Übungen zur Vorlesung: Einführung in die Quantenchromodynamik

SoSe 09 | **Blatt 11** | **Abgabe: 30. 06. 2009**

Aufgabe 32: Skalenabhängigkeit der Kopplungskonstante

Bestimmen Sie die explizite Skalenabhängigkeit der Kopplungskonstante aus

$$\frac{d}{d\ln(\mu)}\frac{\alpha_s(\mu)}{\pi} = -\beta(\alpha_s). \tag{1}$$

Für die β-Funktion können Sie

$$\beta(\alpha_s) = \sum_i (\frac{\alpha_s}{\pi})^i \beta_i \tag{2}$$

mit

$$\begin{aligned}
\beta_0 &= (11 - 2/3n_f)/2, && (3)\\
\beta_1 &= (51 - 19/3n_f)/4, && (4)\\
\beta_2 &= (2857/2 - 5033/18n_f + 325/54n_f{}^2)/32, && (5)\\
\beta_3 &= (149753/6 + 3564\zeta(3) + (-1078361/162 - 6508/27\zeta(3))n_f\\
&+ (50065/162 + 6472/81\zeta(3))n_f{}^2 + 1093/729n_f{}^3)/128, && (6)
\end{aligned}$$

verwenden ($N = 3$). Untersuchen Sie zunächst den Fall, daß Sie nur β_0 berücksichtigen. In diesem Fall kann die Differentialgleichung leicht analytisch gelöst werden. Untersuchen Sie den allgemeinen Fall indem Sie das auftretende Integral numerisch lösen (z.B. mit einer Gauss-Legendre Integration) und die auftretende Gleichung ebenfalls numerisch lösen (z.B. mit Newtonverfahren). Als Anwendungsbeispiel evolvieren Sie die Kopplung von 20 GeV bis 160 GeV wobei Sie als Startwert $\alpha_s(\mu = 91.187 GeV) = 0.118$ verwenden. Untersuchen Sie den Einfluß der Korrekturen β_1,β_2,β_3.

(3+5* Punkte)

Aufgabe 33: Skalen(un)abhängigkeit

Bei der Berechnung einer Observablen O wurde die Faktorisierungsskala auf einen festen Wert Q gesetzt. Im Rahmen der Störungstheorie (nächst-zu-nächstführender Ordnung) wurde folgendes Ergebnis erhalten:

$$O = \alpha_s(Q)^n O_0 + \alpha_s(Q)^{n+1} O_1 + \alpha_s(Q)^{n+2} O_2 + \mathrm{Ord}(\alpha_s^{n+3}). \tag{7}$$

Restaurieren Sie aus

$$\frac{dO}{d\mu} = 0 \tag{8}$$

die explizite Renormierungsskalenabhängigkeit.

(4 Punkte)

Aufgabe 34: Anomale Dimension

Bestimmen Sie aus der in der Vorlesung angegebenen Renormierungskonstante $Z_m^{\overline{\mathrm{MS}}}$ die anomale Dimension γ. Berechnen Sie alternativ γ aus der endlichen Renormierung $m_{\mathrm{on}} \leftrightarrow m(\mu)$.

(4 Punkte)