Aufgaben zur Selbsteinschätzung

Übung 1 Kurvendiskussion

Es soll eine Kurvendiskussion für folgendes Polynom durchgeführt werden:

$$p(x) = x^3 - 2x^2 - 15x \tag{1}$$

a) Bestimmen Sie die Nullstellen von p(x).

b) Bestimmen Sie die Extrema von p(x).

c) Bestimmen Sie den Wendepunkt von p(x).

Lösung zu Übung 1

a) Mit Nullstellen eines Polynoms sind diejenigen Werte von x gemeint für die $p(x) = 0$ gilt. Um die Nullstellen zu bestimmen, bietet es sich an, in $p(x)$ ein x auszuklammern:

$$p(x) = x(x^2 - 2x - 15). \tag{2}$$

Um die entsprechenden x-Werte zu bestimmen, wird die Gleichung Null gesetzt, bzw. gefordert, dass $p(x) = 0$ gilt (Notation: $p(x) \stackrel{!}{=} 0$).

$$p(x) = x(x^2 - 2x - 15) \stackrel{!}{=} 0 \tag{3}$$

Da ein Produkt Null ergibt sobald mindestens ein Faktor Null wird, finden wir

$$x_1 = 0 \tag{4}$$
$$x^2 - 2x - 15 = 0. \tag{5}$$

Die Nullstellen von Gleichung (5) können mithilfe der pq-Formel

$$x_\pm = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}, \tag{6}$$

welche die Lösungen von Gleichungen der Form

$$0 = x^2 + px + q \tag{7}$$

angibt, bestimmt werden. Hier gilt

$$\begin{aligned} p &= -2 && (8)\\ q &= -15. && (9) \end{aligned}$$

Damit

$$\begin{aligned} x_{2/3} &= -\frac{-2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 - (-15)} && (10)\\ &= 1 \pm \sqrt{1+15} && (11)\\ &= 1 \pm \sqrt{16} && (12)\\ &= 1 \pm 4. && (13) \end{aligned}$$

Zusammengefasst lauten die drei Nullstellen

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 && (14)\\ x_2 &= -3 && (15)\\ x_3 &= 5. && (16) \end{aligned}$$

b) Die Extrema eines Polynoms liegen bei den Nullstellen seiner Ableitung, um sie zu bestimmen muss daher zunächst die Ableitung von $p(x)$ berechnet werden. Nach Ableitungsregeln für Polynome gilt

$$p'(x) = 3x^2 - 4x - 15. \quad (17)$$

Analog zum vorherigen Aufgabenteil werden nun die Nullstellen von $p'(x)$ bestimmt.

$$\begin{aligned} 0 &\overset{!}{=} 3x^2 - 4x - 15 && (18)\\ 0 &= x^2 - \frac{4}{3}x - 5 && (19)\\ \Rightarrow x_{4/5} &= -\frac{-4/3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-4/3}{2}\right)^2 - (-5)} && (20)\\ &= \frac{2}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 5} && (21)\\ &= \frac{2}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 (2^2 + 5 \cdot 3^2)} && (22)\\ &= \frac{2}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{4+45} && (23)\\ &= \frac{2}{3} \pm \frac{\sqrt{49}}{3} && (24)\\ &= \frac{2}{3} \pm \frac{7}{3} && (25) \end{aligned}$$

Und damit

$$x_4 = -\frac{5}{3} \quad (26)$$
$$x_5 = \frac{9}{3} = 3. \quad (27)$$

Um die Art der Extrema (Minima oder Maxima) zu bestimmen, schaut man sich nun den Wert der zweiten Ableitung des Polynoms an den Extremstellen x_i an. Für $p''(x_i) < 0$ ist x_i ein Maximum, für $p''(x_i) > 0$ ein Minumum.
Zur Bildung der zweiten Ableitung muss die erste Ableitung des Polynoms (also $p'(x)$) erneut abgeleitet werden. Nach Ableitungsregeln gilt

$$p''(x) = 6x - 4. \quad (28)$$

Zur Überprüfung auf Minima/Maxima werden nun die Extremstellen x_4 und x_5 aus den Gleichungen (26) und (27) eingesetzt:

$$p''(x_4 = -\frac{5}{3}) = 6 \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) - 4 = -10 - 4 = -14 < 0 \quad (29)$$
$$p''(x_5 = 3) = 6 \cdot 3 - 4 = 18 - 4 = 14 > 0. \quad (30)$$

Damit ist x_4 ein Maximum und x_5 ein Minimum.

c) Wendepunkte liegen bei den Nullstellen der zweiten Ableitung eines Polynoms. Die zweite Ableitung wurde bereits im vorherigen Aufgabenteil in Gleichung (28) berechnet, da diese linear in x ist, erhalten wir die Nullstelle durch einfaches Umformen.

$$p''(x) = 6x - 4 \overset{1}{=} 0 \quad (31)$$
$$6x = 4 \quad (32)$$
$$x = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \quad (33)$$

Übung 2 Ableitungen

Bestimmen Sie die Ableitungen von

a) $\sin(x^2)$

b) $e^{3x} \cos(x)$

c) *(Fortgeschritten)* $\arcsin(x)$ über die Ableitung der Umkehrfunktion.

Lösung zu Übung 2

a) Nach der Kettenregel

$$f(g(x))' = f'(g(x))g'(x) \tag{34}$$

mit $f(y) = sin(y)$ und $g(x) = x^2$ gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sin\left(x^2\right) = \cos\left(x^2\right) 2x. \tag{35}$$

b) Nach der Produktregel

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \tag{36}$$

mit $f(x) = \mathrm{e}^{3x}$ und $g(x) = \cos(x)$ gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \mathrm{e}^{3x} \cos(x) = 3\mathrm{e}^{3x} \cos(x) - \mathrm{e}^{3x} \sin(x). \tag{37}$$

c) Für die Beziehung zwischen einer Funktion und ihrer Umkehrfunktion gilt zunächst

$$f(f^{-1}(x)) = x. \tag{38}$$

Leitet man dies ab, ergibt sich mit der Kettenregel (34)

$$f(f^{-1}(x))' = f'(f^{-1}(x))(f^{-1})'(x) = 1 \tag{39}$$

und damit

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}. \tag{40}$$

Der $\arcsin(x)$ ist die Umkehrfunktion von $\sin(x)$, also $f^{-1}(x) = \arcsin(x)$ und $f(x) = \sin(x)$. Damit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arcsin(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} \tag{41}$$

$$= \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}. \tag{42}$$

Um den letzten Ausdruck zu vereinfachen kann nun der trigonometrische Satz des Pythagoras

$$\sin^2(y) + \cos^2(y) = 1 \tag{43}$$

verwendet werden, um den Kosinus zu ersetzen. Mit

$$\cos(y) = \sqrt{1 - \sin^2(y)} \tag{44}$$

ergibt sich

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))}} \tag{45}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \tag{46}$$

Übung 3 Integrale

Berechnen Sie

a)

$$\int_{-1}^{2} \left(8x^3 + 15x^2 - 6\right)\mathrm{d}x \tag{47}$$

b) *(Fortgeschritten)*

$$\int x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x \tag{48}$$

Hinweis: Für dieses Integral bietet sich eine Substitution an.

Lösung zu Übung 3

a) Polynome können mit ihrer Stammfunktion

$$\int x^n\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \tag{49}$$

direkt integriert werden, damit folgt

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{2} \left(8x^3 + 15x^2 - 6\right)\mathrm{d}x &= \frac{8}{4}x^4 + \frac{15}{3}x^3 - 6x\Big|_{-1}^{2} && (50)\\
&= 2x^4 + 5x^3 - 6x\Big|_{-1}^{2} && (51)\\
&= 2\cdot 2^4 + 5\cdot 2^3 - 6\cdot 2^2 && (52)\\
&\quad -\left(2\cdot(-1)^4 + 5\cdot(-1)^3 - 6\cdot(-1)\right) && (53)\\
&= 32 + 40 - 12 - (2 - 5 + 6) && (54)\\
&= 60 - 3 && (55)\\
&= 57. && (56)
\end{aligned}$$

b) Für das Integral

$$\int x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x \tag{57}$$

ist keine Stammfunktion sofort bekannt, es muss daher zunächst in eine Form gebracht werden, die direkt integriert werden kann. Um dies zu erreichen, kann eine Substitution verwendet werden, also x wird durch eine neue Variable ausgedrückt, sodass sich das Integral vereinfacht. Dabei muss auch das Differential dx ersetzt werden, sodass sich ein zusätzlicher Faktor im Integral ergibt

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int f(u)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}\mathrm{d}u = \int f(u)\frac{1}{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}}\mathrm{d}u. \tag{58}$$

Durch clevere Wahl von u kann so dafür gesorgt werden, dass sich (störende) Faktoren im Integral kürzen. Hier bietet sich $u = x^2$ an, damit

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= 2x && (59)\\
\int x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x &= \int \frac{x}{2x}\mathrm{e}^{u}\mathrm{d}u && (60)\\
&= \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{u}\mathrm{d}u && (61)\\
&= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{u} + C. && (62)
\end{aligned}$$

Nun muss noch resubstituiert, also u wieder durch x ersetzt, werden.

$$\int x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2} + C \tag{63}$$

Übung 4 Vektorrechnung

Sei

$$\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\7\\3\end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}. \tag{64}$$

Berechnen Sie

a) $\vec{a} + \vec{b}$

b) $\vec{a} \cdot \vec{b}$

c) $\vec{a} \times \vec{b}$

Lösung zu Übung 4

a) Zwei allgemeine Vektoren werden mittels

$$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\a_3+b_3\end{pmatrix}, \tag{65}$$

also komponentenweise, addiert. Damit

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix}1\\7\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+2\\7-1\\3+3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\6\\6\end{pmatrix}. \tag{66}$$

b) Das Skalarprodukt von zwei allgemeinen Vektoren wird gemäß

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \tag{67}$$

gebildet. Also

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 + 7 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 = 2 - 7 + 9 = 4. \tag{68}$$

c) Das Kreuzprodukt von zwei allgemeinen Vektoren wird gemäß

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}, \tag{69}$$

gebildet. Damit

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \cdot 3 - 3 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 2 - 1 \cdot 3 \\ 1 \cdot (-1) - 7 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 + 3 \\ 6 - 3 \\ -1 - 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 3 \\ -15 \end{pmatrix} \tag{70}$$

Übung 5 Gleichungssystem

Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem.

$$4x - 2y + 2z = 2 \tag{71a}$$
$$-2x + 3y - 2z = 0 \tag{71b}$$
$$3x - 5y + z = -7 \tag{71c}$$

Lösung zu Übung 5

Ein möglicher Lösungsweg für das lineare Gleichungssystem ist es, es in eine Dreiecksform zu bringen. Das bedeutet, die Gleichungen so lange umzuformen, bis eine Gleichung nur noch von beispielsweise z, eine von y und z und eine von allen drei Variablen abhängt. Ziel ist es also, Variablen aus den Gleichungen zu eliminieren. Dazu können Gleichungen entweder nach Variablen aufgelöst und in andere eingesetzt oder (vielfache von) Gleichungen aufeinander addiert werden.

$$4x - 2y + 2z = 2 \tag{72a}$$
$$-2x + 3y - 2z = 0 \tag{72b}$$
$$3x - 5y + z = -7 \tag{72c}$$

$$
\begin{aligned}
& & 4x - 2y + 2z &= 2 & \text{(73a)}\\
(72a) + 2 \cdot (72b) & & 4y - 2z &= 2 & \text{(73b)}\\
3 \cdot (72a) - 4 \cdot (72c) & & 14y + 2z &= 34 & \text{(73c)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& & 4x - 2y + 2z &= 2 & \text{(74a)}\\
& & 4y - 2z &= 2 & \text{(74b)}\\
7 \cdot (73b) - 2 \cdot (73c) & & -18z &= -54 & \text{(74c)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
4x - 2y + 2z &= 2 & \text{(75a)}\\
4y - 2z &= 2 & \text{(75b)}\\
z &= 3 & \text{(75c)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(75a) \text{ mit } (75c) & & 4x - 2y &= -4 & \text{(76a)}\\
(75b) \text{ mit } (75c) & & 4y &= 8 & \text{(76b)}\\
& & z &= 3 & \text{(76c)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
4x - 2y &= -4 & \text{(77a)}\\
y &= 2 & \text{(77b)}\\
z &= 3 & \text{(77c)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(77a) \text{ mit } (77b) & & x &= 0 & \text{(78a)}\\
& & y &= 2 & \text{(78b)}\\
& & z &= 3 & \text{(78c)}
\end{aligned}
$$