Prof. Dr. P. Uwer, Dr. U. Langenfeld
AG Phänomenologie der Elementarteilchenphysik
Institut für Physik

Übungen zur Fortgeschrittenen Quantentheorie (P9)

WS 09/10 | **Blatt 8** | **Abgabe: 16. 12. 2009**

> **Hinweis!**
> Das nächste Beratungstutorium findet statt am 14. Dez. 2009, ab ca. 16:45 Uhr im Raum NEW 15, 1'404.

Aufgabe 22:

Ein harmonischer Oszillator befinde sich zur Zeit $t = -\infty$ im Zustand $|i\rangle$. Es wirke der Störterm (im Schrödingerbild) $H_1(t) = -eE_z z \mathrm{e}^{-t^2/\tau^2}$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß sich der Oszillator zur Zeit $t = \infty$ im Zustand $|n\rangle$ befindet? Hinweis: $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = \sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-\omega^2/4}$.

(4 Punkte)

Aufgabe 23: Zeitunabhängige als Grenzwert der zeitabhängigen Störungstheorie

Gegeben sei ein Hamiltonoperator $H(t) = H_0 + \mathrm{e}^{t/\tau} H_1$ mit $-\infty < t \leq 0$. Das System befinde sich zur Zeit $t = -\infty$ im Zustand $|i\rangle$, wobei $H_0|i\rangle = E_i|i\rangle$.

a) Berechnen Sie das Übergangsmatrixelement und die Wahrscheinlichkeit, das System zur Zeit $t = 0$ im Zustand $|n\rangle$ vorzufinden.

b) Führen Sie den Limes $\tau \to \infty$ durch und vergleichen Sie das Ergebnis mit der zeitunabhängigen Störungstheorie. Was passiert, wenn das System entartet ist?

c) Berechnen Sie das Übergangsmatrixelement bis zur zweiten Ordnung Störungstheorie für den Fall, daß das System im Zustand $|i\rangle$ bleibt. Hilfe:

$$c(t) = 1 - \frac{\mathrm{i}\tau}{\hbar} V_{ii} \mathrm{e}^{t/\tau} + \left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\right)^2 \frac{1}{2} |V_{ii}|^2 \mathrm{e}^{2t/\tau} \tau^2 + \left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\right) \sum_{m \neq i} \frac{|V_{mi}|^2 \mathrm{e}^{2t/\tau} \tau}{2(E_i - E_m + \mathrm{i}\hbar/\tau)} \qquad (1)$$

d)* Das unter c) erhaltene Ergebnis für $c(t)$ kann man auch in der Form $c = \exp(-\mathrm{i}\Delta t/\hbar)$ mit $\Delta \in \mathbb{C}$ geschrieben werden. Berechnen Sie Δ explizit, indem Sie z. B. $\dot{c}/c$ untersuchen.

Führen Sie den Limes $\lim_{\tau \to \infty}$ (oder $\lim_{1/\tau \to 0}$) aus. Benutzen Sie dabei $\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{x + \mathrm{i}\varepsilon} = \mathrm{P}\frac{1}{x} - \mathrm{i}\pi\delta(x)$, wobei die Hauptwertvorschrift P („principal value") wie folgt definiert ist:

$$\int_a^b f(x) \mathrm{P}\frac{1}{x} = \lim_{\delta \to 0} \left(\int_a^{-\delta} f(x) \frac{1}{x} + \int_\delta^b f(x) \frac{1}{x} \right). \qquad (2)$$

Vergleichen Sie die Zeitentwicklung ausgedrückt durch Δ mit der Zeitentwicklung des freien Systems im Schrödingerbild. Interpretieren Sie $\mathrm{Im}(\Delta)$ bzw. $\mathrm{Re}(\Delta)$ im Vergleich zur zeitunabhängigen Störungstheorie.

(4 + 2* Punkte)

Aufgabe 24: Paramagnetische Resonanz von Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen

Der Hamiltonoperator eines solchen Systems sei gegeben durch

$$H = \frac{gq\hbar}{4M}\left[\begin{pmatrix} B_0 & 0 \\ 0 & -B_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \overline{B}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\overline{\omega}t} \\ \overline{B}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\overline{\omega}t} & 0 \end{pmatrix}\right] \quad . \tag{3}$$

Es gibt dann in einem konstanten Magnetfeld $\vec{B}_0$ zwei mögliche Energieniveaus $E_{\uparrow/\downarrow} = \pm\hbar\omega_g$ mit $\omega_g = g\frac{|q|B_0}{4M}$. Das System befinde sich zum Zeitpunkt $t = -T$ im Zustand $|\uparrow\rangle$. Betrachten Sie den zeitabhängigen Anteil des Hamiltonoperators als Störung und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß sich das System zum Zeitpunkt $t = T$ im Zustand $|\downarrow\rangle$ befindet.
Vergleichen Sie dieses Ergebnis mit dem Resultat aus Aufgabe 9:
$P(\uparrow\rightarrow\downarrow) = \frac{\overline{\omega}_g^2}{(\omega_g-\overline{\omega}/2)^2+\overline{\omega}_g^2}\sin^2\left(\sqrt{(\omega_g-\overline{\omega}/2)^2+\overline{\omega}_g^2}T\right)$ mit $\omega_g = \frac{gq}{4M}B_0$ und $\overline{\omega}_g = \frac{gq}{4M}\overline{B}$.

(4 Punkte)