Prof. Dr. P. Uwer, Dr. U. Langenfeld
AG Phänomenologie der Elementarteilchenphysik
Institut für Physik

Übungen zur Fortgeschrittenen Quantentheorie (P9)

WS 09/10 | **Blatt 7** | **Abgabe: 09. 12. 2009**

> **Hinweis!**
> Das nächste Beratungstutorium findet statt am 07. Dez. 2009, ab ca. 16:45 Uhr im Raum NEW 15, 1'404.

Aufgabe 19: Zeit-Entwicklungsoperator

Die Schrödingergleichung ist eine Differentialgleichung 1. Ordnung in der Variablen t, deshalb ist der Zustandsvektor $\psi(t)$ eindeutig durch $\psi(0)$ festgelegt. Mit Hilfe des Zeitentwicklungs-operators $U(t,t_0)$ kann dies geschrieben werden als $\psi(t) = U(t,t_0)\psi(t_0)$, wobei $U(t,t_0)$ der Differentialgleichung $\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U(t,t_0) = H(t)U(t,t_0)$ genügt. Zeigen Sie:

a) $U(t_0,t_0)$ ist der Einheitsoperator,

b) $U(t,t_0)$ ist ein linearer Operator,

c) $U(t_2,t_1)U(t_1,t_0) = U(t_2,t_0)$,

d) $U(t_0,t) = U(t,t_0)^{-1}$,

e) $U(t,t_0)$ ist ein unitärer Operator.

f) Berechnen Sie $U(t,t_0)$ als formale Lösung der obigen Differentialgleichung für einen zeitunabhänhgigen Hamiltonoperator H. Zeigen Sie durch Einsetzen der Reihenentwicklung der sich ergebenden Exponentialfunktion in die Differentialgleichung, daß die formale Lösung die Differentialgleichung auch tatsächlich löst.

(6 Punkte)

Aufgabe 20: Harmonischer Oszillator im elektrischen Wechselfeld

Ein harmonischer Oszillator mit Masse m und Ladung q befinde sich in einem elektrischen Feld $\vec{E} = E\vec{e}_z\cos(\omega t)$. Berechnen Sie mittels zeitabhängiger Störungstheorie den Erwartungswert des elektrischen Dipolmoments $\langle d\rangle \equiv \langle\psi(t)|qz|\psi(t)\rangle$ mit $\psi(t) = \sum_n c_n(t)|n\rangle$. Der Oszillator befinde sich zur Zeit $t = 0$ (bevor das Feld eingeschaltet wird) im Eigenzustand $|n\rangle$.

a) Drücken Sie $\langle d\rangle$ durch Auf- und Absteigeoperatoren sowie die Eigenzustände des ungestörten H aus.

b) Bestimmen Sie die Entwicklungskoeffizienten der zeitabhängigen Störungstheorie. Vernachlässigen Sie Terme zweiter Ordnung.
Hinweis: $c_n^1(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_n^{(0)}t/\hbar}\left(\delta_{na} - \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_0^t \mathrm{d}t_1\langle n|H_1(t_1)|a\rangle \mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_a^{(0)}-E_n^{(0)})t/\hbar}\right)$

c) Setzen Sie die Koeffizienten in den in Teil (a) berechneten Ausdruck für $\langle d\rangle$ ein und zeigen Sie: $\langle d\rangle = \frac{q^3E}{m(\omega_0^2-\omega^2)}(\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t))$.

(4 Punkte)

Aufgabe 21: Variationsprinzip

Ausgangspunkt des Variationsprinzips ist die Minimierung des Ausdrucks

$$E(\alpha) = \frac{\langle\psi(\alpha)|H|\psi(\alpha)\rangle}{\langle\psi(\alpha)|\psi(\alpha)\rangle} \quad . \tag{1}$$

a) Schätzen Sie für den harmonischen Oszillator die Grundzustandsenergie E_0 ab mit der Testfunktion $\psi(\alpha) = N\exp(-\alpha x^2)$, $\alpha > 0$, und vergleichen Sie mit dem exakten Ergebnis.
Hinweis: $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha x^2)\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi/\alpha}$

b) Es sei $H|i\rangle = (H_0 + H_1)|i\rangle = E_i|i\rangle$. Verwenden Sie als Testfunktion den Zustand $|n_0\rangle = |0\rangle + \varepsilon|1\rangle$, um die Grundzustandsenergie abzuschätzen. Wie hängt die Abschätzung von ε ab? Wie groß ist der Fehler in der Bindungsenergie, falls $\varepsilon = \frac{1}{10}$ ist?

(4 Punkte)