Prof. Dr. P. Uwer, Dr. U. Langenfeld
AG Phänomenologie der Elementarteilchenphysik
Institut für Physik

Übungen zur Fortgeschrittenen Quantentheorie (P9)

WS 09/10	**Blatt 11**	**Abgabe: 20. 01. 2010**

Hinweis!

Das nächste Beratungstutorium findet statt am 18. Jan. 2010, ab ca. 16:45 Uhr im Raum NEW 15, 1'404. Die Übungsgruppen am Freitag, den 15. Jan. 2010 fallen aus. Wie bieten folgende Ersatztermine an:

Di, 19.01.2010, 17 - 19 Uhr, Raum NEW 14, 1'09 (Gruppe Langenfeld)

Mo, 18.01.2010, 9 - 11 Uhr, Raum NEW 15, 1'403 (Gruppe Biedermann)

Mi, 20.01.2010, 17 - 19 Uhr, Raum NEW 14, 1'09 (Gruppe Sattler)

Aufgabe 31: Hartree-Gleichung

Der Hamiltonoperator eines Atoms mit N Elektronen der Kernladungszahl Z ist gegeben durch (statischer Kern, Vernachlässigung von Spin-Bahn-Wechselwirkung)

$$H = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\vec{p}_i^{\,2}}{2m} - \frac{Ze^2}{r_i} \right) + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=i+1}^{N} \frac{e^2}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|} \tag{1}$$

mit $H\psi(1,\ldots,N) = E\psi(1,\ldots,N)$. Betrachten Sie den folgenden Ansatz für die Gesamtwellenfunktion $\psi(1,\ldots,N) = \phi_1(1)\phi_2(2)\ldots\phi_N(N)$ mit den Einteilchenzuständen $\phi_i(i) = u_i(\vec{x}_i)\chi_i(m_{s_i})$. Die Einteilchenzustände seien verschieden und orthonormiert.

Der stationäre Zustand soll mittels Variation der Einteichenwellenfunktion bestimmt werden. Ersetzen Sie dazu $u_i^*(\vec{x}_i) \to u_i^*(\vec{x}_i) + \varepsilon\delta u_i^*(\vec{x}_i)$ für ein festes i. Berücksichtigen Sie dabei die Normierung mit einem Lagrange-Multiplikator λ_i. Bestimmen Sie dann die *Hartree-Gleichung*:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_i - \frac{Ze^2}{r_i} + \widetilde{V}_i(\vec{x}_i) \right) u_i(\vec{x}_i) = \lambda_i u(\vec{x}_i) \;\text{ mit }\; \widetilde{V}_i(\vec{x}_i) = \sum_{j\neq i} \int \mathrm{d}^3x_j\, u^*(\vec{x}_j) \frac{e^2}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|} u(\vec{x}_j). \tag{2}$$

(4 Punkte)

Aufgabe 32: N identische Teilchen

Betrachten Sie N identische Teilchen, deren Wechselwirkungen untereinander vernachlässigt wird. Der Gesamthamiltonoperator ist dann die Summe der Einteilchen-Hamiltonoperatoren H_a mit $H_a|i\rangle_a = E_i|i\rangle_a$, $i \geq 1$.

a) Was ist die Energie des Grundzustands, wenn die Teilchen Spin-0-Bosonen bzw. Spin-$\frac{1}{2}$-Fermionen sind?

b) Geben Sie für drei solcher Teilchen den Grundzustand an, ausgedrückt durch die Zustände $|i\rangle|j\rangle|k\rangle$.

(4 Punkte)

Aufgabe 33: Identische Teilchen und Erhaltungsgrößen

Betrachten Sie ein System aus N Teilchen, dessen Hamiltonoperator gegeben ist durch

$$H = \sum_{k=1}^{N} \frac{\vec{p}_k^2}{2m_k} + \frac{1}{2} \sum_{k,l;k\neq l}^{N} V_{k,l}(\vec{r}_k, \vec{r}_l). \tag{3}$$

Die Wahrscheinlichkeitsstromdichte des Teilchens k ist definiert als

$$\vec{J}s_k(\vec{r}_1, \vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N; t) = \frac{\hbar}{2m_k \mathrm{i}} \left(\Psi^* \nabla_k \Psi - \Psi \nabla_k \Psi^* \right), \tag{4}$$

wobei $\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N; t)$ die Gesamtwellenfunktion des Systems sei.

a) Zeigen Sie, daß der Gesamtimpuls und der Gesamtdrehimpuls erhalten sind, wenn nur Wechselwirkungen von der Form $V_{kl}(\vec{r}_k, \vec{r}_l) = V_{kl}(|\vec{r}_k - \vec{r}_l|)$ vorhanden sind. Untersuchen Sie dazu den Kommutator $[H, A]$ mit $A = P, L$.

b) Zeigen Sie, daß die Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(\vec{r}_1, \vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N; t) = |\Psi|^2$ der Kontinuitätsgleichung $\partial_t \rho + \sum_{k=1}^{N} (\vec{\nabla}_k \cdot \vec{J}_k) = 0$ genügt, wobei der Operator $\vec{\nabla}_k$ auf das k-te Teilchen wirkt.

(4 Punkte)