Prof. Dr. P. Uwer, Dr. U. Langenfeld
AG Phänomenologie der Elementarteilchenphysik
Institut für Physik

Übungen zur Fortgeschrittenen Quantentheorie (P9)

WS 09/10	**Blatt 1**	**Abgabe: 28. 10. 2009**

Aufgabe 1: Harmonischer Oszillator in der Operatormethode

Der Hamiltonoperator $\hat{H}$ des eindimensionalen harmonischen Oszillators ist geschrieben in Aufsteige- und Absteigeoperatoren $\hat{a}^+$, $\hat{a}$ gegeben durch

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^+\hat{a} + \frac{1}{2}\right) \quad \text{mit} \quad \hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\hat{p}, \;\; \hat{a}^+ = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\hat{p}, \tag{1}$$

(siehe auch Kap. II.1 der Vorlesung des letzten Semesters). Die Operatoren $\hat{a}^+$ und $\hat{a}$ erfüllen die Kommutatorrelationen $[\hat{a}, \hat{a}^+] = 1$, $[\hat{a}, \hat{a}] = [\hat{a}^+, \hat{a}^+] = 0$.

a) Geben Sie die Matrixelemente der Operatoren $\hat{x}$, $\hat{p}$, $\hat{H}$, $\hat{a}$ und $\hat{a}^+$ in der Energiedarstellung an, berechnen Sie also $\langle n|O|n'\rangle$ für $O = \hat{x}$, $\hat{p}$, $\hat{H}$, $\hat{a}$ und $\hat{a}^+$.

   Benutzen Sie $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$ und $\hat{a}^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$.

b) Stellen sie das Ergebnis in Matrixform dar.

(4 Punkte)

Aufgabe 2: Schrödingergleichung

Die Schrödingergleichung in der darstellungsunabhängigen Form lautet

$$\mathrm{i}\hbar\partial_t|\psi\rangle = H|\psi\rangle. \tag{2}$$

a) Leiten Sie die Ortsdarstellung der Schrödingergleichung her. Sie dürfen $\langle x|p\rangle = \psi_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}px/\hbar}$ verwenden.

b) Berechnen Sie Orts- und Impulsoperator in der Orts- und in der Impulsdarstellung, also $\langle x|O|x'\rangle$ und $\langle p|O|p'\rangle$ für $O = \hat{x}, \hat{p}$.

c) Zeigen Sie, daß die Wellenfunktion im Impulsraum $\langle p|\psi\rangle$ durch die Fouriertransformierte der Wellenfunktion im Ortsraum gegeben ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 3: Projektoren

Gegeben sei der Operator $P_n = |n\rangle\langle n|$, wobei $\{|n\rangle, n = 0, 1\ldots\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem sei.

a) Zeigen Sie: P_n projiziert auf den Zustand $|n\rangle$. Zeigen Sie außerdem:

   $P_n^2 = P_n$, $\sum_n P_n = \mathbb{1}$. Zeigen Sie ferner: Wenn P ein Projektor ist, also $P^2 = P$ gilt, dann ist auch $\mathbb{1} - P$ ein Projektor.

b) Welche Eigenwerte hat P_n?

c) Gegeben sei die Wellenfunktion eines Teilchen $|\psi\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}e^{i\pi}|1\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}|2\rangle$, wobei $|1\rangle, |2\rangle$ Eigenzustände des Hamiltonoperators zu den Energien E_1 und E_2 ($E_1 \neq E_2$) sind.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit bei einer Energiemessung, das System im Zustand $|1\rangle$ zu finden (ebenso für den Zustand $|2\rangle$). Bestimmen Sie den Energiemittelwert für wiederholte Messungen an einem Ensemble, das aus Systemen besteht die jeweils wie $|\psi\rangle$ präpariert sind.

4 Punkte