Prof. Dr. P. Uwer, Dr. P. Kant
AG Phänomenologie der Elementarteilchenphysik
Institut für Physik

Übungen zur Theoretischen Einführung in das Standardmodell (P23.1.1)

WS 09/10 | **Blatt 3** | **Abgabe: 06. 11. 2009**

Aufgabe 1: Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Felds

a) Zeigen Sie, dass die Noether-Ströme, deren Erhaltung aus der Translationsinvarianz von $\mathcal{L}$ folgt,

$$T_N^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu A_\rho\right)} \partial^\nu A_\rho - g^{\mu\nu}\mathcal{L} \tag{1}$$

für ein elektromagnetisches Feld A mit der Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(A_\mu, \partial_\mu A_\nu\right) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu\,. \tag{2}$$

durch

$$T_N^{\mu\nu} = -F^{\mu\rho}\partial^\nu A_\rho + g^{\mu\nu}\left(\frac{1}{4}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma} + j_\sigma A^\sigma\right) \tag{3}$$

gegeben sind. Ist $T_N^{\mu\nu}$ symmetrisch?

b) Die Komponenten $T^0{}_0$, $T^0{}_i$ entsprechen der Energie- bzw. Impulsdichte des elektromagnetischen Felds. Drücken Sie $T^0{}_0$ explizit durch $\vec{E}$- und $\vec{B}$-Feld aus.

c) Die Drehimpulsdichte lässt sich aus dem Energie-Impulstensor $T^{\mu\nu}$ definieren als

$$M^{\mu\nu\sigma} = T^{\mu\nu}x^\sigma - T^{\mu\sigma}x^\nu\,. \tag{4}$$

Zeigen Sie, dass $M^{\mu\nu\sigma}$ genau dann erhalten ist $\left(\partial_\mu M^{\mu\nu\sigma} = 0\right)$, wenn $T^{\mu\nu}$ symmetrisch ist.

d) Wir wollen einen symmetrischen Energie-Impuls-Tensor $T^{\mu\nu}$ für das elektromagnetische Feld definieren,

$$T^{\mu\nu} = T_N^{\mu\nu} + T_D^{\mu\nu}\,, \quad T_D^{\mu\nu} = -\partial_\rho\left(F^{\mu\rho}A^\nu\right)\,. \tag{5}$$

Zeigen Sie, dass $T^{\mu\nu}$

- symmetrisch ist
- erhalten ist $\left(\Leftrightarrow \partial_\mu T_D^{\mu\nu} = 0\right)$
- die gleichen Ladungen hat wie $T_N^{\mu\nu}$ $\left(\Leftrightarrow \int d^3x T_D^{0\nu} = 0\right)$.
  Hinweis: Nutzen Sie $F^{00} = 0$ aus und vernachlässigen Sie wie üblich Randterme im Unendlichen.

(4 Punkte)

Aufgabe 2: Klassische Lösungen – Kink

Wir betrachten ein skalares Feld $\phi(x)$ in einer Raum- und einer Zeitdimension, mit der Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}(\phi,\partial_\mu\phi) = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - U(\phi)\,. \tag{6}$$

a) Stellen Sie die zu (6) gehörigen Euler-Lagrange-Gleichungen auf und zeigen Sie, dass diese im statischen Fall (d.h. für $\partial_t\phi = \frac{\partial\phi}{\partial t} = 0$) durch

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 = U(\phi) \tag{7}$$

gelöst werden. *Hinweis:* Wenn Sie die Feldgleichungen mit $\partial_x\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}$ multiplizieren, lassen sich diese direkt aufintegrieren.

b) Zeigen Sie, dass für das spezielle Potential

$$U(\phi) = \frac{\lambda}{4}\Big(\phi^2 - \frac{m^2}{\lambda}\Big)^2 \tag{8}$$

die statischen Feldgleichungen durch die Felder

$$\phi_\pm = \pm\frac{m}{\sqrt{\lambda}}\tanh\left[\frac{m}{\sqrt{2}}(x-x_0)\right] \tag{9}$$

gelöst werden. Nehmen Sie dazu die Wurzel aus (7) und integrieren Sie.

c) Zeigen Sie, dass der Strom

$$J^\mu = \frac{\sqrt{\lambda}}{m}\epsilon^{\mu\nu}\partial_\nu\phi \qquad \Big(\text{mit } \epsilon^{01} = -\epsilon^{10} = 1\,, \quad \epsilon^{00} = \epsilon^{11} = 0\Big) \tag{10}$$

erhalten ist und berechnen Sie den Wert der zugehörigen Ladung für $\phi_\pm$. Der Strom J^μ folgt nicht aus dem Noether-Theorem! (4 Punkte)

Aufgabe 3: Innere Symmetrien

Wir betrachten eine innere Symmetrie, d.h. eine Symmetrie, die nur die Felder, nicht aber die Raumzeit-Koordinaten transformiert:

$$\begin{aligned} \phi(x^\mu) &\to \phi'(x'^\mu) = \phi(x^\mu) + \delta\phi(x^\mu)\,, \\ x^\mu &\to x'^\mu = x^\mu\,. \end{aligned} \tag{11}$$

a) Schreiben Sie den Noether-Strom J^μ auf, der erhalten ist, wenn die Lagrangedichte $\mathcal{L}$ invariant unter (11) ist.

b) Betrachten Sie speziell die Lagrangedichte eines komplexen Skalarfelds

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi^*) - m^2\phi\phi^* \tag{12}$$

und die Symmetrietransformation

$$\begin{aligned} \phi &\to \phi\exp(i\chi)\,, \\ \phi^* &\to \phi^*\exp(-i\chi)\,. \end{aligned} \tag{13}$$

- Wie sehen die infinitesimalen Transformationen aus?
- Wie sieht J^μ und die zugehörige Ladung aus?
- Leiten Sie die Bewegungsgleichungen für ϕ und ϕ^* her und verifizieren Sie explizit, indem Sie die Bewegungsgleichungen einsetzen, dass J^μ erhalten ist. (4 Punkte)