Übungen zur Vorlesung: Einführung in die Quantenchromodynamik

---

SoSe 09 | **Blatt 1** | **Abgabe: 21. 04. 2009**

Aufgabe 1: Yukawa Potential

In der klassischen Feldtheorie kann man die Klein-Gordon-Gleichung

$$(\partial_\mu \partial^\mu + \mu^2)\phi(x) = j(x) \tag{1}$$

als Bewegungsgleichung eines skalaren Feldes $\phi(x)$ unter dem Einfluß einer äußeren Quelle $j(x)$ interpretieren.
Wie lautet die zeitunabhängige Lösung $\phi_0(\vec{x})$ im Fall einer statischen Punktquelle

$$j(\vec{x}) = 4\pi g \delta^3(\vec{x}) \quad ?$$

Vergleichen Sie $\phi_0(\vec{x})$ mit dem Coulombpotential einer Punktladung. Gehen Sie durch Fouriertransformation in den Impulsraum über und bestimmen Sie zunächst die Lösung im Impulsraum.

(4 Punkte)

Aufgabe 2: Wirkungsprinzip und Euler-Lagrange Gleichungen

Leiten Sie aus der Annahme, daß für die tatsächliche Bewegung die zugehörige Wirkung S extremal wird, für die nachstehenden Beispiele die zugehörigen Euler-Lagrange Gleichungen ab.

a) Klassische Mechanik

$$S = \int dt L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t), \tag{2}$$

b) Skalare Feldtheorie

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)), \tag{3}$$

c) Photonfeld

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(A_\mu(x), \partial_\nu A_\mu(x)), \tag{4}$$

d) Fermionfeld à la Dirac

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\Psi(x), \bar{\Psi}(x), \partial_\mu \Psi(x), \partial_\mu \bar{\Psi}(x)). \tag{5}$$

Hinweis: Berechnen Sie die Variation der Wirkung und verlangen Sie, daß S stationär ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 3: Bewegungsgleichungen

Geben Sie für die nachstehenden Lagrangedichten die zugehörigen Bewegungsgleichungen an.

a) Klein-Gordon Gleichung

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \tag{6}$$

b) Dirac-Gleichung

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}\bar{\Psi}\gamma^\mu(\partial_\mu\Psi) - \frac{i}{2}(\partial_\mu\bar{\Psi})\gamma^\mu\Psi - m\bar{\Psi}\Psi \tag{7}$$

c) Elektrodynamik

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - e\, j_\mu A^\mu \tag{8}$$

wobei $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ und j_μ eine externe Stromdichte bezeichnet.

Hinweis: In Aufgabe 2 haben Sie gezeigt, daß die Euler-Lagrangegleichungen die Form

$$0 = \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\Phi_i} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_i} \tag{9}$$

für $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\Phi_i, \partial_\mu\Phi_i)$ annehmen. (4 Punkte)