Prof. Dr. P. Uwer, Dr. P. Kant
AG Phänomenologie der Elementarteilchenphysik
Institut für Physik

Übungen zur Theoretischen Einführung in das Standardmodell (P23.1.1)

WS 09/10 **Blatt 14** **Abgabe: 05. 02. 2010**

Aufgabe 1: Spontane Symmetriebrechung: Skalarfeld in $1+1$ Dimensionen
Betrachten Sie ein reelles Skalarfeld ϕ in einer Raum- und einer Zeitdimension mit der Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) + \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4}\phi^4, \qquad \mu,\lambda > 0 \tag{1}$$

a) Unter welchen Transformationen von ϕ ist $\mathcal{L}$ invariant?

b) Stellen Sie den Hamiltonoperator

$$H = \int d^3x(\pi(x)\dot{\phi}(x) - \mathcal{L}), \qquad \pi(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}(x)} \tag{2}$$

auf. Welche Feldkonfiguration ϕ_0 minimiert H?

c) Entwickeln Sie $\phi(x)$ um ϕ_0, $\phi(x) = \phi_0 + \sigma(x)$ und drücken Sie die Lagrangedichte $\mathcal{L}$ durch das Feld $\sigma(x)$ aus. Interpretieren Sie die Terme in $\mathcal{L}$: welche Masse hat das Feld $\sigma(x)$, welche Vertices gibt es, wie sehen (qualitativ, also ohne Vorzeichen und Faktoren i) die Feynmanregeln aus, treten Goldstone-Bosonen auf?

(4 Punkte)

Aufgabe 2: Eichfeld-Propagator im abelschen Higgs Modell
Wir betrachten das abelsche Higgs Modell mit einem komplexen Skalarfeld ϕ, einem abelschen Eichfeld A_μ und der Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + [(\partial_\mu + iqA_\mu)\phi]^*[(\partial^\mu + iqA^\mu)\phi] + \mu^2\phi^*\phi - \lambda(\phi^*\phi)^2 . \tag{3}$$

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass das Feld ϕ für $\mu^2 > 0$ im Grundzustand einen endlichen Wert annimmt,

$$\phi(x) = \frac{v}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1(x) + i\phi_2(x)), \qquad v = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} . \tag{4}$$

a) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen des „freien“ Eichfelds aus den bilinearen Termen in der Lagrangedichte. Drücken Sie dabei in der Lagrangedichte das Feld $\phi(x)$ durch (4) aus und nutzen Sie die Eichfreiheit, um ϕ_2 zu eliminieren.

b) Bestimmen Sie analog zu Aufgabe 3 auf Blatt 9 die Green'sche Funktion für das Eichfeld.

(4 Punkte)

Aufgabe 3: An ein Fermion gekoppeltes N=2 lineares σ-Modell
Die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1,2}\left[\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_i)(\partial^\mu\phi_i) + \frac{1}{2}\mu^2(\phi_i)^2 - \frac{\lambda}{4}\Big((\phi_i)^2\Big)^2\right] + i\bar{\psi}\partial\!\!\!/\psi - g\bar{\psi}(\phi_1 + i\gamma^5\phi_2)\psi\,, \tag{5}$$

wobei ϕ_1, ϕ_2 reelle Skalarfelder und ψ ein Spinor ist, beschreibt ein an ein Fermion gekoppeltes $N = 2$ lineares σ-Modell.

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}$ invariant unter der globalen Symmetrie

$$\phi_1 \to \cos\alpha\phi_1 - \sin\alpha\phi_2\,, \tag{6}$$
$$\phi_2 \to \sin\alpha\phi_1 + \cos\alpha\phi_2\,, \tag{7}$$
$$\psi \to e^{-i\frac{\alpha}{2}\gamma^5}\psi \tag{8}$$

ist.

b) Entwickeln Sie $\mathcal{L}$ um den Wert der Felder ϕ_i im Grundzustand. Dabei können Sie obige Symmetrietransformation nutzen, um zu erreichen, dass im Grundzustand nur eines der beiden Felder einen endlichen Wert v hat:

$$\phi_1(x) = v + \sigma(x)\,, \qquad \phi_2(x) = \pi(x)\,. \tag{9}$$

c) Wie sieht das Spektrum des Modells aus, d.h. welche Massen haben die Felder σ, π und ψ?

d) Welche Vertices gibt es? Wie sehen die Feynmanregeln qualitativ (ohne Vorzeichen und Faktoren i) aus?

(4 Punkte)