Prof. Dr. P. Uwer, Dr. U. Langenfeld
AG Phänomenologie der Elementarteilchenphysik
Institut für Physik

Übungen zur Fortgeschrittenen Quantentheorie (P9)

WS 09/10 | **Blatt 12** | **Abgabe: 27. 01. 2010**

Hinweis!
Das nächste Beratungstutorium findet statt am 25. Jan. 2010, ab ca. 16:45 Uhr im Raum NEW 15, 1'404.

Aufgabe 34: Tritium-Zerfall

Tritium ^{3}H ist ein Wasserstoffisotop, dessen Kern aus einem Proton und zwei Neutronen besteht. ^{3}H zerfällt durch Umwandlung des Kerns gemäß $^3\mathrm{H} \to {}^3\mathrm{He}^+ + e^- + \bar{\nu}$ in ein Heliumion $^3\mathrm{He}^+$, ein Elektron und ein Antineutrino, wobei ein hochenergetisches Elektron emittiert wird.

a) Geben Sie den Hamiltonoperator vor (H_1) und nach dem Zerfall (H_2) an, wobei die Kernbewegung vernachlässigt wird.

b) Was sind – als Funktion von $\varepsilon = \frac{1}{2}mc^2\alpha^2 = 13.6$ eV mit $\alpha = 1/137$ der Feinstrukturkonstante – die Energieniveaus des Heliumions $^3\mathrm{He}^+$? Bestimmen Sie ferner den Bohrradius und die Grundzustandswellenfunktion des $^3\mathrm{He}^+$.

c) Bestimmen Sie den Erwartungswert $\langle E \rangle$ der Elektronenergie (in eV) des Elektrons nach dem Zerfall, wobei Sie annehmen, daß der Zustand des Elektrons $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} \mathrm{e}^{-r/a}$ (mit $a = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2}$ dem Bohrradius) durch den Zerfall zunächst nicht verändert wird. Benutzen Sie $\langle\psi_0|\frac{1}{r}|\psi_0\rangle = \frac{1}{a}$ sowie $H_2 = H_1 - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}$.

d) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $p(n=1, l=0, m=0)$, das Elektron nach dem Zerfall im Grundzustand zu finden. Warum verschwindet die Wahrscheinlichkeit für Bahndrehimpulse $l \neq 0$? Weiterhin ist $p(n=2, l=0, m=0) = 1/4$, $\sum_{n=3}^{\infty} p(n, 0, 0) = 0.02137$. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, das Elektron in einem gebundenen Zustand zu finden? Berechnen Sie also $\sum_{n=1}^{\infty} p(n, 0, 0)$. Kommentieren Sie das Ergebnis.

(4 Punkte)

Aufgabe 35: Hyperfeinwechselwirkung im Wasserstoffatom

Betrachten Sie ein vereinfachtes Modell der Hyperfeinwechselwirkung zwischen dem Elektron- und dem Protonspin:

$$H = \frac{\vec{p}_e^{\,2}}{2m_e} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} + \lambda(\vec{S}_e \cdot \vec{S}_p) \;\text{ mit }\; \lambda \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Zur Zeit $t = 0$ befinde sich das System im Zustand $|n = 1, l = 0, m = 0\rangle |s_z = \frac{1}{2}\rangle^{(p)} |s_z = -\frac{1}{2}\rangle^{(e)}$.

a) Bestimmen Sie die Zeitentwicklung der Wellenfunktion für einen beliebigen Zeitpunkt $t > 0$.

b) Wie groß ist die zeitabhängige Wahrscheinlichkeit, das Proton im Spinzustand $|s_z = \frac{1}{2}\rangle^{(p)}$ anzutreffen?

c) Berechnen Sie den zeitabhängigen Erwartungswert des magnetischen Dipolmoments $\langle\vec{\mu}\rangle$ mit $\vec{\mu} = \frac{1}{2\hbar}\left(\mu_e \vec{L}_e + g_e \mu_e \vec{S}_e + g_p \mu_p \vec{S}_p\right)$, wobei $\mu_i = \frac{e}{m_i c}$ und g_i der jeweilige Landé-Faktor des Teilchens ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 36: Ein Modell für ein Kohlenwasserstoffmolekül

Einige Farbpigmente bestehen aus linearen Molekülionen, entlang denen Elektronen sich frei bewegen können. Betrachten Sie Moleküle mit der chemischen Formel $(C_N H_{N+2})^-$ mit einer ungeraden Anzahl von Kohlenstoffatomen im gleichen Abstand $d = 0.14\,\text{nm}$ und $N + 1$ Elektronen, die sich in einem eindimensionalen unendlichen Potentialtopf der Länge $L_N = Nd$ unabhängig voneinander bewegen:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le L_N, \\ +\infty, & x < 0 \;\text{ oder }\; x > L_N \end{cases}. \tag{2}$$

a) Zeigen Sie, daß für die Energieniveaus E_n eines einzelnen Elektrons gilt: $E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL_n^2} n^2$, $n \in \mathbb{N}$.

b) Bestimmen Sie für das System aus $N + 1$ Elektronen unter Berücksichtigung des Pauliprinzips die Energien des Grundzustands $E_0^{(N)}$ und des ersten angeregten Zustands $E_1^{(N)}$.
Hinweis: $\sum_{k=1}^{N} k^2 = \frac{1}{6} N(N+1)(2N+1)$.

c) Welche Wellenlänge λ_N haben Photonen, die bei einem Übergang vom Grundzustand in den ersten angeregten Zustand absorbiert werden?

d) Experimentell beobachtet man für $\lambda_9 = 470\,\text{nm}$, $\lambda_{11} = 600\,\text{nm}$ und $\lambda_{13} = 730\,\text{nm}$. Vergleichen Sie die experimentellen Werte mit diesem Modell. Sind die Ionen mit $n \le 7$ und $n \ge 15$ farbig?

(4 Punkte)