Prof. Dr. P. Uwer, Dr. U. Langenfeld
AG Phänomenologie der Elementarteilchenphysik
Institut für Physik

Übungen zur Fortgeschrittenen Quantentheorie (P9)

WS 09/10 | **Blatt 13** | **Abgabe: 03. 02. 2010**

Hinweis!

Das nächste Beratungstutorium findet statt am 02. Feb. 2010 (Di!) ab ca. 16:30 Uhr im Raum NEW 15, 1'404. Abgabe des Übungsblattes bis Donnerstag abend (04.02.2010).

Aufgabe 37: Ein Zweiteilchensystem

Ein System aus zwei Teilchen mit Spin $s_1 = \frac{3}{2}$ und $s_2 = \frac{1}{2}$ wird durch den Hamiltonoperator $H = \alpha\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$, $\alpha \in \mathbb{R}$, beschrieben, wobei die räumlichen Freiheitsgrade vernachlässigt werden. Zur Zeit $t = 0$ befindet sich das System im Zustand $|s_1 = \frac{3}{2}, s_2 = \frac{1}{2}, s_{1,z} = \frac{1}{2}, s_{2,z} = \frac{1}{2}\rangle$.

a) Bestimmen Sie den Zustand des Systems für $t > 0$ in der Basis des Gesamtspins.

b) Was ist die Wahrscheinlichkeit, das System im Zustand $|s_1 = \frac{3}{2}, s_2 = \frac{1}{2}, s_{1,z} = \frac{1}{2}, s_{2,z} = -\frac{1}{2}\rangle$ zu finden?

(4* Punkte)

Aufgabe 38: Wasserstoffatom im elektrischen Feld

Ein Wasserstoffatom im Grundzustand wird durch ein zeitabhängiges elektrisches Feld $\vec{E}_0 e^{-t/\tau}$ gestört. Berechnen Sie mit zeitabhängiger Störungstheorie die Wahrscheinlichkeit, das Atom im Zustand $|n = 2, l = 1, m\rangle$ zu finden.

(4* Punkte)

Aufgabe 39: Wasserstoffatom im elektrischen und magnetischen Feld

Betrachten Sie ein Elektron unter dem Einfluß eines elektrischen und magnetischen Feldes. Berechnen Sie $\langle lm; \frac{1}{2} m_s | H_M | lm; \frac{1}{2} m_s' \rangle$ sowie $\langle lm; \frac{1}{2} m_s | H_E | lm; \frac{1}{2} m_s' \rangle$ mit $H_M = -\frac{q}{2m_e c}\vec{B}(\vec{L} + 2\vec{S})$ und $H_E = -q\vec{E}\vec{x}$.

(4* Punkte)

Aufgabe 40: Lippmann-Schwinger-Gleichung

Die Lippmann-Schwinger-Gleichung lautet

$$|\psi_\pm\rangle = \frac{1}{E - H_0 \pm \mathrm{i}\varepsilon} V |\psi_\pm\rangle + |\phi\rangle \tag{1}$$

mit $|\psi_\pm\rangle \to |\phi\rangle$ für $V \to 0$.

a) Wie lautet die Lippmann-Schwinger-Gleichung im Ortsraum?

b) Definieren Sie $G_\pm(\vec{x},\vec{y}) = \frac{\hbar^2}{2m} \langle x| \frac{1}{E-H_0 \pm \mathrm{i}\varepsilon} |y\rangle$. Zeigen Sie, daß gilt:

$$G_\pm(\vec{x},\vec{y}) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^3} \int \mathrm{d}^3 q \; \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{q}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} \frac{1}{k^2 - q^2 \pm \mathrm{i}\varepsilon} \;\text{ mit }\; q = p/\hbar. \tag{2}$$

c) Zeigen Sie: $G_\pm(\vec{x},\vec{y}) = \frac{1}{4\pi^2 \mathrm{i} |\vec{x}-\vec{y}|} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}q \, \frac{q \mathrm{e}^{iq|\vec{x}-\vec{y}|}}{k^2 - q^2 \pm \mathrm{i}\varepsilon}$.

Für die letzte Integration benutzt man den Residuensatz. Bestimmen Sie dazu die Lage der Pole. Begründen Sie den Integrationsweg aus der Abb. 1. für $G_+(\vec{x},\vec{y})$ und bestimmen Sie die Residuen. Zeigen Sie dann: $G_\pm(\vec{x},\vec{y}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}}{|\vec{x}-\vec{y}|}$.

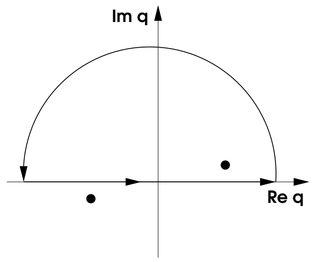

Abbildung 1: Integrationsweg für G_+

d) Zeigen Sie: $G_\pm(\vec{x},\vec{y})$ ist die Greensfunktion der Helmholtzgleichung:
$(\Delta + k^2) G_\pm(\vec{x},\vec{y}) = \delta(\vec{x}-\vec{y})$.

(6* Punkte)