**Prof. Dr. P. Uwer, Dr. U. Langenfeld**
**AG Phänomenologie der Elementarteilchenphysik**
**Institut für Physik**

# Übungen zur Fortgeschrittenen Quantentheorie (P9)

**WS 09/10** | **Blatt 3** | **Abgabe: 11. 11. 2009**

### Aufgabe 7: Drehungen im Spinorraum

Es seien $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ die Paulischen Spinmatrizen. Sie erfüllen die Relation

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + \mathrm{i}\varepsilon_{ijk}\sigma_k, \quad i, j \in \{1,2,3\}, \tag{1}$$

Zeigen Sie:

$$U \equiv \exp\left(\tfrac{1}{2}\,\mathrm{i}\,\phi\,\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\right) = \cos\left(\tfrac{\phi}{2}\right)\mathbb{1} + \mathrm{i}\sin\left(\tfrac{\phi}{2}\right)\vec{n}\cdot\vec{\sigma}. \tag{2}$$

wobei $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$ die Drehachse mit $|\vec{n}| = 1$ und $\phi$ der Drehwinkel sind.

(2 Punkte)

### Aufgabe 8: Drehimpulsoperatoren

Betrachten Sie folgende Operatoren, definiert auf einem Hilbertraum $V^3(\mathbb{C})$:

$$L_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad L_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

a) Welche möglichen Werte erhält man bei einer Messung von $L_z$? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Angenommen, das System befinde sich im Zustand $|L_z = 1\rangle$. Was sind die Erwartungswerte von $L_x$, $L_y$ und $L_x^2$ in diesem Zustand?

c) Berechnen Sie die normierten Eigenzustände und Eigenwerte von $L_x$.

(4 Punkte)

**Aufgabe 9: Paramagnetische Resonanz von Spin - $\frac{1}{2}$- Teilchen**

Das magnetische Moment $\vec{\mu}$ eines Spin $\frac{1}{2}$- Systems mit Masse $M$ sei gegeben als

$$\vec{\mu} = g\frac{|q|}{2M}\vec{S} \quad \text{mit} \quad \vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}. \tag{4}$$

$g$ kann als dynamische Größe interpretiert werden, die aus einem Experiment bestimmt werden muß. Es gibt dann in einem konstanten Magnetfeld $\vec{B}_0$ zwei mögliche Energieniveaus $E_\pm = \hbar\omega_\pm = \pm\hbar\omega_g$ mit $\omega_g = g\frac{|q|B_0}{4M}$. Strahlt man nun ein oszillierendes Magnetfeld $\vec{B}$ ein, so können Übergänge zwischen den beiden Energieniveaus induziert werden.

a) Es sei $\vec{B} = \left(\overline{B}\cos(\overline{\omega}t), \overline{B}\sin(\overline{\omega}t), B_0)\right)$. Stellen Sie die Schrödingergleichung für ein solches Teilchen auf. Ignorieren Sie die räumlichen Freiheitsgrade.

b) Wählen Sie den Ansatz (Variation der Konstanten)

$$\chi(t) = \begin{pmatrix} a(t)e^{-i\omega_g t} \\ b(t)e^{i\omega_g t} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Zeigen Sie, daß damit für $a(t)$ und $b(t)$ gilt ($\overline{\omega}_g = g\frac{|q|\overline{B}}{4M}$):

$$\dot{a}(t) = -i\overline{\omega}_g e^{i(2\omega_g-\overline{\omega})t} b(t), \quad \dot{b}(t) = -i\overline{\omega}_g e^{-i(2\omega_g-\overline{\omega})t} a(t). \tag{6}$$

c) Entkoppeln Sie dieses Differentialgleichungssystem durch nochmaliges Differenzieren und ineinander Einsetzen. Warum genügt es, die Differentialgleichung für $a(t)$ zu lösen? Machen Sie danach folgenden Ansatz für $a(t)$:

$$a(t) = ce^{i\omega t} \tag{7}$$

mit einer beliebigen Konstanten $c$. Bestimmen Sie $a(t)$, $b(t)$. Zeigen Sie, daß für $\omega$ gelten muß:

$$\omega_{1/2} = (\omega_g - \frac{1}{2}\overline{\omega}) \pm \sqrt{(\omega_g - \tfrac{1}{2}\overline{\omega})^2 + \overline{\omega}_g^2}. \tag{8}$$

d) Wählen Sie als Anfangszustand $a(t=0) = 1$ und $b(t=0) = 0$ und bestimmen Sie damit die Konstante $c$ und somit die Gesamtlösung für diese Anfangsbedingungen.

e) Das Teilchen benötige die Zeit $T$, um das Magnetfeld zu durchqueren. Mit welcher Wahrscheinlichkeit klappt der Spin um? Wann ist diese Wahrscheinlichkeit besonders groß?

(6 Punkte)