



Übungen zur Fortgeschrittenen Quantentheorie (P9)

WS 09/10

Blatt 10

Abgabe: 13. 01. 2010

Hinweis!

Das nächste Beratungstutorium findet statt am 11. Jan. 2010, ab ca. 16:45 Uhr im Raum NEW 15, 1'404.

Aufgabe 28: Drei Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen

- Bestimmen Sie im 2^3 -dimensionalen Hilbertraum die Eigenvektoren zum Gesamtspin für ein System aus drei Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen.
- Charakterisieren Sie die Symmetrie der Eigenvektoren zum Gesamtspin bezüglich Teilchenvertauschung.
- Zeigen Sie, daß es für dieses System keine total symmetrischen oder antisymmetrischen Eigenvektoren für den Gesamtspin $\frac{1}{2}$ gibt. Konstruieren Sie dazu den Symmetrisierungs- und den Antisymmetrisierungsoperator, bestehend aus der Summe der Permutationsoperatoren (Vorzeichen beachten) von drei Teilchen.

(4 Punkte)

Aufgabe 29: Überlappen zweier Wellenfunktionen

Betrachten Sie zwei freie identische Fermionen der Masse m in einer Raumdimension. Vernachlässigen Sie den Spinanteil der Wellenfunktion. Die Teilchen seien an den Stellen $\pm a$ lokalisiert und haben die Wellenfunktion $\psi_{\pm}(x) = \sqrt[4]{\beta/\pi} e^{-\beta(x\pm a)^2/2}$. Weiterhin seien die Teilchen gut lokalisiert, also $\beta \gg 1/a^2$.

- Geben Sie die Wellenfunktion des Gesamtsystems an und bestimmen Sie den Energieerwartungswert E . Tip: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\pi/a}$.
- Zeigen Sie, daß es im Falle zweier Fermionen zu einer effektive Abstoßung kommt. Betrachten Sie dazu die Kraft $-\partial E/\partial a$ zwischen den beiden Teilchen.
- Vergleichen Sie mit dem bosonischen Fall.

(4 Punkte)

Aufgabe 30: Zwei identische Teilchen

Betrachten Sie zwei Teilchen mit Bahndrehimpuls $l = 1$ und z -Komponente $m_l = 0$. Die Teilchen wechselwirken untereinander nicht und haben dieselbe radiale Wellenfunktion.

- a) Was sind die möglichen Werte für den Gesamtbahndrehimpuls? Was sind die Wahrscheinlichkeiten, bei einer Messung das System in diesen Zuständen zu finden? Entwickeln Sie dazu den ursprünglichen Zustand $|1, 0\rangle \otimes |1, 0\rangle$ in Eigenfunktionen zum Gesamtbahndrehimpuls. Vernachlässigen Sie den Spin.
- b) Die Teilchen seien Spin- $\frac{1}{2}$ -Fermionen. Was sind mögliche Werte für den Gesamtdrehimpuls (Gesamtspin + Gesamtbahndrehimpuls) und wie sieht die Gesamtwellenfunktion aus?

Tip: Aufgabe 13(c).

(4 Punkte)