Prof. Dr. P. Uwer, Dr. P. Kant
AG Phänomenologie der Elementarteilchenphysik
Institut für Physik

Übungen zur Theoretischen Einführung in das Standardmodell (P23.1.1)

WS 09/10 | **Blatt 9** | **Abgabe: 18. 12. 2009**

Aufgabe 1: Phasenraum-Integration

Integrieren Sie den n-Teilchenphasenraum

$$dR_n(P, k_1, k_2, \ldots) = \delta(P - \sum_i k_i) \prod_i \frac{d^3k_i}{2k_i^0} \tag{1}$$

für $n = 2$ soweit als möglich aus. Zeigen Sie, dass

$$dR_2(P, k_1, k_2) = \frac{1}{8s}\lambda(s, m_1^2, m_2^2) d\Omega\Theta(s - (m_1 + m_2)|m_1 - m_2|), \tag{2}$$

mit

$$\lambda(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3} \tag{3}$$

ist. *Hinweis:* Benutzen Sie $\frac{d^3k}{2k^0} = d^4k\delta(k^2 - m^2)\Theta(k^0)$, um die Integration über $\delta(P - k_1 - k_2)$ durchzuführen. Sie können zur Berechnung des Phasenraums ein geeignetes Bezugssystem, z.B. das Schwerpunktsystem wählen. Beachten Sie, dass $\delta(f(x)) = \sum_i \frac{1}{|df/dx|_{x=a_i}}\delta(x - a_i)$ ist, wobei a_i die Nullstellen von f sind. (4 Punkte)

Aufgabe 2: $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$: Wirkungsquerschnitt

Auf dem letzten Übungsblatt wurde das Betragsquadrat der Amplitude für den Prozess $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$,

$$\frac{1}{4}\sum_{\text{spin}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{8g^4}{q^4}\Big[(pk)(p'k') + (pk')(p'k) + (kk')m_e^2 + (pp')m_\mu^2 + 2m_e^2m_\mu^2\Big], \tag{4}$$

hergeleitet.

a) Benutzen Sie das Ergebnis aus der letzten Aufgabe, um damit den differentiellen Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ zu berechnen. Betrachten Sie dazu das Schwerpunktsystem und drücken Sie die Skalarprodukte zwischen den Vierervektoren durch s und den Streuwinkel θ aus. Vernachlässigen Sie die Massen der Elektronen und Myonen.

b) Integrieren Sie den differentiellen Wirkunsquerschnitt auf, um den totalen Wirkungsquerschnitt zu erhalten.

c) Berechnen Sie die Vorwärts-Rückwärts Asymmetrie

$$A_{FB} = \frac{\int d\sigma[\Theta(\cos\theta) - \Theta(-\cos\theta)]}{\int d\sigma} \,. \tag{5}$$

d) Was ändert sich, wenn Sie an Stelle der Produktion von μ^+, μ^--Paaren die Paarerzeugung von (leichten) Quarks betrachten?

(3 Punkte)

Aufgabe 3: Gluon-Propagator
Die Bewegungsgleichungen für das „freie“ Gluonfeld erhält man aus der Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} G^a_{\mu\nu} G_a^{\mu\nu} \tag{6}$$

$$\text{mit} \quad G_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu - q f^{abc} A^b_\nu A^c_\mu \,, \tag{7}$$

indem man nur die bilinearen Terme in den Feldern berücksichtigt und die Euler-Lagrange Gleichungen aufstellt.

a) Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichungen für das freie Gluonfeld wie folgt aussehen:

$$M_{\mu\nu} A^{a\mu} = 0 \,, \quad \text{mit} \quad M_{\mu\nu} = \partial_\rho \partial^\rho g_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu \,. \tag{8}$$

b) Wie ändern sich die Bewegungsgleichungen, wenn man in der Lagrangedichte einen Term

$$-\frac{\lambda}{2} (\partial_\mu A^{a\mu})^2 \text{ (Lorentz-Eichung)} \tag{9}$$

bzw.

$$-\frac{\lambda}{2} (n_\mu A^{a\mu})^2 \text{ (Axiale-Eichung)} \tag{10}$$

hinzufügt?

c) Die Greensche Funktion $D^{\nu\rho}(x-y)$ des Differentialoperators $M_{\mu\nu}$ ist definiert über die Gleichung

$$M_{\mu\nu} D^{\nu\rho}(x-y) = i \delta_\mu{}^\rho \delta(x-y) \,. \tag{11}$$

Berechnen Sie sowohl für die Lorentz-Eichung als auch die Axiale-Eichung die zugehörige Greensche-Funktion $D^{\nu\rho}(x-y)$ für das freie Gluonfeld. *Hinweis:* Betrachten Sie die Fouriertransformation von (11). Machen Sie für die Fouriertransformierte $\tilde{D}^{\nu\rho}(k)$ der Greenschen Funktion den Ansatz

$$\tilde{D}^{\nu\rho}(k) = a g^{\nu\rho} + b k^\nu k^\rho + c \,(n^\nu k^\rho + k^\nu n^\rho) \tag{12}$$

und bestimmen Sie die Koeffizienten a, b, c. Die Rücktransformation müssen Sie nicht durchführen.

d) Was passiert, wenn keine spezielle Eichung fixiert wird?

(6 Punkte)