Übungen zur Vorlesung:
Einführung in die Quantenchromodynamik

SoSe 09 | **Blatt 5** | **Abgabe: 19. 05. 2009**

Aufgabe 15: Massendimension der Felder

Bestimmen Sie aus der Forderung, daß die Wirkung $\mathcal{S}$ für $\hbar = c = 1$ Massendimension 0, hat die Massendimension der Felder Ψ und A^a_μ sowie der Kopplungskonstanten g_s in der QCD Lagrangedichte. Was erhält man, wenn man die Theorie nicht in 4=3+1 sondern in d Dimensionen auswertet? (In der Wirkung tritt anstelle von $\int d^4x$ dann entsprechend $\int d^dx$ auf.)

(3 Punkte)

Aufgabe 16: QCD ist 'eindeutig'

Zeigen Sie, daß die QCD Lagrangedichte (bis auf den Theta-Term) eindeutig ist, wenn man Lorentzinvarianz, Eichinvarianz und Renormierbarkeit ($\approx$ alle Kopplungskonstanten haben Massendimension ≥ 0) fordert.

Hinweis: Gehen Sie von

$$\mathcal{L} = \bar{q}(A + B\gamma_5)i\gamma_\mu D^\mu q + \bar{q}(C + iD\gamma_5)q + \frac{Z}{2}\mathrm{Spur}[G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}] \tag{1}$$

aus, wobei A, B, C, D hermitesche Matrizen im Flavourraum sind und Z eine Konstante ist und $q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$. Zeigen Sie, daß diese Lagrangedichte durch Transformation der Felder in die Lagrangedichte der QCD überführt werden kann. Es ist zweckmäßig Felder $q_L = \frac{1}{2}(1-\gamma_5)q$ und $q_R = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)q$ einzuführen. Die q_i sind im allgemeinen Mischungen der Quarks $u, d, \ldots$. Man kann also auch Transformationen, die die $q_i's$ untereinander mischen zulassen. Ferner kann verwendet werden, daß eine beliebige Matrix M durch eine bi-unitäre Transformation der Gestalt S^+MT auf Diagonalgestalt (mit positiven Diagonalelementen) gebracht werden kann.

Bemerkung: $\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \gamma_5^2 = 1, \{\gamma_5, \gamma_\mu\} = 0$

(5 Punkte)

Aufgabe 17: Gluon-Propagator

In der letzten Übung wurde die Bewegungsgleichung für das Gluonfeld bestimmt. Wie ändern sich die Bewegungsgleichungen, wenn man in der Lagrangedichte einen Term

$$-\frac{\lambda}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2 \text{ (Lorentz-Eichung)} \tag{2}$$

bzw.

$$-\frac{\lambda}{2}(n_\mu A^\mu)^2 \text{ (Axiale-Eichung)} \tag{3}$$

hinzufügt? Berechnen Sie für die Lorentz-Eichung die zugehörige Greensche-Funktion für das "freie" Gluonfeld im Impulsraum. (Sowohl die Selbstwechselwirkung als auch die Wechselwirkung mit den Quarks wird ignoriert.) Was passiert wenn keine spezielle Eichung fixiert wird?

Hinweis: Bei der Berechnung der Greensche-Funktion im Impulsraum ist folgende Überlegung nützlich. Betrachten Sie

$$(cg^{\alpha\mu} - dk^{\alpha}k^{\mu})(ag_{\mu\nu} - bk_{\mu}k_{\nu}) = g^{\alpha}_{\nu} \tag{4}$$

Wie muß c, d gewählt werden, damit die Gleichung erfüllt ist?

(4 Punkte)