Übungen zur Vorlesung:
Einführung in die Quantenchromodynamik

SoSe 09 | **Blatt 6/7** | **Abgabe: 02. 06. 2009**

Aufgabe 18: Θ-term der QCD
Zeigen Sie, daß

$$\mathcal{L}_\Theta = \Theta \frac{g^2}{32\pi^2} \tilde{G}^a_{\mu\nu} G^{a\mu\nu} \tag{1}$$

als Vierer-Divergenz geschrieben werden kann, wobei

$$\tilde{G}^a_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} G^{a\mu\nu} \tag{2}$$

analog zur Elektrodynamik den dualen Feldstärketensor bezeichnet. Was folgt daraus? Hinweis: Betrachten Sie

$$K_\mu = \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \mathrm{Spur}[\frac{1}{2} A_\nu \partial_\alpha A_\beta + \frac{ig}{3} A_\nu A_\alpha A_\beta], \text{ wobei } A_\nu = T_a A^a_\nu. \tag{3}$$

(4 Punkte)

Aufgabe 19: Feynmanregeln der SU(N)-Eichtheorie
Untersuchen Sie die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \sum_{k=1}^{n_f} \sum_{a,b=1}^{N} \overline{\Psi}_{k,a} (i\not{\partial} - m_k)_{ab} \Psi_{k,b} + \frac{1}{2g^2} \mathrm{Spur}[G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}] - \frac{1}{2\lambda} (\partial^\mu A^a_\mu)^2 \tag{4}$$

wobei

$$D_\mu = \partial_\mu - igT_a A^a_\mu, \tag{5}$$

$$G_{\mu\nu} = [D_\mu, D_\nu] \tag{6}$$

und T_a den Generator der SU(N) in der Fundamentaldarstellung bezeichnet. Bestimmen Sie die Feynmanregeln für die Vertices.

(4 Punkte)

Aufgabe 20: Gamma-Matrizen
Für die Gamma-Matrizen γ^μ gilt

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \tag{7}$$

wobei $g^{\mu\nu}$ der metrische Tensor ist und der Antikommutator $\{\cdot, \cdot\}$ wie folgt definiert ist:

$$\{A, B\} = AB + BA. \tag{8}$$

Ferner definiert man

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \tag{9}$$

sowie

$$\not{a} = \gamma_\mu a^\mu. \tag{10}$$

Zeigen Sie,

a)

$$\{\gamma_5, \gamma_\mu\} = 0, \tag{11}$$

b)

$$\mathrm{Spur}[\not{a}_1 \not{a}_2 \dots \not{a}_n] = 0 \tag{12}$$

für n ungerade, sowie

c)

$$\mathrm{Spur}[\not{a}_1 \not{a}_2 \dots \not{a}_n] = (a_1 \cdot a_2)\mathrm{Spur}[\not{a}_3 \not{a}_4 \dots \not{a}_n] - (a_1 \cdot a_3)\mathrm{Spur}[\not{a}_2 \not{a}_4 \dots \not{a}_n] \tag{13}$$

$$\dots + (a_1 \cdot a_n)\mathrm{Spur}[\not{a}_2 \not{a}_3 \dots \not{a}_n]. \tag{14}$$

d) Berechnen Sie

$$\mathrm{Spur}[\gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu \not{p}_2]. \tag{15}$$

(4 Punkte)

Aufgabe 21: Phasenträume

Integrieren Sie den n-Teilchenphasenraum

$$dR_n(P, k_1, k_2, \dots) = \delta(P - \sum_i k_i) \prod_i \frac{d^{d-1} k_i}{2k_i^0} \tag{16}$$

für $n = 2$ soweit als möglich aus. Zeigen Sie, daß das Maß lorentz-invariant ist. (3 Punkte)

Aufgabe 22: Zerfall eines polarisierten Topquarks

Berechnen Sie die differentielle Zerfallsbreite für den Zerfall eines “polarisierten” Topquarks in ein W-Boson sowie ein b-Quark. Der entsprechende Vertex ist durch

$$-ieg_w V_{tb} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \tag{17}$$

gegeben, wobei $eg_w V_{tb}$ die Kopplungsstärke beschreibt. Die differentielle Breite $d\Gamma$ ist durch

$$d\Gamma(a \to b(p_1) + \dots) = \frac{1}{2m_a}(2\pi)^4 \delta(p_a - p_1 - p_2 - \dots) \prod_i \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2p_i^0} |\mathcal{T}_{fi}|^2 \tag{18}$$

gegeben. Für ein Quark mit Spin s (wobei s die relativistische Verallgemeinerung des Spins ist) können Sie

$$u_\alpha(p,s)\bar{u}_\beta(p,s) = [\frac{1}{2}(\not{p} + m)(1 + \gamma_5 \not{s})]_{\alpha\beta} \tag{19}$$

verwenden. Es gilt $s^2 = -1$ und $(s \cdot p) = 0$.

(4 Punkte)