Prof. Dr. P. Uwer, Dr. U. Langenfeld
AG Phänomenologie der Elementarteilchenphysik
Institut für Physik

Übungen zur Fortgeschrittenen Quantentheorie (P9)

WS 09/10 | **Blatt 6** | **Abgabe: 02. 12. 2009**

Aufgabe 16: Gestörter Harmonischer Oszillator

Gegeben sei ein „gestörter“ harmonischer Oszillator mit Potential $V = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2(1+\varepsilon)$.

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte bis zur Ordnung ε durch Anwenden der Störungstheorie für nichtentartete Zustände.

b) Vergleichen Sie das Resultat mit der analytischen Lösung.

Jetzt habe das Potential die Form $V = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \varepsilon x^4$.

c) Berechnen Sie die Energiekorrektur durch den Störterm bis zur ersten Ordnung Störungstheorie.

(4 Punkte)

Aufgabe 17: Korrektur zur kinetischen Energie

Der ungestörte Hamiltonoperator eines Elektrons im Feld eines Kerns aus Z Protonen sei gegeben durch $H_0 = \frac{p^2}{2m} + V(r)$ mit $V(r) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r}$. Der Hamiltonoperator erhält einen Korrekturterm zur kinetischen Energie

$$H_1 = -\frac{(\vec{p}^2)^2}{8m^3c^2}. \qquad (1)$$

a) Zeigen Sie, daß sich dieser Zusatzterm durch eine Taylorentwicklung der relativistischen kinetischen Energie $T = \sqrt{c^2\vec{p}^2 + (mc^2)^2} - mc^2$ ergibt.

b) Drücken Sie H_1 durch H_0 aus.

c) Bestimmen Sie mittels Störungstheorie die Korrekturen erster Ordnung ΔE_{nlm}. Benutzen Sie dabei

$$\left\langle \frac{1}{r} \right\rangle = \frac{Z}{an^2}, \quad \left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle = \frac{Z^2}{a^2 n^3 (l+\frac{1}{2})} \quad \text{mit } a = 4\pi\varepsilon_0 \frac{\hbar^2}{me^2}. \qquad (2)$$

d) In der Vorlesung wurde die Korrektur durch die Spin-Bahn-Kopplung für $j = l \pm \frac{1}{2}$ zu $\Delta E^{(LS)}_{nlm} = \frac{mc^2(Z\alpha)^4}{4n^3 l(l+1/2)(l+1)} \begin{pmatrix} l \\ -l-1 \end{pmatrix}$ berechnet. Berechnen Sie die Gesamtkorrektur $\Delta E_{nlm} + \Delta E^{(LS)}_{nlm}$.

(4 Punkte)

Aufgabe 18: Linearer Starkeffekt

In einem elektrischen Feld befinde sich ein Wasserstoffatom. Man betrachte die Korrekturen des dadurch auftretenden Korrekturterms $H_1 = -eEz$ zum mehrfach entarteten Energieeigenwert $E_{n=2}$.

a) Listen Sie alle ungestörten Zustände $|i\rangle$ mit Eigenwert E_2 auf.

b) Bestimmen Sie $\langle i|H_1|j\rangle$. Symmetrieargumente vereinfachen die Rechnungen. Hinweis: Es gibt nur zwei nichtverschwindende Matrixelemente.

c) Diagonalisieren Sie die Matrix $U_{ij} \equiv \langle i|H_1|j\rangle$ und bestimmen Sie die Energiekorrektur $\Delta E_2^{(1)}$ zu $H = H_0 + H_1$.

Hinweis:

$$\psi_{200}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{2a^3}}\left(1-\frac{r}{2a}\right)\exp\left(-\tfrac{r}{2a}\right)Y_{00}, \tag{3}$$

$$\psi_{2lm}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{24a^3}}\frac{r}{a}\exp\left(-\frac{r}{2a}\right)Y_{lm}(\theta,\phi) \tag{4}$$

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos(\theta), \quad Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin(\theta)\exp(i\phi) \tag{5}$$

$$\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n! \tag{6}$$

(4 Punkte)