Prof. Dr. P. Uwer, Dr. P. Kant
AG Phänomenologie der Elementarteilchenphysik
Institut für Physik

Übungen zur Theoretischen Einführung in das Standardmodell (P23.1.1)

WS 09/10 **Blatt 7** **Abgabe: 04. 12. 2009**

Aufgabe 1: Einige nützliche SU(N)-Formeln

Die Generatoren der Fundamentaldarstellung der SU(N) erfüllen die Eigenschaften

$$\left[T^a, T^b\right] = i f^{abc} T^c , \tag{1}$$

$$\mathrm{Spur}\left[T^a T^b\right] = T_F \delta^{ab} , \tag{2}$$

$$\left\{T^a, T^b\right\} = d^{abc} T^c + \frac{2T_F}{N}\delta^{ab} , \tag{3}$$

dabei sind f^{abc} die Strukturkonstanten der SU(N), T_F ist eine Normierungskonstante, und d^{abc} ist symmetrisch in a, b, c. Im Folgenden sei die Normierung $T_F = 1/2$ gewählt. Zeigen Sie:

a)
$$T^a_{ij} T^a_{kl} = \frac{1}{2}(\delta_{il}\delta_{kj} - \frac{1}{N}\delta_{ij}\delta_{kl}) \tag{4}$$

b)
$$T^a_{ik} T^a_{kl} = C_F \delta_{il} \quad \text{mit} \quad C_F = \frac{N^2-1}{2N}. \tag{5}$$

c)
$$\mathrm{Spur}(T^a T^b T^c) \ = \frac{1}{4}(d_{abc} + i f_{abc}). \tag{6}$$

d)
$$(T^a T^b T^a)_{il} \ = \ -\frac{1}{2N} T^b_{il} \tag{7}$$

e) Die Generatoren in der adjungierten Darstellung sind $(F^a)_{bc} = -i f_{abc}$. Zeigen Sie:

$$F^d_{ac} F^d_{cb} = N\delta^{ab} \tag{8}$$

(4 Punkte)

Aufgabe 2: Farbstrom
Berechnen Sie den Noether-Strom, der aus der Invarianz der $SU(N)$ Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}_i \left(i\not{D}_{ik} - m\delta_{ik}\right)\Psi_k - \frac{1}{4}G^a_{\mu\nu}G^{\mu\nu}_a\,, \tag{9}$$

$$\text{mit}\quad \mathrm{D}^\mu_{ik} = \delta_{ik}\partial^\mu - iqT^a_{ik}A^{a\mu}\,, \tag{10}$$

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu - q f^{abc} A^b_\nu A^c_\mu\,, \tag{11}$$

unter globalen SU(N) Transformationen,

$$\Psi_i \to \left(\mathbb{1} + i\alpha^a T^a_{ik}\right)\Psi_k\,, \tag{12}$$

$$A^a_\mu \to A^a_\mu + f^{abc}\alpha^c A^b_\mu \tag{13}$$

folgt und zeigen Sie, dass dieser die Form

$$j^{a\mu} = \bar{\Psi}_i\gamma^\mu T^a_{ik}\Psi_k + f^{abc}A^b_\nu G^{c\mu\nu} \tag{14}$$

hat. (4 Punkte)

Aufgabe 3: Dimension der Felder und Parameter der Lagrangedichte
Wählt man ein Einheitensystem mit $\hbar = c = 1$, so läßt sich die Dimension einer beliebigen physikalischen Größe als $[\text{Masse}]^n$ schreiben. Man spricht dann davon, die Größe habe Massendimension n.

a) Betrachten Sie die Lagrangedichten

$$\mathcal{L} = \left(\mathrm{D}_\mu\phi\right)^* (\mathrm{D}^\mu\phi) - m^2_\phi\phi^*\phi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\,, \tag{15}$$

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}\left(i\not{D} - m_\psi\right)\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\,, \tag{16}$$

$$\text{mit}\quad \mathrm{D}_\mu = \partial_\mu - iqA_\mu \tag{17}$$

ist, und bestimmen Sie aus der Forderung, dass die Wirkung

$$S = \int d^4x\mathcal{L} \tag{18}$$

dimensionslos ist, die Massendimension von ϕ, A^μ, ψ, m_ψ, m_ϕ und q.

b) Wie lauten die Massendimensionen in d Dimensionen, d.h. wenn gefordert wird, dass

$$S = \int d^dx\mathcal{L} \tag{19}$$

dimensionslos ist? (4 Punkte)