Prof. Dr. P. Uwer, Dr. P. Kant
AG Phänomenologie der Elementarteilchenphysik
Institut für Physik

Übungen zur Theoretischen Einführung in das Standardmodell (P23.1.1)

WS 09/10 **Blatt 5** **Abgabe: 20. 11. 2009**

Aufgabe 1: Darstellungen der Lorentz-Gruppe: Spin 1/2

In der Vorlesung wurden die Matrizen N, M eingeführt, die eine Darstellung der Lorentz-Gruppe bilden,

$$N = \pm \frac{1}{\sqrt{\det\left(\Lambda^{\mu}{}_{\rho}\, \sigma^{\mu}\sigma^{\rho}\right)}}\, \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, \sigma^{\mu}\sigma^{\nu}, \tag{1}$$

$$M = \sigma^2 N^* \sigma^2, \tag{2}$$

$$\sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

a) Wir betrachten einen Boost entlang der x^3-Richtung und eine Rotation um die x^3-Achse. Für diese Lorentz-Transformationen sind die Matrizen Λ, unter denen Vektoren transformieren, gegeben durch

$$(\Lambda_{\lambda_3})^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} \cosh\lambda & 0 & 0 & -\sinh\lambda \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh\lambda & 0 & 0 & \cosh\lambda \end{pmatrix}, \quad (\Lambda_{\phi_3})^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Bestimmen Sie M, N für diese Lorentz-Transformationen. Wie hängt der Parameter λ mit der Geschwindigeit v des Boosts zusammen?

b) Wie sehen die den M, N aus a) entsprechenden infinitesimalen Transformationen aus?

c) Vergleichen Sie das Transformationsverhalten von ψ_L und ψ_R bezüglich Boosts und Rotationen.

d) Sind die Matrizen M, N aus Aufgabe a) hermitesch bzw. unitär?

(6 Punkte)

Aufgabe 2: Zerlegung der $SL(2,\mathbb{C})$
Zeigen Sie für eine beliebige Matrix $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, dass diese sich als Produkt einer unitären und einer hermiteschen Matrix schreiben lässt,

$$A = UH\,, \quad \text{mit } H^\dagger = H\,, \quad UU^\dagger = 1\,. \tag{5}$$

Gehen Sie konstruktiv vor mit dem Ansatz

$$H = \sqrt{AA^\dagger}\,, \quad U = AH^{-1} \tag{6}$$

und zeigen Sie, dass damit (5) erfüllt ist. (2 Punkte)

Aufgabe 3: Dirac-Gleichung (III)
In der Vorlesung wurden die Lösungen der Dirac-Gleichung mit positiven Frequenzen konstruiert. Konstruieren Sie analog dazu die Lösungen zu negativen Frequenzen.

a) Zeigen Sie, dass der Ansatz

$$\psi(x) = \mathrm{e}^{ipx} v_s(p) \quad \text{mit} \quad p^2 = m^2 \quad \text{und} \quad p^0 = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2} > 0 \tag{7}$$

auf zwei linear unabhängige Lösungen

$$v_s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p\sigma}\,\eta_s \\ -\sqrt{p\bar{\sigma}}\,\eta_s \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad s = 1,2. \tag{8}$$

führt.

b) Wählen Sie $\eta_i^+ \eta_j = \delta_{ij}$ und berechnen Sie

$$\bar{v}_r(p)\, v_s(p)\,, \tag{9}$$
$$\bar{v}_r(p)\, u_s(p) \tag{10}$$

und die Spinsumme

$$\sum_{s=1,2} v_s \bar{v}_s = \gamma^\mu p_\mu - m\,. \tag{11}$$

Dabei wurden u_s in der Vorlesung hergeleitet und lauten

$$u_s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p\sigma}\,\xi_s \\ \sqrt{p\bar{\sigma}}\,\xi_s \end{pmatrix}. \tag{12}$$

(4 Punkte)