Prof. Dr. P. Uwer, Dr. P. Kant
AG Phänomenologie der Elementarteilchenphysik
Institut für Physik

Übungen zur Theoretischen Einführung in das Standardmodell (P23.1.1)

WS 09/10 | **Blatt 11** | **Abgabe: 15. 01. 2010**

Aufgabe 1: Laufen der Kopplung

Die β-Funktion der QCD ist definiert als die logarithmische Ableitung der starken Kopplung,

$$\beta = \frac{d}{d\ln\mu_r^2}\frac{\alpha_s(\mu_r)}{\pi} = \mu_r^2\frac{d}{d\mu_r^2}\frac{\alpha_s(\mu_r)}{\pi} \tag{1}$$

und lautet in führender Ordnung in der Entwicklung in α_s

$$\beta = -\left(\frac{\alpha_s(\mu_r)}{\pi}\right)^2\left[\frac{11}{12}C_A - \frac{1}{3}C_F T_F n_f\right] + O(\alpha_s^3) = -\left(\frac{\alpha_s(\mu_r)}{\pi}\right)^2\beta_0 + O(\alpha_s^3)\,. \tag{2}$$

Lösen Sie diese Differentialgleichung durch Separation der Variablen und bestimmen Sie so die Funktion

$$\alpha_s(\mu_r, \mu_0, \alpha_s(\mu_0))\,, \tag{3}$$

wobei $\alpha_s(\mu_0)$ als Randwert gegeben ist. (4 Punkte)

Aufgabe 2: Führende Logarithmen

Die Entwicklung der Drei-Jet-Rate in α_s hat die Form

$$f_3(y_{\text{cut}}) = \frac{\sigma_{3-Jet}(y_{\text{cut}})}{\sigma_{tot}} = \frac{\alpha_s(\mu_r)}{2\pi}\cdot\left\{A(y_{\text{cut}}) + \frac{\alpha_s(\mu_r)}{2\pi}B(y_{\text{cut}},\mu_r) + O(\alpha_s^2)\right\}. \tag{4}$$

Dabei setzt sich der Koeffizient B aus einem Term, der nicht von der Renormierungsskala μ_r abhängt, und einem Logarithmus in μ_r zusammen,

$$B(y_{\text{cut}},\mu_r) = b_0 + b_1\ln\frac{s}{\mu_r^2} \tag{5}$$

Gehen Sie davon aus, dass $A(y_{\text{cut}})$ bekannt ist, und bestimmen Sie b_1 aus der Forderung, dass die μ_r-Abhängigkeit von $f_3(y_{\text{cut}})$ in jeder Ordnung der Störungstheorie verschwindet. *Hinweis:* Bilden Sie $\frac{d}{d\ln\mu_r^2}f_3(y_{\text{cut}})$ und betrachten Sie den Koeffizienten von $(\alpha_s(\mu_r))^2$. Die Skalenabhängigkeit steckt dabei allein in $\alpha_s(\mu_r)$ und $\ln\frac{s}{\mu_r^2}$. (4 Punkte)

Aufgabe 3: Farbstruktur Top-Quark Paarproduktion

Wir betrachten die Erzeugung eines Top-Antitop-Paares aus zwei Gluonen, $gg \to t\bar{t}$.

a) Zeichnen Sie alle beitragenden Feynman-Diagramme

b) Betrachten Sie die Farbstruktur der Diagramme. Schreiben Sie also den Beitrag A_i, den jedes Diagramm zur Amplitude beiträgt, als $S_i F_i$, wobei S_i die Lorentzstruktur (Impulse, Massen und Metrik) und F_i die Farbstruktur (Generatoren und Strukturkonstanten) enthält. Leiten Sie die F_i aus den Feynmanregeln her und setzten Sie die S_i als bekannt voraus. Die Lorentzstruktur braucht also nicht explizit angegeben zu werden.

c) Zeigen Sie, dass es nur zwei linear unabhängige Farbstrukturen gibt. Benutzen Sie dazu $\frac{\lambda^a}{2} = T^a$ und $i f^{abc} T^c = [T^a, T^b]$.

d) Zerlegen Sie nun die Amplitude in die beiden linear unabhängigen Farbstrukturen. Wie tragen jeweils die Diagramme zu den beiden Farbstrukturen bei?

(4 Punkte)