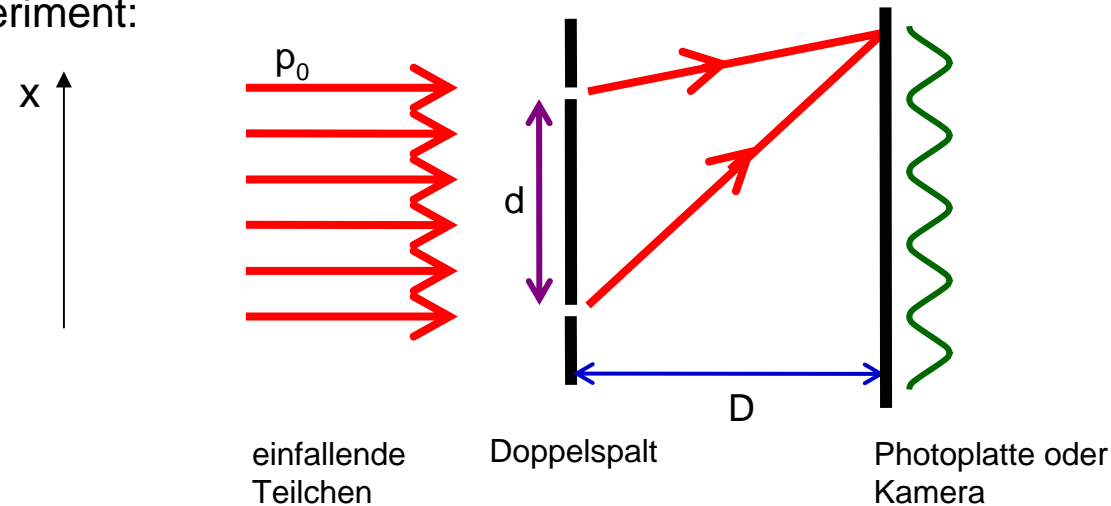
Ursache: Nichtvertauschbarkeit der Operatoren x und p  Theorielehrbücher

Fragestellung:

- Was bedeutet die Wellenfunktion $\psi(r, t)$ wirklich?
- Ist die Beschreibung der Naturvorgänge durch die Quantentheorie vollständig?
- Lassen sich die statistischen Aussagen der Quantentheorie durch verborgene Parameter erklären?

Welle-Teilchen-Dualismus im Licht der Komplementarität

Das Doppelspaltexperiment:



Welle- und Teilcheneigenschaft sind zwei komplementäre Aspekte, die bei unterschiedlichen Versuchsanordnungen zu Tage treten.

Impulsübertrag auf den Spalt: $\Delta p_x \approx p_0 \frac{d}{D} = \frac{h}{\lambda} \frac{d}{D}$

Damit noch Interferenzstreifen sichtbar sind muss gelten: $\Delta x < \lambda \frac{d}{D}$

→ $\Delta x \Delta p_x < h$ nicht möglich!

Welcher-Weg-Information zerstört die Interferenz!

Energie-Zeit-Unschärfe

Eine Fourierbeziehung besteht auch zwischen der Zeit und der Frequenz.

Zeitlicher Verlauf einer Welle \longleftrightarrow Spektrum

Daraus lässt sich mit $\omega = E/\hbar$ die Beziehung

$$\boxed{\Delta t \Delta E \geq \hbar} \quad \text{ableiten.} \quad \mathbf{E} \text{ und } \mathbf{t} \text{ sind } \underline{\text{keine}} \text{ komplementären Größen!}$$

Die Beziehung verknüpft die Variation der dynamischen Variablen $E(t)$ mit einer für die Veränderung charakteristischen Zeit Δt .

Wichtige Anwendung: Breite der Energieniveaus nicht stationärer Zustände, z.B. von angeregten Zuständen im Atom:

$$\Delta \nu \approx \Delta E / \hbar \approx 1 / \tau \quad \text{z.B. } 100 \text{ MHz bei } \tau = 10^{-8} \text{ s}$$

Natürliche Lebensdauer

1.5. Grundprinzipien der Quantenmechanik

„In a nutshell“ und in der Formulierung mit Wellenfunktionen

Physikalische Größen

Der Zustand eines physikalischen Systems ist durch die Wellenfunktion ψ vollständig bestimmt.

Jeder physikalischen Größe kann eine Observable \hat{A} zugeordnet werden.

\hat{A} ist ein linearer, hermitescher Operator.

Observables corresponding to common physical quantities

Physical quantity A	Observable \hat{A}
Position x, y, z, \mathbf{r}	Multiplication by x, y, z, \mathbf{r}
Momentum $p_x, p_y, p_z, \mathbf{p}$	$\hat{p}_x = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}, \quad \hat{p}_y = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial y}, \quad p_z = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial z},$ $\mathbf{p} = \frac{\hbar}{i} \nabla$
Kinetic energy $E_k = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}$	$\hat{E}_k = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta$
Potential energy $V(\mathbf{r})$	Multiplication by $V(\mathbf{r})$
Total energy $E = E_k + V(\mathbf{r})$	$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\mathbf{r})$
Angular momentum $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$	$\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}} = \frac{\hbar}{i} \mathbf{r} \times \nabla$

Der Erwartungswert der Observablen \hat{A} ist

$$\langle \hat{A} \rangle = \int \psi^* \hat{A} \psi d^3r = \int \psi \hat{A}^\dagger \psi^* d^3r$$

hermitescher Operator!

Observablen kommutieren nicht notwendigerweise.

Zum Beispiel gilt für den Orts- und Impulsoperator:

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = [\hat{p}_i, \hat{p}_j]$$

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}$$

Nichtkommutativität führt zu einer Unschärfebeziehung:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar/2$$

$$\Delta y \Delta p_y \geq \hbar/2$$

$$\Delta z \Delta p_z \geq \hbar/2$$

Messungen

Für die Eigenfunktion $\psi_a(r, t)$ eines Operators \hat{A} zum Eigenwert a gilt:

$$\hat{A}\psi_a(r, t) = a\psi_a(r, t)$$

Eigenwerte hermitescher Operatoren sind reell.

Die Messung einer Observablen \hat{A} zu einem Zeitpunkt t ergibt den Wert a mit Sicherheit dann und nur dann, wenn sich die Wellenfunktion in dem Eigenzustand $\psi_a(r, t)$ befindet.

Ergibt die Messung einer Observablen \hat{A} den Wert a , so befindet sich das System unmittelbar nach der Messung im Eigenzustand $\psi_a(r, t)$.

—————> Projektion

Die Wahrscheinlichkeit, für eine Observable \hat{A} den Wert a zu messen, wenn sich das System im Zustand $\psi(r, t)$ befindet ist:

$$p_a = \frac{\int \psi_a^*(r, t)\psi(r, t)}{\int \psi^*(r, t)\psi(r, t)}$$

Der Erwartungswert der Variablen \hat{A} für ein System im Zustand $\psi(r, t)$ ist:

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_{\alpha} p_{\alpha} a_{\alpha}$$

Zeitentwicklung

Die Zeitentwicklung der Wellenfunktion $\psi(r, t)$ beschreibt die Schrödingergleichung:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(r, t) = \hat{H} \psi(r, t)$$
$$\hat{H} = \frac{1}{2} \frac{\hat{p}^2}{m} + V(r) = \frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(r)$$

Die Zeitentwicklung eines stationären Zustandes ist:

$$\psi_{\alpha}(r, t) = \psi_{\alpha}(r) e^{-i \frac{E_{\alpha}}{\hbar} t} \quad \text{mit} \quad \hat{H} \psi_{\alpha}(r, t) = E_{\alpha} \psi_{\alpha}(r, t)$$

$$\text{und} \quad |\psi_{\alpha}(r, t)|^2 = |\psi_{\alpha}(r)|^2$$