Übungen zur Vorlesung:
Einführung in die Quantenchromodynamik

SoSe 09 | **Blatt 2** | **Abgabe: 28. 04. 2009**

Aufgabe 4: Fundamentaldarstellung der SU(3)

Konstruieren Sie das “kleinste” nicht-triviale SU(3)-Multiplett. Gehen Sie dazu von einem Isospin-Dublett aus, wobei Y zunächst nicht festgelegt ist. Verwenden Sie, dass $(U_\pm, U_3)$ und $(V_\pm, V_3)$ ebenfalls SU(2) Struktur haben, um die möglichen Y Werte zu bestimmen. Zeichnen Sie die gefundenen Multipletts im T_3-Y-Diagramm. Berechnen Sie für die beiden gefundenen Multipletts eine Matrixdarstellung von λ_5.
Erinnerung:

$$U_\pm = \frac{1}{2}(\lambda_6 + i\lambda_7), U_3 \equiv \frac{1}{2}[U_+, U_-] = \frac{3}{4}Y - \frac{1}{2}T_3, \tag{1}$$

und

$$V_\pm = \frac{1}{2}(\lambda_4 + i\lambda_5), V_3 \equiv \frac{1}{2}[V_+, V_-] = \frac{3}{4}Y + \frac{1}{2}T_3. \tag{2}$$

(4 Punkte)

Aufgabe 5: Irreduzible Darstellungen

Bestimmen Sie für die folgenden Produkte die Zerlegung in irreduzible Darstellungen:

$$3 \otimes \bar{3}, 3 \otimes 3 \otimes 3, 8 \otimes 8. \tag{3}$$

(2 Punkte)

Aufgabe 6: Alternative Klassifikation

Alternativ zu den in der Vorlesung eingeführten p, q Werten zur Klassifikation der SU(3) Multipletts kann auch der Punkt $(T_3^{\max}, Y^{\max})$ zu maximalen T_3 in der T_3-Y-Ebene verwendet werden. Beweisen Sie den Zusammenhang:

$$T_3^{\max} = \frac{p+q}{2}, \quad Y^{\max} = \frac{p-q}{3}. \tag{4}$$

(2 Punkte)

Aufgabe 7: Einige nützliche SU(N)-Formeln

Es seien $t^{a(R)}$ die Generatoren der SU(N) in der Darstellung R, wobei

$$[t^{a(R)}, t^{b(R)}] = i f^{abc} t^{c(R)}, \tag{5}$$

$$\mathrm{Sp}(t^{a(R)} t^{b(R)}) = T_R \delta_{ab}, \tag{6}$$

$$\sum_a (t^{a(R)})^2 = C_R \mathbb{1}_R, \tag{7}$$

(über gleiche Indizes wird summiert). C_R ist das Gewicht des Casimiroperators in der Darstellung R (im folgenden bezeichnet $R = F, A$ die Fundamental- bzw. adjungierte Darstellung). (Sp steht für Spur.)

a) Es seien T^a die Generatoren in der Fundamentaldarstellung und wir wählen als Normierung $T_F = 1/2$. Man zeige, daß

$$T^a_{ij} T^a_{kl} = \frac{1}{2}(\delta_{il}\delta_{kj} - \frac{1}{N}\delta_{ij}\delta_{kl}) \tag{8}$$

und als Konsequenz, daß

$$T^a_{ik} T^a_{kl} = C_F \delta_{il}, \qquad C_F = \frac{N^2-1}{2N}. \tag{9}$$

Zeigen Sie außerdem, daß

$$(T^a T^b T^a)_{il} \quad = \quad -\frac{1}{2N} T^b_{il} \tag{10}$$

$$\mathrm{Sp}(T^a T^b T^c) \quad = \quad \frac{1}{4}(d_{abc} + i f_{abc}), \tag{11}$$

wobei d_{abc} durch

$$\{\lambda_a, \lambda_b\} = \lambda_a, \lambda_b + \lambda_b, \lambda_a = \frac{1}{N}\delta_{ab} \mathbb{1} + d_{abc}\lambda_c \tag{12}$$

definiert ist.

b) Die Generatoren in der adjungierten Darstellung sind $(F^a)_{bc} = -i f_{abc}$. Zeigen Sie, daß $T_A = C_A = N$, d.h. daß $f_{acd} f_{bcd} = N\delta_{ab}$.

c) Zeigen Sie, daß $\mathrm{Sp}(F^a F^b F^c) = \frac{N}{2} i f_{abc}$.

(4 Punkte)