Prof. Dr. P. Uwer, Dr. U. Langenfeld
AG Phänomenologie der Elementarteilchenphysik
Institut für Physik

Übungen zur Fortgeschrittenen Quantentheorie (P9)

WS 09/10 | **Blatt 2** | **Abgabe: 04. 11. 2009**

Aufgabe 4: Impulsoperator als Erzeuger von Verschiebungen

a) Zeigen Sie, daß gilt: $(\hat{P}_a\psi)(x) \equiv (\mathrm{e}^{\mathrm{i}a\hat{p}}\psi)(x) = \psi(x+a)$ mit $\hat{p} = -\mathrm{i}\partial_x$.

b) Verallgemeinern Sie die Wirkung dieses Operators auf Funktionen ψ, die von n Koordinaten abhängen: $\psi = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

(2 Punkte)

Aufgabe 5: Eichinvarianz der Schrödingergleichung

Die Wellenfunktion eines skalaren Teilchens der Masse m und Ladung q im elektromagnetischen Feld genügt der Schrödingergleichung mit

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - q\vec{A}(\vec{x},t)\right)^2 + q\Phi(\vec{x},t), \tag{1}$$

wobei Φ und $\vec{A}$ das skalare bzw. das Vektorpotential bezeichnen.

a) Transformieren Sie die Potentiale und die Wellenfunktion wie folgt:

$$\vec{A} \mapsto \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} f(\vec{x},t), \quad \Phi \mapsto \Phi' = \Phi - \partial_t f(\vec{x},t), \quad \psi \mapsto \psi' = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}q}{\hbar} f(\vec{x},t)}\psi(\vec{x},t)\,. \tag{2}$$

Zeigen Sie, daß die Schrödingergleichung unter diesen Transformationen invariant (eichinvariant) ist. Tip: Beweisen Sie zuerst die Identität $\mathrm{e}^{f(y)}\partial_y = (\partial_y - f'(y))\mathrm{e}^{f(y)}$.

b) Aus der freien Schrödingergleichung folgt

$$\partial_t\psi^*\psi + \vec{\nabla}\tfrac{\hbar}{2m\mathrm{i}}\left[\psi^*(\vec{\nabla}\psi) - (\vec{\nabla}\psi^*)\psi\right] = 0, \tag{3}$$

was als Kontinuitätsgleichung wie folgt geschrieben werden kann:

$$\partial_t\rho + \vec{\nabla}\vec{j} = 0 \quad \text{mit} \quad \rho(\vec{x},t) = \psi^*\psi \quad \text{und} \quad \vec{j}(\vec{x},t) = \tfrac{\hbar}{2m\mathrm{i}}\left[\psi^*(\vec{\nabla}\psi) - (\vec{\nabla}\psi^*)\psi\right]. \tag{4}$$

Zeigen Sie, daß

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{2mi}\left[\psi^*(\vec{\nabla}\psi) - (\vec{\nabla}\psi^*)\psi - \tfrac{2\mathrm{i}q}{\hbar}\vec{A}(\vec{x},t)\psi^*\psi\right] \tag{5}$$

die Kontinuitätsgleichung für $\vec{A} \neq 0$ erfüllt.

c) Zeigen Sie die Eichinvarianz von $\vec{j}$ aus Gl. (5).

(4 Punkte)

Aufgabe 6: Alternative Darstellung des Impulsoperators

Betrachten Sie folgende unkonventionelle Wahl des Impulsoperators in der Ortsdarstellung:

$$\hat{x} \;=\; x, \quad \tilde{p} = -\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + f(x) = \hat{p} + f(x) \;\; . \tag{6}$$

a) Überprüfen Sie die kanonische Kommutatorrelation.

b) Der Wechsel in der oben definierten Operatorzuweisung kann als das Ergebnis einer unitären Transformation der Ortsbasis verstanden werden:

$$|x\rangle \mapsto |\tilde{x}\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}g(x)/\hbar}|x\rangle \;\text{ mit }\; g(x) = \int^x f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{7}$$

Zeigen Sie:

$$\langle\tilde{x}|\hat{x}|\tilde{x}_1\rangle \;=\; x\delta(x-x_1), \tag{8}$$

$$\langle\tilde{x}|\hat{p}|\tilde{x}_1\rangle \;=\; \big[-\mathrm{i}\hbar\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + f(x)\big]\delta(x-x_1). \tag{9}$$

c) Zeigen Sie, daß $\mathrm{e}^{\mathrm{i}qf(\hat{x})/\hbar}$ eine Eichtransformation im Zustandsraum erzeugt, daß also für $|\tilde{\psi}\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}qf(\hat{x})/\hbar}|\psi\rangle$ gilt:

$$\langle\tilde{\psi}|\tilde{\psi}\rangle \;=\; \langle\psi|\psi\rangle \tag{10}$$

$$\langle\tilde{\psi}|\hat{x}|\tilde{\psi}\rangle \;=\; \langle\psi|\hat{x}|\psi\rangle \tag{11}$$

$$\langle\tilde{\psi}|\hat{p}-q\vec{A}|\tilde{\psi}\rangle \;=\; \langle\psi|\hat{p}-q\vec{A}'|\psi\rangle \tag{12}$$

(4 Punkte)