Prof. Dr. P. Uwer, Dr. P. Kant
AG Phänomenologie der Elementarteilchenphysik
Institut für Physik

Übungen zur Theoretischen Einführung in das Standardmodell (P23.1.1)

WS 09/10 | **Blatt 10** | **Abgabe: 08. 01. 2010**

Allgemeine Hinweise:

- Die Bearbeitung dieses Übungsblatts ist freiwillig.
- Am nächsten Übungstermin, dem 04. 01. 2010 findet an Stelle der Übung eine Vorlesung in Raum NEW 14 1'12 statt. Beginn ist 9:00 (s.t.).

Aufgabe 1: Photon Polarisationssumme

Beim berechnen von unpolarisierten Wirkungsquerschnitten mit Photonen im Anfangs- oder Endzustand tritt die Polarisationssumme

$$P_{\mu\nu} = \sum_{\lambda=1,2} \epsilon_\mu(k,\lambda)\epsilon^*_\nu(k,\lambda) \tag{1}$$

auf, wobei k den Impuls und λ die Polarisation des jeweiligen Photons beschreiben.

a) Berechnen Sie $P_{\mu\nu}$. Legen Sie dazu die Polarisationsvektoren eindeutig fest durch die Bedingungen

$$\epsilon^\mu(k,\lambda)\epsilon_\mu(k,\lambda') = -\delta_{\lambda\lambda'}\,, \tag{2a}$$
$$\epsilon^\mu k_\mu = 0\,, \tag{2b}$$
$$\epsilon^\mu t_\mu = 0\,, \tag{2c}$$

wobei t_μ ein fester, von k_μ linear unabhängiger und ansonsten beliebiger Vierervektor ist. Machen Sie dann den Ansatz

$$P_{\mu\nu} = Ag_{\mu\nu} + Bk_\mu k_\nu + Ct_\mu t_\nu + D(k_\mu t_\nu + k_\nu t_\mu) \tag{3}$$

und bestimmen sie die Koeffizienten, indem Sie geeignete Kontraktionen von (3) mit ϵ^μ, k^μ und t^μ bilden.

b) Zeigen Sie, dass es in der QED zum richtigen Ergebnis führt, die Polarisationssumme durch $-g_{\mu\nu}$ zu ersetzen. Verwenden Sie dazu die *Ward-Identität*. Diese lautet

$$k_\mu \mathcal{M}^\mu(k) = 0\,, \tag{4}$$

wobei $\mathcal{M}^\mu(k)$ mit der Streuamplitude über

$$\mathcal{M}(k,\lambda) = \mathcal{M}^\mu(k)\epsilon^*_\mu(k,\lambda) \tag{5}$$

zusammenhängt. (4 Bonus-Punkte)

Aufgabe 2: Compton-Streuung: Wirkungsquerschnitt

Wir betrachten die elastische Streuung $e^- + \gamma \to e^- + \gamma$ eines Photons an einem Elektron der Masse m. Das Elektron trage vor dem Stoß den Impuls p, nach dem Stoß p'. Das Photon trage vor dem Stoß Impuls k und nach dem Stoß k'.

a) Zeichnen Sie die beiden beitragenden Feynman-Diagramme und benutzen Sie die in der Vorlesung angegebenen Feynman-Regeln, um daraus die Amplitude abzuleiten. *Hinweis:* Um das Resultat zu vereinfachen, können Sie mit Hilfe der Dirac-Gleichung zeigen, dass

$$(\not{p} + m)\gamma^\mu u(p) = 2p^\mu u(p) \tag{6}$$

ist.

b) Zeigen Sie, dass das über die Spins summmierte und gemittelte Betragsquadrat der Amplitude

$$\frac{1}{4}\sum_{\text{spin}} |\mathcal{M}|^2 = 2e^4 \left[\frac{p\cdot k'}{p\cdot k} + \frac{p\cdot k}{p\cdot k'} + 2m^2\left(\frac{1}{p\cdot k} - \frac{1}{p\cdot k'}\right) + m^4\left(\frac{1}{p\cdot k} - \frac{1}{p\cdot k'}\right)^2 \right] \tag{7}$$

lautet. *Hinweis:* Dazu ist es hilfreich, die Mandelstam Variablen, die auf dem zweiten Aufgabenblatt eingeführt wurden, zu verwenden und die Relation $s + t + u = 2m^2$ auszunutzen. Außerdem kann die Rechnung ein wenig vereinfacht werden, wenn man ausnutzt, dass die Reihenfolge der γ-Matrizen in einer Spur umgedreht werden kann, $\mathrm{Spur}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\cdots) = \mathrm{Spur}(\cdots\gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\mu)$.

c) Berechnen sie den unpolarisierten differentiellen Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\cos\theta}$. Dabei ist θ der Streuwinkel im Laborsystem (dem System, in dem das Elektron vor dem Stoß in Ruhe ist).

d) Berechnen Sie für den Limes niederenergetischer Photonen, $\frac{E_\gamma}{m} \to 0$, den totalen Wirkungsquerschnitt.

(6 Bonus-Punkte)

Aufgabe 3: Dirac-Propagator

Die Greensche Funktion $S(x-y)$ der Dirac-Gleichung ist definiert über die Gleichung

$$(i\not{\partial}_x - m)S(x-y) = i\delta(x-y)\mathbb{1} \tag{8}$$

Bestimmen Sie die Fouriertransformierte $\tilde{S}(p)$ von $S(x-y)$. (2 Bonus-Punkte)