



Übungen zur Fortgeschrittenen Quantentheorie (P9)

WS 09/10

Blatt 4

Abgabe: 18. 11. 2009

Aufgabe 10:

Gegeben sei der Hamiltonoperator $H = \frac{p^2}{2m}$.

- a) Zeigen Sie, daß man H äquivalent auch schreiben kann als $H = \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2}{2m}$.
- b) Führen Sie durch minimale Substitution $\vec{p} \rightarrow \vec{p} - q\vec{A}$ die Ankopplung an das elektromagnetische Feld durch und bestimmen Sie den Wechselwirkungsterm des Spins mit dem Magnetfeld.

(2 Punkte)

Aufgabe 11: Drehimpulsoperatoren

- a) Überzeugen Sie sich, daß die Spin- $\frac{1}{2}$ -Operatoren in darstellungsunabhängiger Form wie folgt geschrieben werden können:

$$S_x = \frac{\hbar}{2} (|\downarrow\rangle\langle\uparrow| + |\uparrow\rangle\langle\downarrow|) \quad (1)$$

$$S_y = \frac{\hbar}{2} i (|\downarrow\rangle\langle\uparrow| - |\uparrow\rangle\langle\downarrow|) \quad (2)$$

$$S_z = \frac{\hbar}{2} (|\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow|) \quad (3)$$

Für S_x und S_y ist es vorteilhaft, die Darstellung durch Leiteroperatoren S_+ und S_- zu wählen.

- b) Berechnen Sie für $l = \frac{3}{2}$ Matrixdarstellungen für die Drehimpulsoperatoren L_x, L_z und L^2 .

Hinweis: $L_{\pm}|l, m\rangle \equiv (L_1 \pm iL_2)|l, m\rangle = \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)} \hbar |l, m \pm 1\rangle$

(6 Punkte)

Aufgabe 12: Gesamtdrehimpuls

- a) Zeigen Sie für den Gesamtdrehimpulsoperator J :

$$[J^2, J_i] = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4)$$

- b) Gegeben sei ein System aus zwei Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen mit entgegengerichteten Spins. Berechnen Sie für den Gesamtdrehimpuls $J = J_a \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes J_b$:

$$J^2|\uparrow\downarrow\rangle, \quad J_z|\uparrow\downarrow\rangle, \quad J_z|\downarrow\uparrow\rangle. \quad (5)$$

Interpretieren Sie das Ergebnis.

(4 Punkte)