Prof. Dr. P. Uwer, Dr. U. Langenfeld
AG Phänomenologie der Elementarteilchenphysik
Institut für Physik

Übungen zur Fortgeschrittenen Quantentheorie (P9)

WS 09/10 | **Blatt 9** | **Abgabe: 06. 01. 2010**

Hinweis!
Die Abgabe dieses Übungsblatts ist freiwillig.
Das nächste Beratungstutorium findet statt am 04. Jan. 2010, ab ca. 16:45 Uhr im Raum NEW 15, 1'404.

Aufgabe 25: Harmonischer Oszillator in der WKB-Näherung

In der WKB-Näherung macht man den Ansatz

$$\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x\, p(x) = \pi\hbar\left(n+\frac{1}{2}\right) \quad \text{mit} \quad p(x) = \sqrt{2m(E-V(x))}, \tag{1}$$

wobei das Integral an den klassischen Umkehrpunkten x_1 und x_2 auszuwerten ist.
Bestimmen Sie für den harmonischen Oszillator, $V(x) = \frac{m\omega^2}{2}x^2$, eine Approximation der Energieeigenwerte.

(4* Punkte)

Aufgabe 26: Spinaustauschoperator

Betrachten Sie zwei Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}$ und die Spinoperatoren $\vec{S}_i^{(1)} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}_i^{(1)} \otimes \mathbb{1}$ und $\vec{S}_i^{(2)} = \frac{\hbar}{2}\mathbb{1} \otimes \vec{\sigma}_i^{(2)}$.

a) Zeigen Sie, daß der Operator $P_\sigma = \frac{1}{2}(1 + \sum_i \vec{\sigma}_i \otimes \vec{\sigma}_i)$ die Relationen $\vec{\sigma}^{(1)} P_\sigma = P_\sigma \vec{\sigma}^{(2)}$ und $\vec{\sigma}^{(2)} P_\sigma = P_\sigma \vec{\sigma}^{(1)}$ erfüllt.

b) Zeigen Sie mit Hilfe dieser Relationen, daß P_σ der Spinaustauschoperator ist, daß heißt, $P_\sigma|\chi(1,2)\rangle \equiv |\chi(2,1)\rangle$, wobei $|\chi(1,2)\rangle = |\chi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle$ eine beliebige Funktion der Spinkoordinaten von Teilchen 1 und Teilchen 2 ist.

(4* Punkte)

Aufgabe 27: α - Zerfall nach Gamov

Das Potential eines α - Teilchens im Tochterkern kann näherungsweise beschrieben werden durch

$$V(x) = \begin{cases} -V_0, & |x| < R_0 \\ \frac{2Ze^2}{|x|}, & |x| \geq R_0 \end{cases} \tag{2}$$

Typische Werte sind $V_0 = 100\,\text{MeV}$ und $R_0 = 9\,\text{fm}$. Der Coulombwall wird mit der Wahrscheinlichkeit $P = \exp\left(-\frac{2}{\hbar}\int_{R_0}^{R_a}\sqrt{2m|E-V(x)|}\mathrm{d}x\right)$ durchtunnelt, wobei R_a über die kinetische Energie E_α des α - Teilchen definiert ist: $E_\alpha = 2Ze^2/R_a$.

a) Skizzieren Sie das Potential.

b) Bestimmen Sie die Zerfallswahrscheinlichkeit pro Zeit $\lambda = \frac{P}{\Delta t}$ aus der Anzahl der Stöße pro Zeit im attraktiven Teil des Potentials aus einer klassischen Betrachtung.

c) Bestimmen Sie die Tunnelwahrscheinlichkeit P, indem Sie das Integral lösen und das Resultat nach Potenzen von $\sqrt{R_0/R_a}$ entwickeln. Zeigen Sie:

$$P \approx \exp\left[-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2M}2Ze^2\left(\frac{\pi}{2\sqrt{E_\alpha}} - \frac{2}{\sqrt{B}}\right)\right] \text{ mit } B = \frac{2Ze^2}{R_0}. \tag{3}$$

d) Bestimmen Sie λ und bringen Sie den Ausdruck auf die Form des *Geiger-Nutall-Gesetzes*: $\log\lambda = b(Z) - a\frac{Z}{\sqrt{E_\alpha}}$.

e) Vergleichen Sie mit dem Experiment: Für die Poloniumisotope ^{212}Po und ^{210}Po gilt

$$^{212}\text{Po} \to \alpha + {}^{208}\text{Pb}, \;\; \tau_{1/2} = 3\cdot 10^{-7}\,\text{sec}, \;\; E_\alpha = 8.953\,\text{MeV}, \tag{4}$$

$$^{210}\text{Po} \to \alpha + {}^{206}\text{Pb}, \;\; \tau_{1/2} = 1.2\cdot 10^{7}\,\text{sec}, \;\; E_\alpha = 5.408\,\text{MeV}, \tag{5}$$

$$m_{\text{Proton}}c^2 \approx m_{\text{Neutron}}c^2 = 940\,\text{MeV}, \;\; \Delta E_{\text{Bind.}\alpha} = 28\,\text{MeV}, \;\; \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}. \tag{6}$$

Vergleichen Sie das Verhältnis der Halbwertzeiten $\tau_{1/2} = \ln 2/\lambda$ der beiden Poloniumisotope mit dem theoretisch berechneten Verhältnis und kommentieren Sie das Resultat.

(4* Punkte)