Prof. Dr. P. Uwer, Dr. U. Langenfeld
AG Phänomenologie der Elementarteilchenphysik
Institut für Physik

Übungen zur Fortgeschrittenen Quantentheorie (P9)

WS 09/10 | **Blatt 5** | **Abgabe: 25. 11. 2009**

Wichtiger Hinweis!

Die Vorlesung am Montag, den 30.11.2009, wird vorverlegt auf Freitag, den 27.11.2009, 15.00 Uhr, Hörsaal NEW 14,1'15. Es findet keine Übung statt.

Die Übung wird nachgeholt am Montag, den 30.11.2009, ab 15.00 Uhr (statt Vorlesung):
Gruppe Langenfeld: Raum NEW 14, 1'11,
Gruppe Biedermann: Raum NEW 15, 1'404,
Gruppe Sattler: Raum NEW 14, 1'12.

Aufgabe 13: Kopplung von Drehimpulsen

Gegeben seien die folgenden 2-Teilchenspinsysteme:

$$\frac{5}{2} \otimes 1 \tag{1}$$

$$\frac{3}{2} \otimes \frac{5}{2} \tag{2}$$

$$1 \otimes 1 \tag{3}$$

a) Welche möglichen Werte gibt es für J_{ges} für die Systeme (1) - (3)?

b) Was ist die Dimension der Unterräume, die zu den einzelnen J_{ges} gehören? Überprüfen Sie die Summe der Dimensionen und vergleichen Sie sie mit der Dimension des Produktraums.

c) Finden Sie die Clebsch - Gordan - Koeffizienten für das System (3), d. h. finden Sie die Zerlegung der Eigenzustände von $|J_{\text{ges}}, m, j_a = 1, j_b = 1\rangle$ in die Produktzustände $|j_a = 1, m_a\rangle \otimes |j_b = 1, m_b\rangle$.

   Tip: Gehen Sie so vor, wie in der Vorlesung gezeigt.

(6 Punkte)

Aufgabe 14: Drehungen im Spinraum

In Aufgabe 7 wurde gezeigt: $U \equiv \exp\left(\frac{1}{2}\phi\vec{n}\vec{\sigma}\right) = \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\vec{n}\vec{\sigma}$, wobei $\vec{n}$ die Drehachse mit $|\vec{n}| = 1$ und ϕ der Drehwinkel sind. Es sei jetzt $\vec{n} = e_z$ der Einheitsvektor in z - Richtung. Berechnen Sie $U\sigma_x U^+$ und $U\sigma_y U^+$.

(2 Punkte)

Aufgabe 15: Spindichtematrix

Die Spindichtematrix ρ eines Spin - $\frac{1}{2}$- Systems ist gegeben durch

$$\rho = \frac{1}{2}\left(\mathbb{1} + \vec{P}\vec{\sigma}\right). \tag{4}$$

$\vec{P}$ beschreibt die Richtung der Polarisation.

a) Bestimmen Sie die Erwartungswerte $\langle O\rangle_\rho \equiv \frac{\mathrm{Tr}(\rho O)}{\mathrm{Tr}(\rho)}$ für $O = \mathbb{1}, \vec{\sigma}$.

b) Die Polarisationsachse sei die z - Achse. Was gilt für P_z, wenn das System vollständig (un)polarisiert ist?

Die Spindichtematrix $\rho_{t\bar{t}}$ eines Systems aus $t\bar{t}$ - Paaren ist gegeben durch

$$\rho_{t\bar{t}} = \frac{1}{4}\left(\mathbb{1}\otimes\mathbb{1} + P_i\sigma_i\otimes\mathbb{1} + \overline{P}_i\mathbb{1}\otimes\sigma_i + C_{ij}\sigma_i\otimes\sigma_j\right) \tag{5}$$

mit einer Matrix C.

c) Bestimmen Sie die Erwartungswerte für $O = \mathbb{1}\otimes\mathbb{1}, \sigma_i\otimes\mathbb{1}, \mathbb{1}\otimes\sigma_i, \sigma_i\otimes\sigma_j$.
Es ist $\mathrm{Tr}(A\otimes B) = \mathrm{Tr}(A)\cdot\mathrm{Tr}(B)$.

d) Berechnen Sie die Kovarianz zwischen dem Spin des Top-Quarks und dem Spin des Antitop-Quarks, also $\mathrm{Cov}(\sigma_k\otimes\mathbb{1}, \mathbb{1}\otimes\sigma_l) = \langle\sigma_k\otimes\sigma_l\rangle_\rho - \langle\sigma_k\otimes\mathbb{1}\rangle_\rho\cdot\langle\mathbb{1}\otimes\sigma_l\rangle_\rho$.

(4 Punkte)