Prof. Dr. P. Uwer, Dr. P. Kant
AG Phänomenologie der Elementarteilchenphysik
Institut für Physik

Übungen zur Theoretischen Einführung in das Standardmodell (P23.1.1)

WS 09/10 | **Blatt 6** | **Abgabe: 27. 11. 2009**

Aufgabe 1: Gamma-Matrizen

Die Gamma-Matrizen γ^μ, $\mu \in \{0,1,2,3\}$ wurden in der Vorlesung über den Antikommutator

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}\mathbb{1}_4 \tag{1}$$

eingeführt. Zusätzlich wurde

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \tag{2}$$

und die Abkürzung

$$\not{a} = \gamma_\mu a^\mu. \tag{3}$$

definiert. Zeigen Sie:

a)
$$\{\gamma_5, \gamma_\mu\} = 0 \quad \text{für } \mu \in \{0,1,2,3\}, \tag{4}$$

b)
$$\text{Spur}[\not{a}_1\not{a}_2 \ldots \not{a}_n] = 0 \quad \text{für } n \text{ ungerade}, \tag{5}$$

c)
$$\begin{aligned}\text{Spur}[\not{a}_1\not{a}_2 \ldots \not{a}_n] =& (a_1 \cdot a_2)\,\text{Spur}[\not{a}_3\not{a}_4 \ldots \not{a}_n] - (a_1 \cdot a_3)\,\text{Spur}[\not{a}_2\not{a}_4 \ldots \not{a}_n] \\ & \ldots + (a_1 \cdot a_n)\,\text{Spur}[\not{a}_2\not{a}_3 \ldots \not{a}_n].\end{aligned} \tag{6}$$

d) Berechnen Sie
$$\text{Spur}[\gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu \not{p}_2]. \tag{7}$$

Hinweis: Es ist $(\gamma_5)^2 = \mathbb{1}_4$, und die Spur ist zyklisch,

$$\text{Spur}[ABC] = \text{Spur}[CAB]\,. \tag{8}$$

(4 Punkte)

Aufgabe 2: Skalare Elektrodynamik

Die Lagrangedichte eines komplexen Skalarfelds,

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi - m^2\phi^*\phi\,, \tag{9}$$

ist invariant unter globalen U(1) Transformationen. Führen Sie ein abelsches Eichfeld und eine kovariante Ableitung D_μ ein, so dass die Lagrangedichte unter *lokalen* U(1) Transformationen invariant ist. Schreiben Sie explizit die Wechselwirkungsterme (die Terme mit drei oder mehr Feldern) dieser Theorie auf. (4 Punkte)

Aufgabe 3: Bilineare Produkte von Spinoren

a) Berechnen Sie das Transformationsverhalten unter Transformationen der eigentlichen orthochronen Lorentz-Gruppe $L^{\uparrow}{}_{+}$ der Ausdrücke

$$\bar{\psi}\psi\,, \tag{10}$$
$$\bar{\psi}\gamma_5\psi\,, \tag{11}$$
$$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\,, \tag{12}$$
$$\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi\,. \tag{13}$$

Hinweis: Wenn Sie die Weyl-Darstellung der Gamma-Matrizen benutzen,

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}, \tag{14}$$

ist γ_5 ist diagonal,

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} -\mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_2 \end{pmatrix} \tag{15}$$

und der Spinor hat das aus der Vorlesung bekannte Transformationsverhalten

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_L(x) \\ \psi_R(x) \end{pmatrix} \quad \to \quad \psi'(x') = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L(x) \\ \psi_R(x) \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Ausserdem haben die Matrizen M, N die Eigenschaften

$$\begin{aligned} M^+(\Lambda)\bar{\sigma}^\mu \Lambda_\mu{}^\nu M(\Lambda) &= \bar{\sigma}^\nu\,, \\ N^+(\Lambda)\sigma^\mu \Lambda_\mu{}^\nu N(\Lambda) &= \sigma^\nu\,, \\ M^+(\Lambda)N(\Lambda) = N^+(\Lambda)M(\Lambda) &= \mathbb{1}\,. \end{aligned} \tag{17}$$

b) Unter einer Paritätstransformation transformiert ein Spinor wie folgt:

$$\psi(x) \to \psi'(x') = \psi'(t, -\vec{x}) = e^{i\phi}\gamma^0\psi(t, -\vec{x'}) = e^{i\phi}\gamma^0\psi(x)\,. \tag{18}$$

– Wie transformiert sich $\bar{\psi}(x) = \psi^\dagger(x)\gamma^0$?

– Berechnen Sie das Transformationsverhalten des Pseudoskalars $\bar{\psi}\gamma_5\psi$.

(4 Punkte)