Prof. Dr. P. Uwer, Dr. P. Kant
AG Phänomenologie der Elementarteilchenphysik
Institut für Physik

Übungen zur Theoretischen Einführung in das Standardmodell (P23.1.1)

WS 09/10 | **Blatt 8** | **Abgabe: 11. 12. 2009**

Aufgabe 1: $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$: Matrixelement

a) In der Vorlesung wurden die Feynman-Regeln der Quantenelektrodynamik (QED) angegeben. Benutzen Sie diese, um das Matrixelement $\mathcal{M}$ für den Prozess $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ aufzuschreiben. Dabei haben die einlaufenden e^-, e^+ Viererimpulse p, p' und Spins s, s', die μ^-, μ^+ Impulse k, k' und Spins r, r'.

b) Für die Berechnung des Wirkungsquerschnitts benötigt man das Betragsquadrat des Matrixelements. Zeigen Sie, dass dieses die Form

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{g^4}{q^4}\Big(\bar{v}_{s'}(p')\gamma^\mu u_s(p)\bar{u}_s(p)\gamma^\nu v_{s'}(p')\Big)\Big(\bar{u}_r(k)\gamma_\mu v_{r'}(k')\bar{v}_{r'}(k')\gamma_\nu u_r(k)\Big) \tag{1}$$

hat, wobei q der Gesamtimpuls $q = p + p'$ ist.

c) Häufig ist man am unpolarisierten Wirkungsquerschnitt interessiert, d.h. man möchte über die Spins der auslaufenden Teilchen summieren und die Spins der einlaufenden Teilchen mitteln. Benutzen Sie die Spinsummen von Blatt 5 und aus der Vorlesung, um zu zeigen, dass

$$\frac{1}{4}\sum_{s,s',r,r'}|\mathcal{M}|^2 = \frac{g^4}{4q^4}\,\mathrm{Spur}\Big[\big(\not{p}' - m_e\big)\gamma^\mu\big(\not{p} + m_e\big)\gamma^\nu\Big]\,\mathrm{Spur}\Big[\big(\not{k} + m_\mu\big)\gamma_\mu\,(\not{k}' - m_e)\gamma_\nu\Big] \tag{2}$$

ist.

d) Berechnen Sie die Spuren in (2) mit Hilfe der Resultate von Blatt 6. Was erhalten Sie als Ergebnis?

(4 Punkte)

Aufgabe 2: Kontraktionen von Gamma-Matrizen

a) Berechnen Sie mit Hilfe des Antikommutators

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \tag{3}$$

die folgenden Kontraktionen:

$$\gamma^\mu \gamma_\mu \,, \tag{4}$$
$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu \,, \tag{5}$$
$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\mu \,, \tag{6}$$
$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu \,. \tag{7}$$

b) Welche Ergebnisse erhalten Sie, wenn Sie die Dimension der Raumzeit nicht auf 4 festlegen, sondern allgemein in d Dimensionen rechnen?

(4 Punkte)

Aufgabe 3: Feldoperatoren

In der Vorlesung wurden die Feldoperatoren

$$\phi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k^0} \left\{ e^{-ikx} a^+(\vec{k}) + e^{ikx} a(\vec{k}) \right\}, \tag{8}$$

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(x)} = \dot{\phi}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{-i}{2} \left\{ -e^{-ikx} a^+(\vec{k}) + e^{ikx} a(\vec{k}) \right\}, \tag{9}$$

mit Erzeuger- und Vernichteroperatoren a^+ und a angegeben. Dabei ist $k^0 = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$.

a) Zeigen Sie, ausgehend von der Definition

$$H = \int d^3x (\pi(x)\dot{\phi}(x) - \mathcal{L}) \,, \tag{10}$$

dass der Hamiltonoperator die Form

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k^0} k^0 \left(a^+(\vec{k}) a(\vec{k}) + \frac{1}{2} \left[a(\vec{k}), a^+(\vec{k}) \right] \right) \tag{11}$$

hat.

b) Fordern Sie für die Erzeuger und Vernichter die Vertauschungsrelationen

$$\left[a(\vec{k}), a^+(\vec{k}') \right] = (2\pi)^3 2k^0 \delta(\vec{k} - \vec{k}') \,, \tag{12}$$

$$\left[a(\vec{k}), a(\vec{k}') \right] = \left[a^+(\vec{k}), a^+(\vec{k}') \right] = 0 \tag{13}$$

und zeigen Sie, dass dann für die Felder

$$\left[\phi(\vec{x}, t), \pi(\vec{y}, t) \right] = i\delta(\vec{x} - \vec{y}) \,, \tag{14}$$

$$\left[\phi(\vec{x}, t), \phi(\vec{y}, t) \right] = \left[\pi(\vec{x}, t), \pi(\vec{y}, t) \right] = 0 \tag{15}$$

gilt.

(4 Punkte)