Prof. Dr. P. Uwer, Dr. P. Kant
AG Phänomenologie der Elementarteilchenphysik
Institut für Physik

Übungen zur Theoretischen Einführung in das Standardmodell (P23.1.1)

WS 09/10 | **Blatt 4** | **Abgabe: 13. 11. 2009**

Aufgabe 1: Dirac-Gleichung (I)

Zeigen Sie, dass die Euler-Lagrange-Gleichungen für die Lagrangefunktion

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}\left(-(\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi + \bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu\psi)\right) - m\bar{\psi}\psi \tag{1}$$

auf die Dirac-Gleichung

$$(i\gamma_\mu\partial^\mu - m)\psi = 0 \tag{2}$$

führen. Betrachten Sie dazu ψ und $\bar{\psi}$ als unabhängige Variablen. Überlegen Sie, warum das zulässig ist. (4 Punkte)

Aufgabe 2: Dirac-Gleichung (II)

Aus den Spinoren lassen sich der Vektorstrom $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ und der Pseudovektrostrom $j_5^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$ definieren.

a) Ist der Strom j^μ erhalten?

b) Ist der Strom j_5^μ erhalten?

c) Zeigen Sie, dass die Erhaltung von j^μ mit dem Noether-Theorem aus der Invarianz der Lagrangedichte unter einer Phasentransformation

$$\psi \to e^{i\alpha}\psi \tag{3}$$

folgt. (4 Punkte)

Aufgabe 3: Darstellungen der Lorentz-Gruppe: Spin 1

Zeigen Sie, dass sich das elektromagnetische Feld A^μ wie ein Vektor unter der Lorentz-Gruppe transformieren muss, wenn gefordert wird, dass die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(A_\mu, \partial_\mu A_\nu\right) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu\,, \tag{4}$$

ein Lorentz-Skalar sein soll. Machen Sie hierzu den Ansatz

$$A^\mu(x) \to A'^\mu(x') = (R(\Lambda))^\mu{}_\nu A^\nu(x) \tag{5}$$

mit einer zunächst beliebigen Darstellung $R(\Lambda)$ der Lorentzgruppe (d.h., dass R die Gruppenstruktur respektiert, $R(\Lambda)R(\Lambda') = R(\Lambda\Lambda')$, $R(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$ und $R(\Lambda^{-1}) = (R(\Lambda))^{-1}$) und zeigen Sie, dass $R(\Lambda) = \Lambda$ sein muss. (4 Punkte)