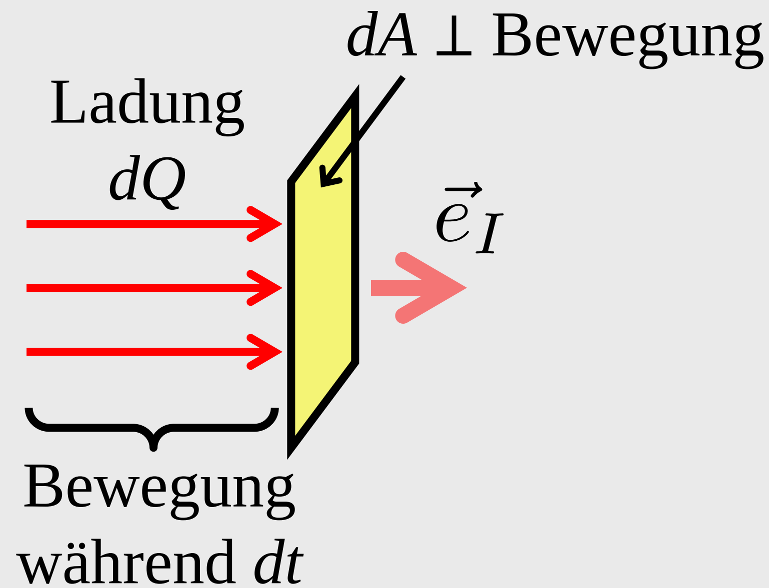
2. Elektrischer Strom

2.1. Stromstärke

Elektrischer Strom = Ladungstransport

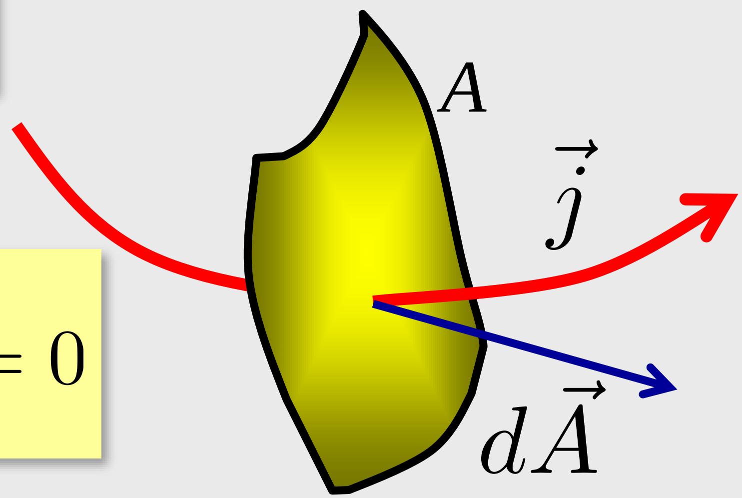


Stromstärke (bzgl. dA): $dI = \frac{dQ}{dt}$

Stromdichte: $\vec{j} = \frac{dI}{dA} \cdot \vec{e}_I$

Stromstärke bzgl. A: $\boxed{I = \int_A \vec{j}\, d\vec{A}}$

$[I] = \mathrm{A} = \mathrm{C\,s}^{-1} \qquad [j] = \mathrm{A\,m}^{-2}$



Kontinuitätsgleichung: $\boxed{\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$

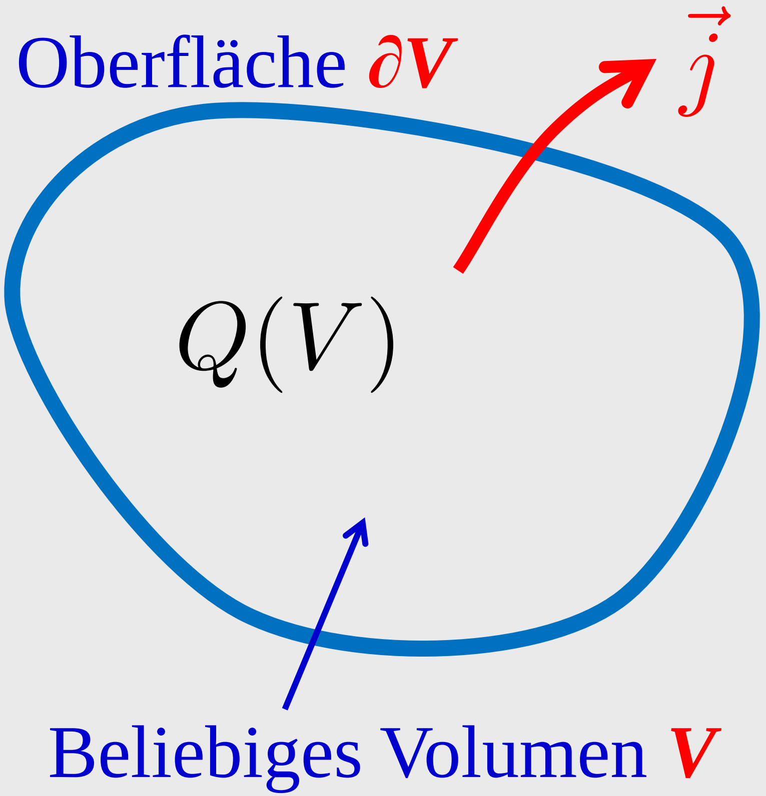
Beweis der Kontinuitätsgleichung: ($\rightarrow$ Tafel)

Ladungserhaltung ⇒

$$\Delta Q(V) = -I \cdot \Delta t = -\oint_{\partial V} \vec{j}\, d\vec{A} \cdot \Delta t$$

$$\Delta Q(V) = \Delta \int_V \rho\, dV = \int_V \Delta\rho\, dV$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV + \oint_{\partial V} \vec{j}\, d\vec{A} = 0}$$



Gaußscher Satz ⇒ $$\oint_{\partial V} \vec{j}\, d\vec{A} = \int_V \mathrm{div}\vec{j}\, dV$$

Folgerung: $$\int_V \left(\mathrm{div}\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV = 0$$ für beliebige V □

Leitungsmechanismen:

- Elektronische Leiter: Metalle, Halbleiter
  Ladungsträger hauptsächlich Elektronen
- Ionen-Leiter: Elektrolyte, Isolatoren mit Fehlstellen
  Ladungsträger hauptsächlich positive und negative Ionen
- Gemischte Leiter: Plasmen
  Ladungsträger: Elektronen und Ionenrümpfe; z.B. in Gasentladungen

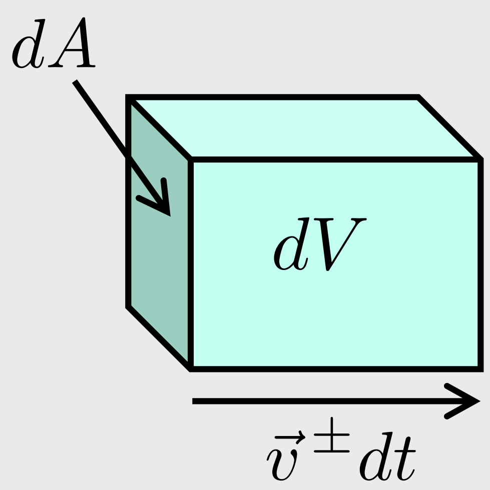
Mikroskopische Theorie:

$n^{\pm}$: Anzahldichte positiver (negativer) Elementarladungen

$\vec{v}^{\pm}$: zugehörige Transportgeschwindigkeiten

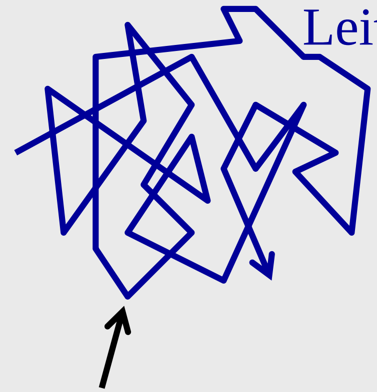
$$dV = v^{\pm}\, dA\, dt \;\Rightarrow\; dQ = \pm e n^{\pm} dV$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{j} = +en^{+}\vec{v}^{+} - en^{-}\vec{v}^{-}}$$



2.2. Ohmsches Gesetz

Betrachte elektronische Leiter (Metalle)



a) $\vec{E} = \vec{0}$

typische instantane Geschwindigkeit (T-abhängig):

$$\langle|\vec{v}|\rangle \approx 10^6 \ldots 10^7 \,\mathrm{m/s}$$

$$\langle\vec{v}\,\rangle = \vec{0}, \;\; \langle\vec{j}\,\rangle = \vec{0}$$

mittlere freie Weglänge (zwischen zwei Stößen): $\boldsymbol{\Lambda}$

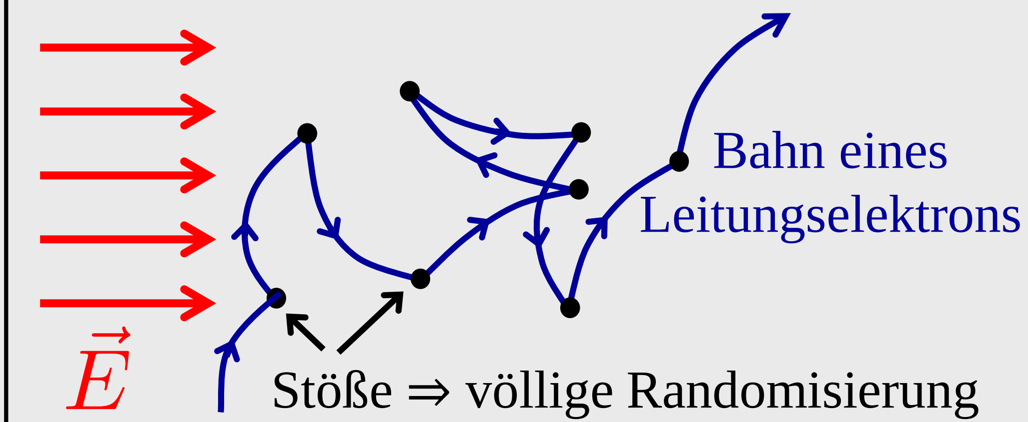
mittlere Zeit zwischen zwei Stößen: $$\boxed{\tau_\mathrm{s} = \frac{\Lambda}{\langle|\vec{v}|\rangle}}$$

Beispiel: Kupferdraht bei Zimmertemperatur

$$\langle|\vec{v}|\rangle = 1{,}5 \cdot 10^6 \mathrm{m/s}\;, \quad \Lambda = 4 \cdot 10^{-8} \mathrm{m}\;, \quad \tau_\mathrm{s} = 2{,}7 \cdot 10^{-14} \mathrm{s}$$

b) $\vec{E} \neq \vec{0} \;\Rightarrow\; \vec{F} = q\vec{E}$

$$\Rightarrow \quad \langle \Delta \vec{v} \rangle = \frac{\vec{F}}{m} \cdot \tau_{\mathrm{s}}$$



Bsp.: Cu-Draht, E = 100 V/m

$$\langle |\vec{v}| \rangle = 1{,}5 \cdot 10^6 \;\mathrm{m/s}$$

$$\langle \Delta \vec{v} \rangle \approx 0{,}5\,\mathrm{m/s}$$

Def.: Driftgeschwindigkeit $\vec{v}_{\mathrm{D}} = \langle \Delta \vec{v} \rangle$ ⇒ Ladungstransport

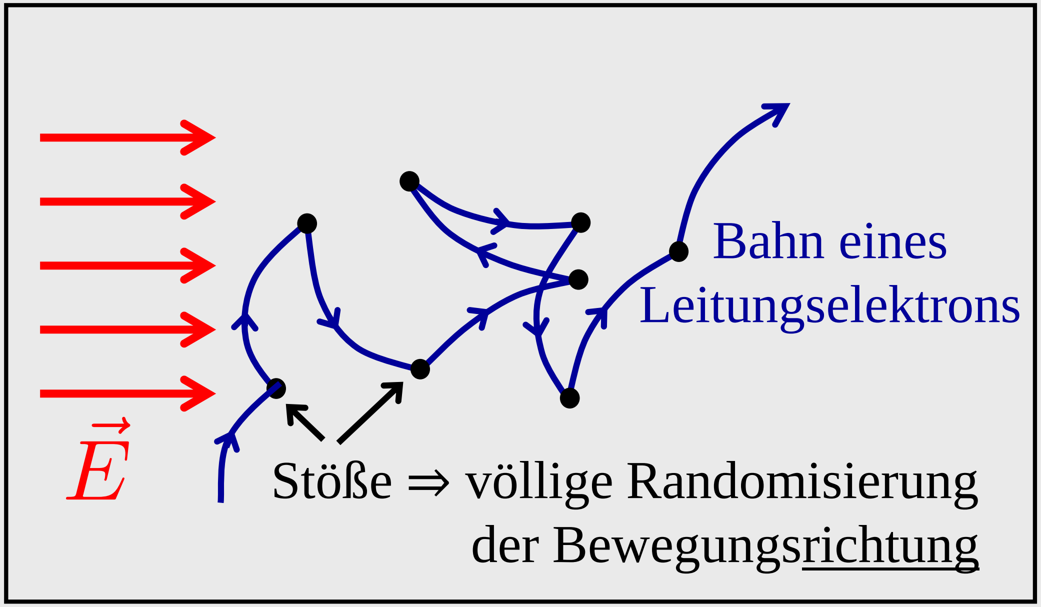
Pro Ladungsträgersorte folgt:

$$\vec{j} = nq\vec{v}_{\mathrm{D}} = nq\,\frac{\vec{F}}{m}\,\tau_{\mathrm{s}} = \frac{nq^2\tau_{\mathrm{s}}}{m} \cdot \vec{E}$$

$$\vec{v}_{\mathrm{D}} = \frac{q\tau_{\mathrm{s}}}{m} \cdot \vec{E}$$

$$\vec{j} = \frac{nq^2\tau_\mathrm{s}}{m} \cdot \vec{E}$$

$$\vec{v}_\mathrm{D} = \frac{q\tau_\mathrm{s}}{m} \cdot \vec{E}$$



Definition:

$$\sigma_\mathrm{el} = \frac{nq^2\tau_\mathrm{s}}{m}$$

elektrische Leitfähigkeit

$$\mu = \frac{q\tau_\mathrm{s}}{m}$$

Beweglichkeit

→ stark T-abhängige Materialparameter; oft unabhängig von $\vec{E}$

Folgerung:

$$\vec{j} = \sigma_\mathrm{el}\vec{E}$$

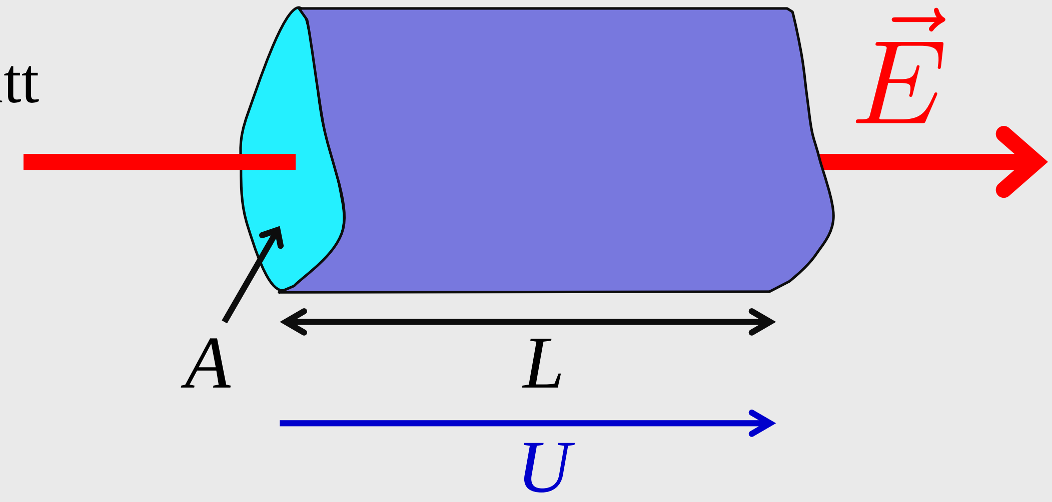
Ohmsches Gesetz

$$\vec{v}_\mathrm{D} = \mu\vec{E}$$

Spezialfall: homogener Leiter, konstanter Querschnitt

$\vec{j} = \text{const.}$ über Querschnitt

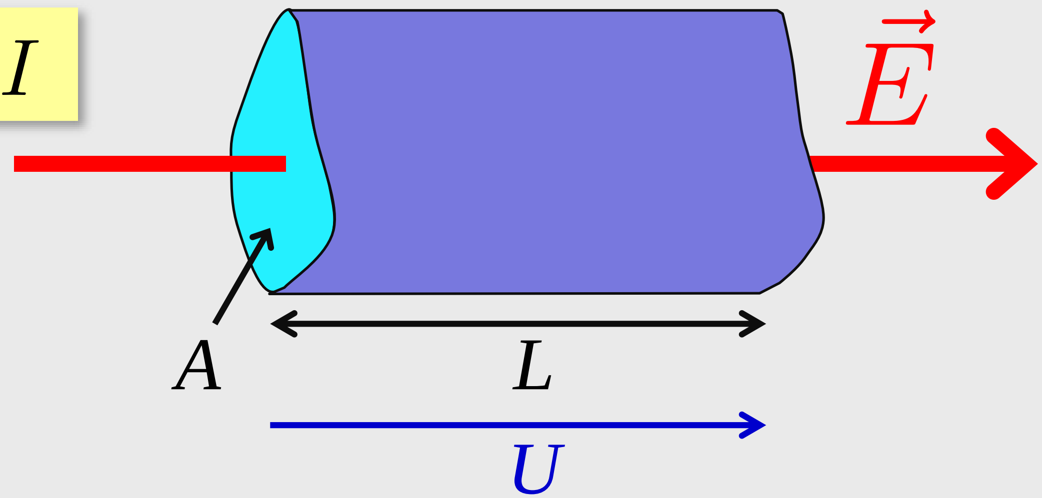
$\vec{E} = \dfrac{\vec{j}}{\sigma_{\text{el}}}$ homogen



$$E = \frac{U}{L} \qquad j = \frac{I}{A} \qquad j = \sigma_{\text{el}} E$$

$$\Rightarrow \quad U = LE = \frac{L}{\sigma_{\text{el}}} j = \frac{L}{\sigma_{\text{el}} A} I \equiv R \cdot I$$

Ohmsches Gesetz $\boxed{U = R \cdot I}$



elektrischer Widerstand $\boxed{R = \dfrac{L}{\sigma_{\mathrm{el}} A}}$

spezifischer Widerstand
(Materialparameter)

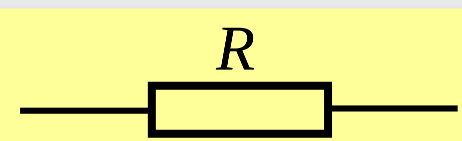
$$\boxed{\rho_s = \frac{1}{\sigma_{\mathrm{el}}}} = R \cdot \frac{A}{L}$$

$$[R] = \mathrm{VA}^{-1} = \Omega = \mathrm{Ohm} \qquad [\rho_{\mathrm{s}}] = \Omega\mathrm{m}$$

Allgemein: Seien U, I = Spannung, Strom zwischen zwei Kontakten. Dann wird der elektrische Widerstand zwischen den Kontakten **definiert** durch:

$$R = \frac{U}{I}$$

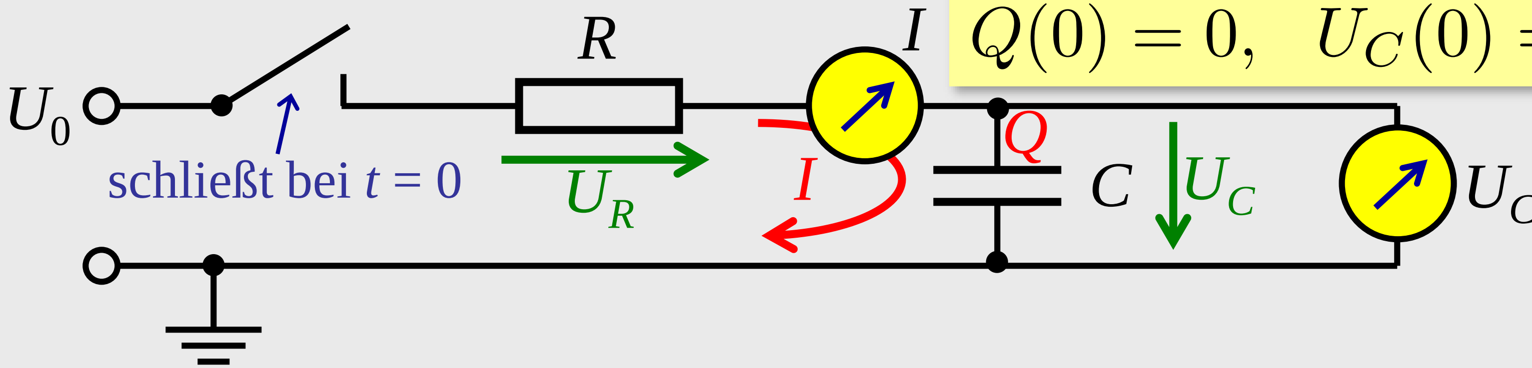
Schaltzeichen



Beispiel: quasistatisches Auf-/Entladen eines Kondensators

$\approx$ Folge statischer Situationen

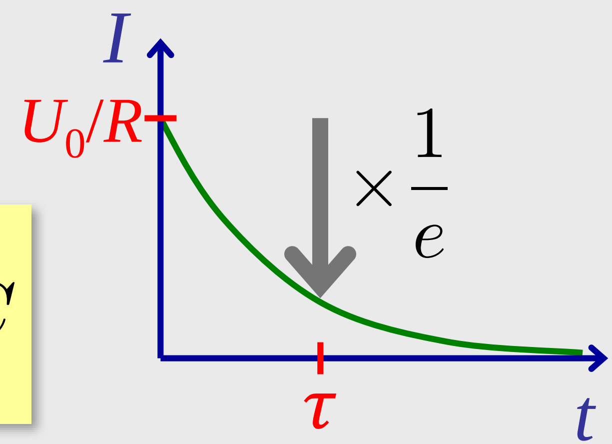
$$Q(0) = 0, \quad U_C(0) = 0$$



$$U_0 = U_R + U_C = RI(t) + \frac{1}{C}Q(t)$$

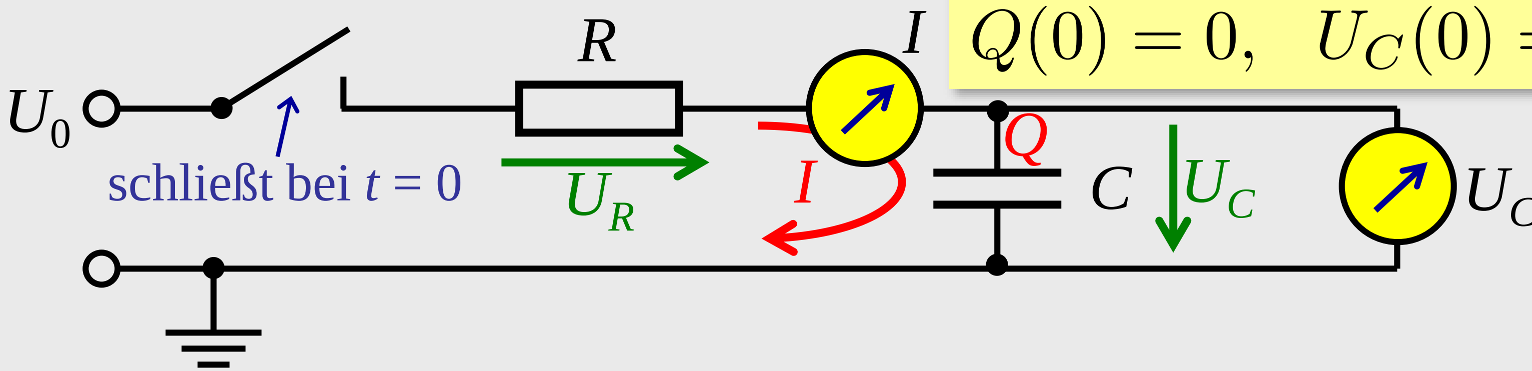
Bemerkung: $\Rightarrow \quad I(0) = \frac{U_0}{R}$

$$0 = R\dot{I} + \frac{\dot{Q}}{C} = R\dot{I} + \frac{I}{C} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dot{I} = -\frac{1}{RC}I}$$

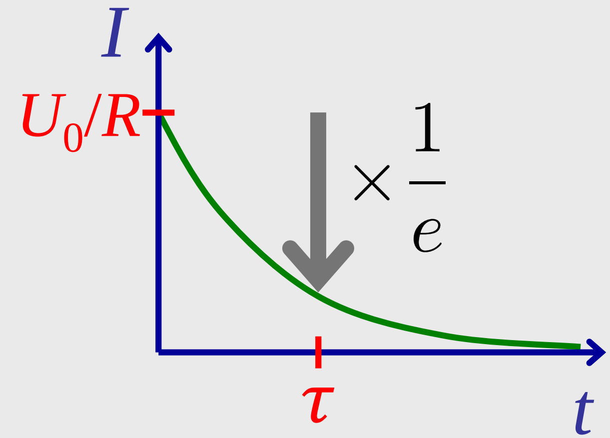


Lösung: $\boxed{I(t) = \frac{U_0}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}}, \quad \boxed{\tau = RC}$

$$Q(0) = 0, \quad U_C(0) = 0$$



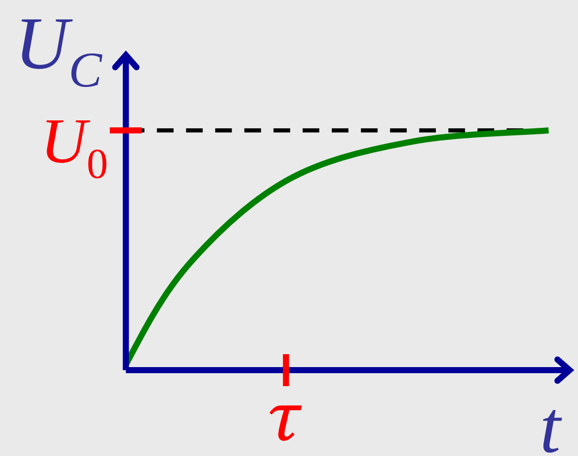
$$\boxed{I(t) = \frac{U_0}{R}\, e^{-\frac{t}{\tau}}}\,, \qquad \boxed{\tau = RC}$$



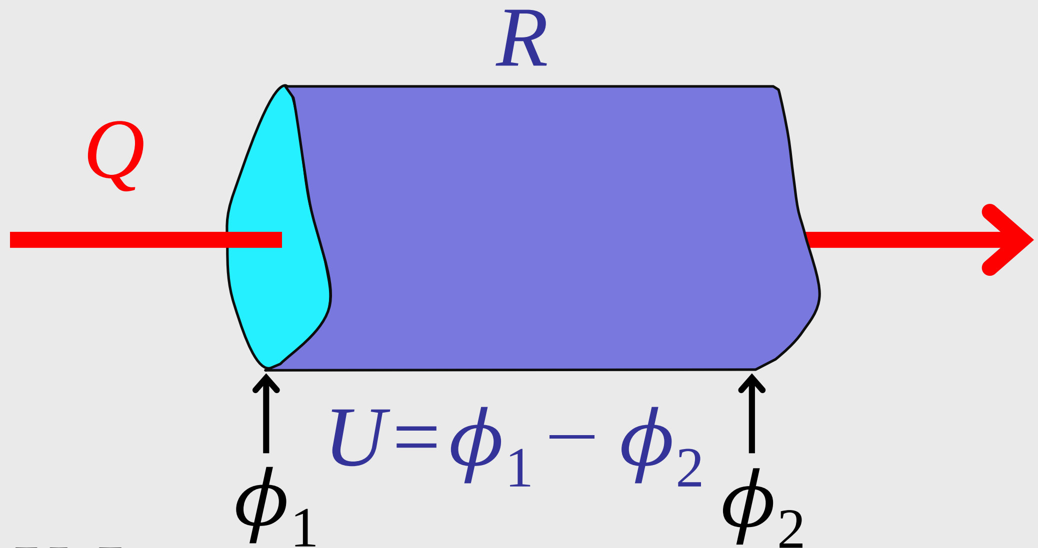
Kondensatorspannung:

$$\boxed{U_C(t) =} \frac{Q(t)}{C} = \frac{1}{C}\int_0^t I(\tilde{t})\, d\tilde{t}$$

$$\boxed{= U_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$$



2.3. Stromleistung und Joulsche Wärme



Arbeit des E-Feldes:

$$W = Q \cdot (\phi_1 - \phi_2)$$
$$= Q \cdot U$$

Elektrische Leistung:

$$P = \frac{dW}{dt} = U \cdot \frac{dQ}{dt} = U\, I$$

U = const.

Umwandlung in Wärme

Ohmsches Gesetz ⇒

$$\boxed{P = U\, I = R I^2 = \frac{U^2}{R}}$$

Einheiten:

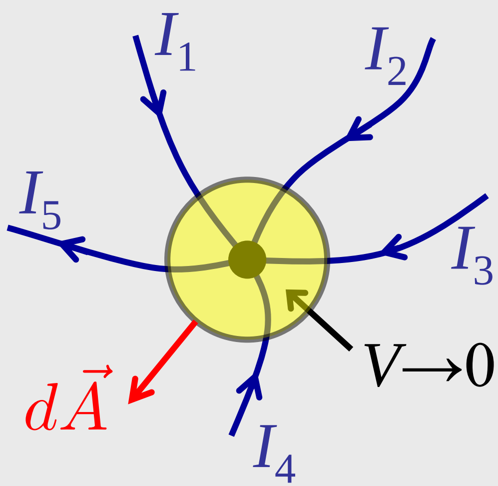
$$[P] = \mathrm{VA} = \mathrm{W} = \mathrm{Watt}$$
$$[W] = \mathrm{Ws}\ , \quad 1\mathrm{Ws} = 1\mathrm{J}$$

$$I = \text{const.} \;\Rightarrow\; P \propto R\ , \qquad U = \text{const.} \;\Rightarrow\; P \propto 1/R$$

2.4. Kirchhoffsche Regeln

Analyse von Netzwerken von Leitern, (allgemeinen) Widerständen, Spannungs- / Stromquellen, …

a) Knotenregel: Knoten = punktförmige Leiterverbindung (ungeladen)



$$I = \oint_{\partial V} \vec{j}\, d\vec{A} \quad \Rightarrow$$

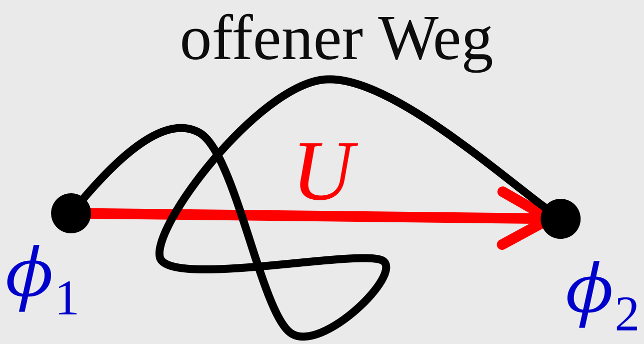
auslaufend: $I > 0$

einlaufend: $I < 0$

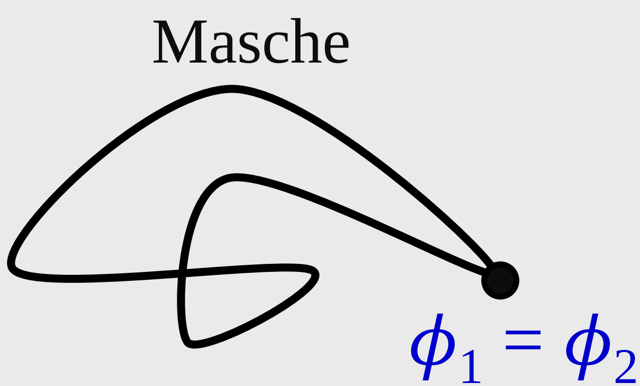
Ladungserhaltung: $Q(V) \equiv 0 \;\Rightarrow\; \sum_i I_i = \oint_{\partial V} \vec{j}\, d\vec{A} = 0$

$$\boxed{\sum_{i \in \text{Knoten}} I_i = 0}$$

b) Maschenregel: Masche = geschlossener Weg



$$U = \int_1^2 \vec{E}\, d\vec{s} = \phi_1 - \phi_2$$

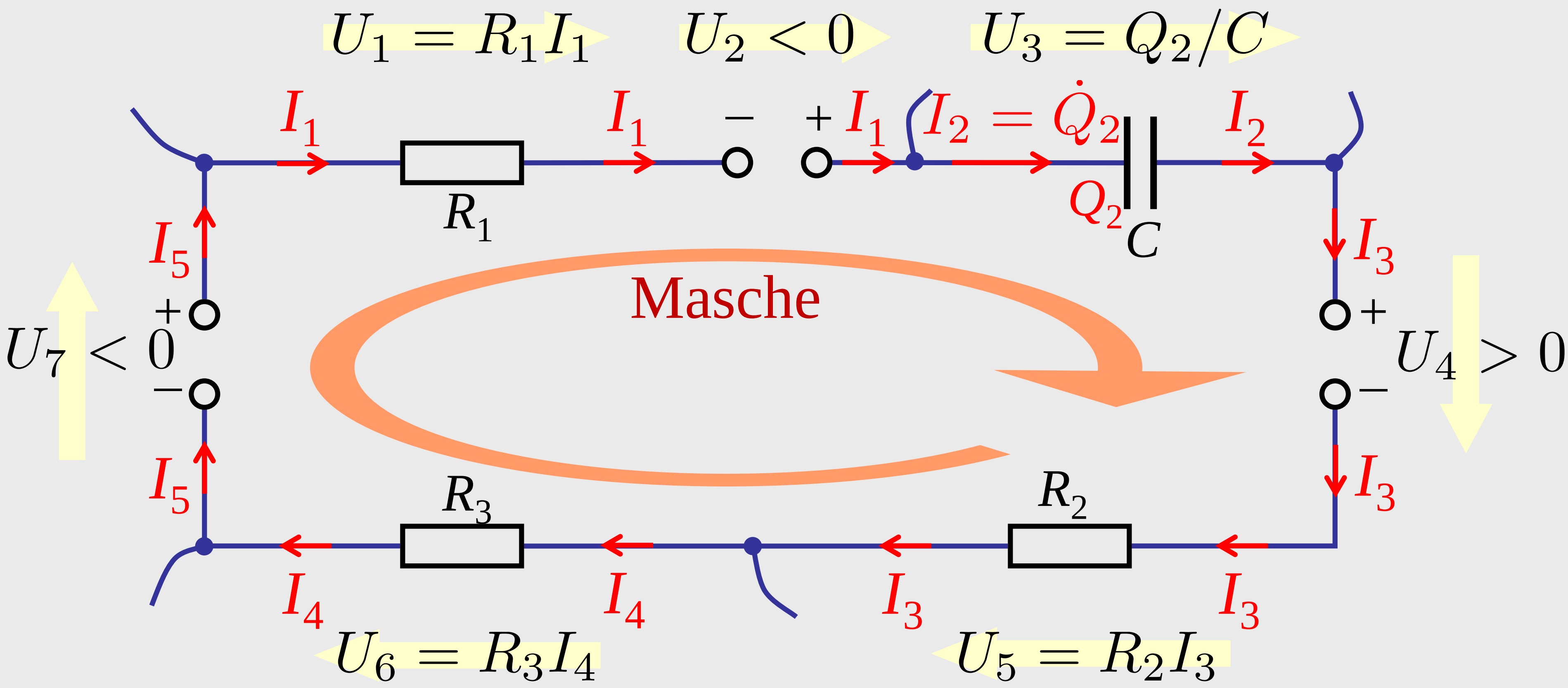


$$U = \oint \vec{E}\, d\vec{s} = 0$$

Zerlegung in Teilspannungen entlang der Masche ⇒

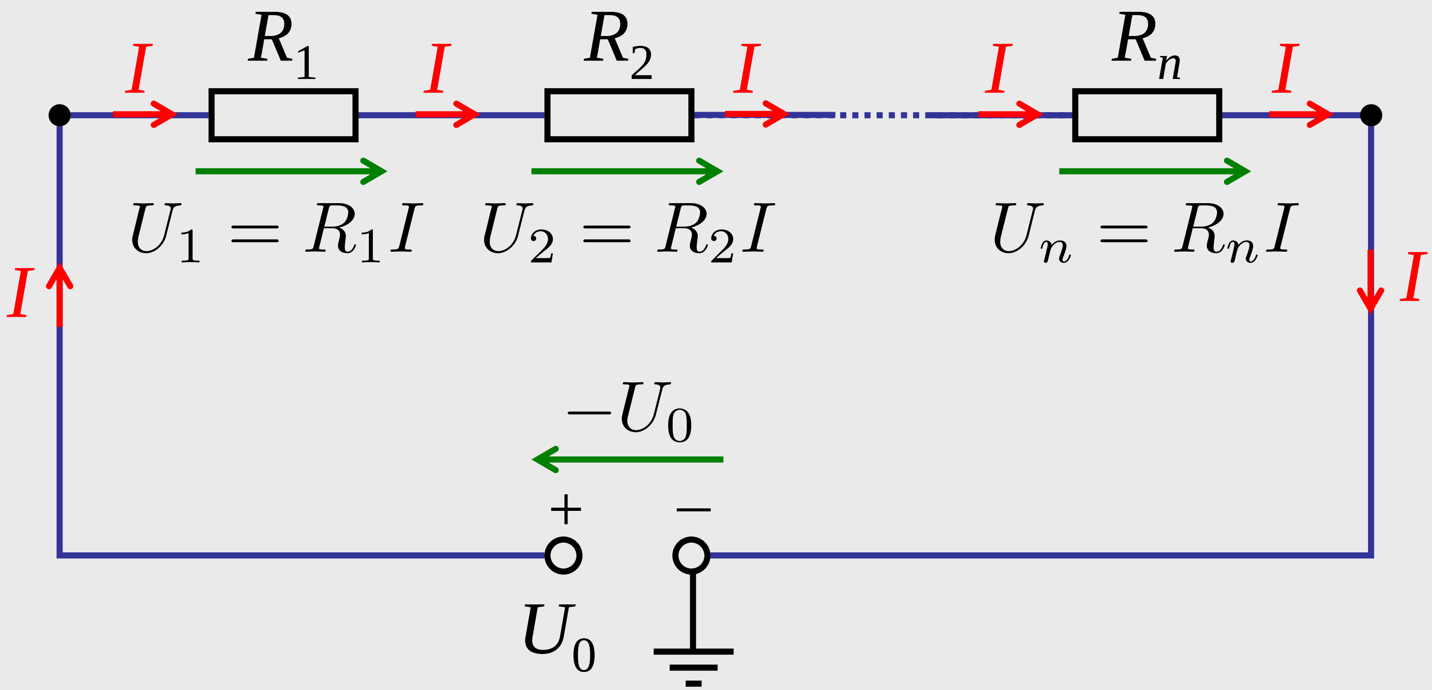
$$\boxed{\sum_{i \in \text{Masche}} U_i = 0}$$

c) Anwendung: Masche = Schleife in der Schaltung



$$R_1 I_1 + U_2 + \frac{Q_2}{C} + U_4 + R_2 I_3 + R_3 I_4 + U_7 = 0$$

Anwendung (1): Reihenschaltung ohmscher Widerstände

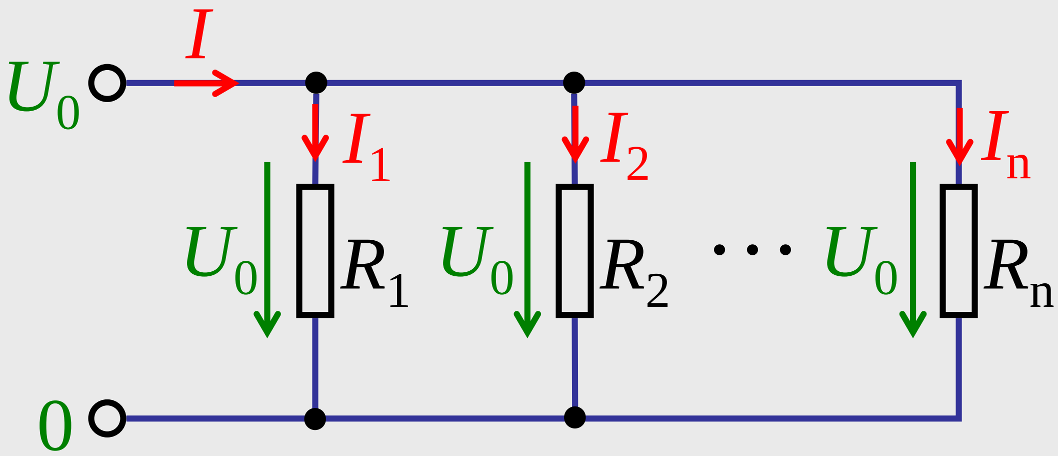


Maschenregel ⇒

$$-U_0 + R_1 I + R_2 I + \ldots + R_n I = 0 \quad \Rightarrow \quad U_0 = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} R_i \right)}_{R_{\mathrm{tot}}} \cdot I$$

$$\boxed{R_{\mathrm{tot}} = \sum_{i=1}^{n} R_i}$$

Anwendung (2): Parallelschaltung ohmscher Widerstände



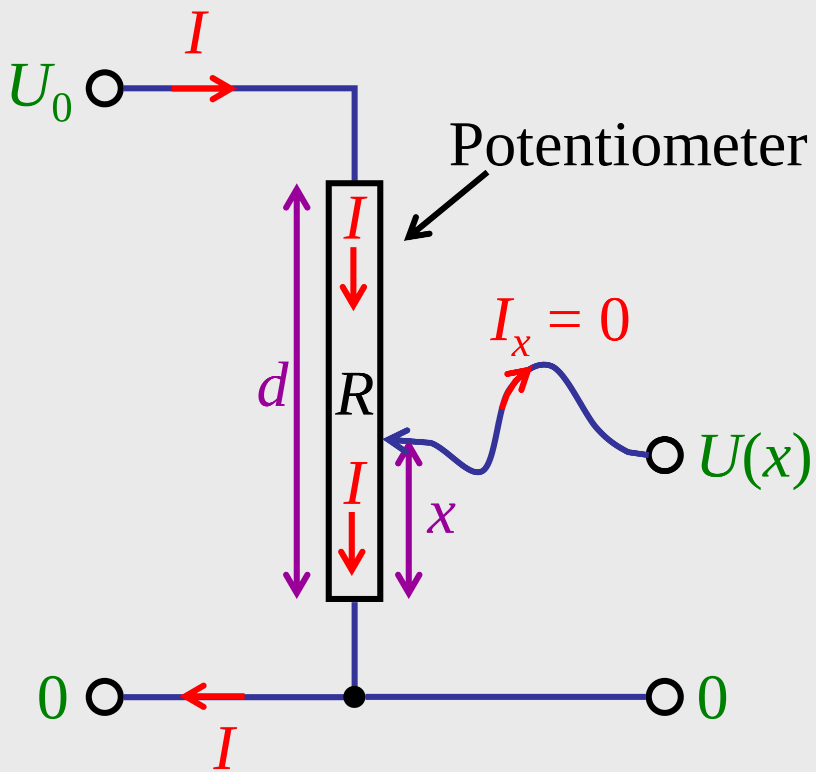
$$I = \frac{U_0}{R_{\text{tot}}}$$

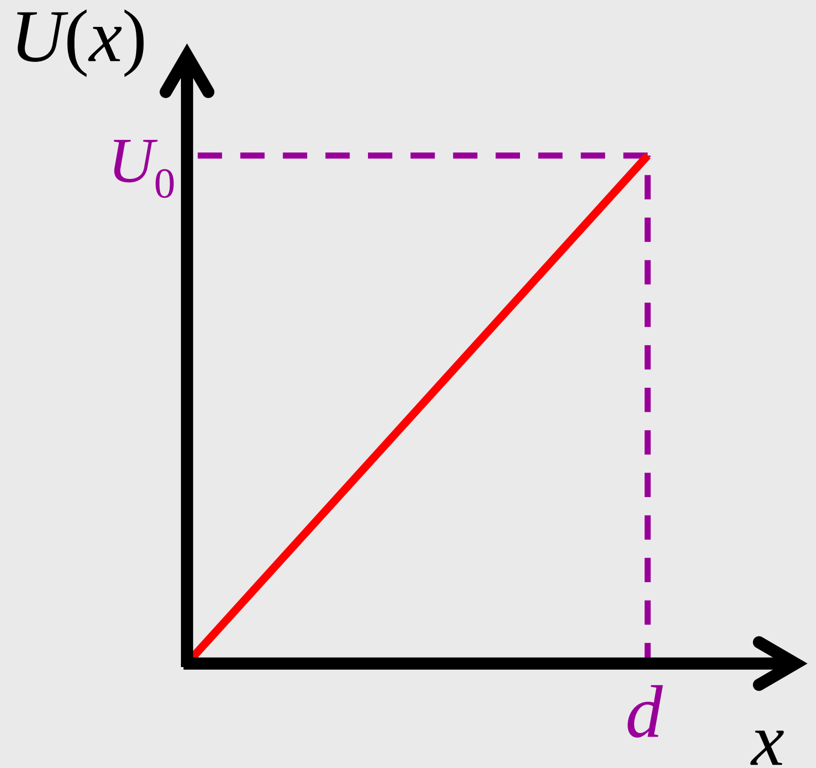
$$I_i = \frac{U_0}{R_i}$$

Knotenregel $\Rightarrow \quad -I + I_1 + I_2 + \ldots + I_n = 0$

$$\frac{U_0}{R_{\text{tot}}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{U_0}{R_i} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{1}{R_{\text{tot}}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}}$$

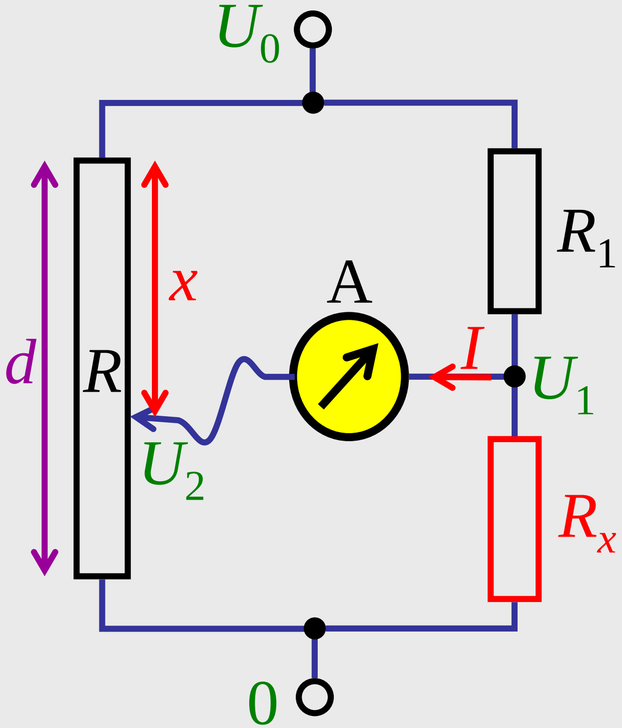
Anwendung (3): Spannungsteiler





$$\boxed{U(x) =} I \cdot \left(\frac{x}{d} \cdot R \right) \boxed{= \frac{x}{d} \cdot U_0}$$

Anwendung (4): Wheatstonesche Brückenschaltung



<u>Nullabgleich:</u>

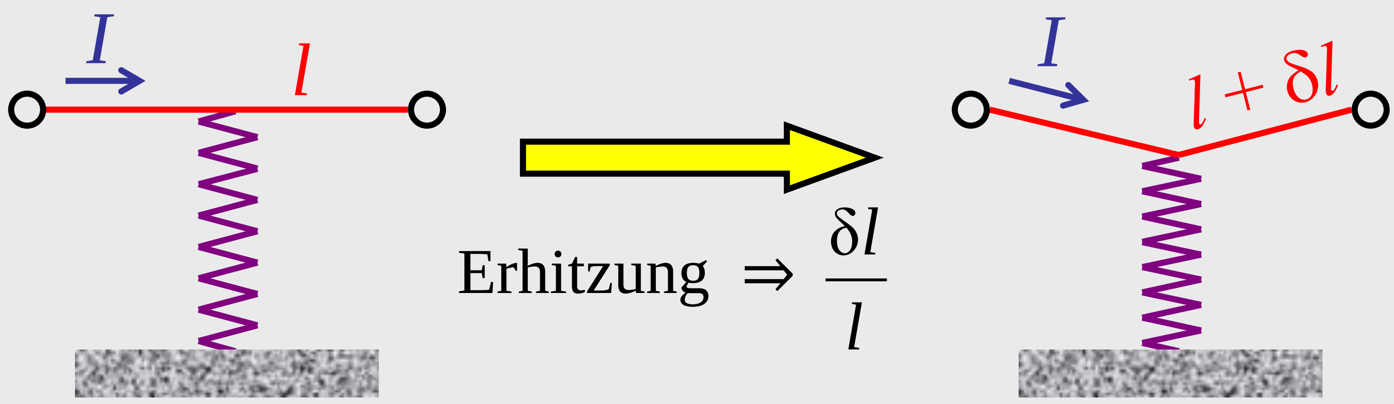
$$I = 0 \quad \Leftrightarrow \quad U_1 = U_2$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{R_1}{R_x} = \frac{x}{d - x}$$

$$\boxed{R_x = \frac{d - x}{x} \cdot R_1}$$

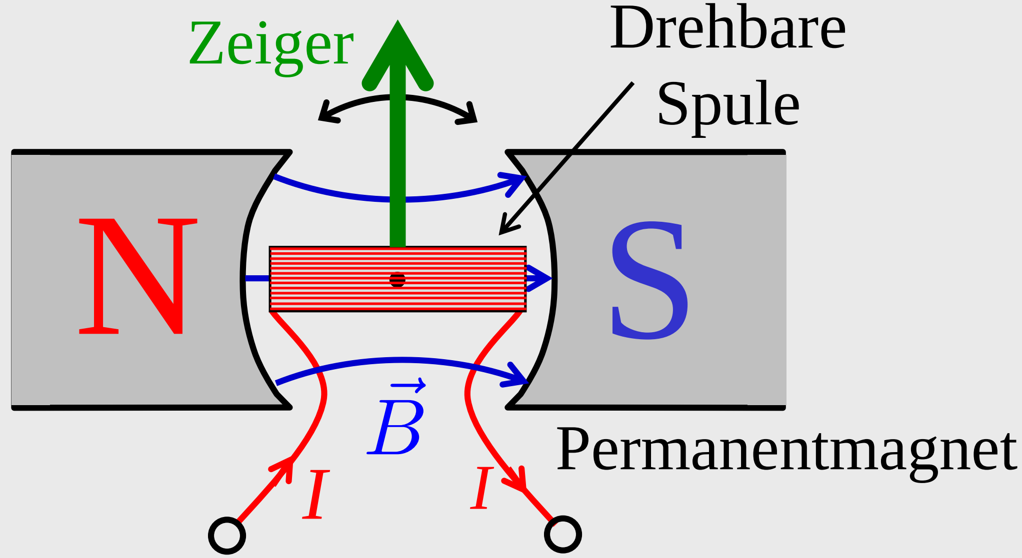
2.5. Messgeräte „Amperemeter"

a) Wärmewirkung: Hitzdraht-Amperemeter



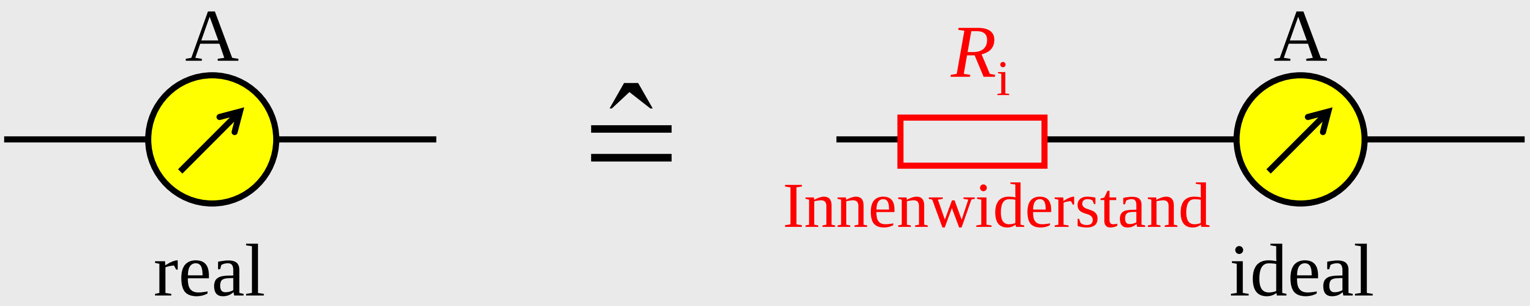
b) Magnetische Wirkung: Galvanometer

Drehspulgerät:

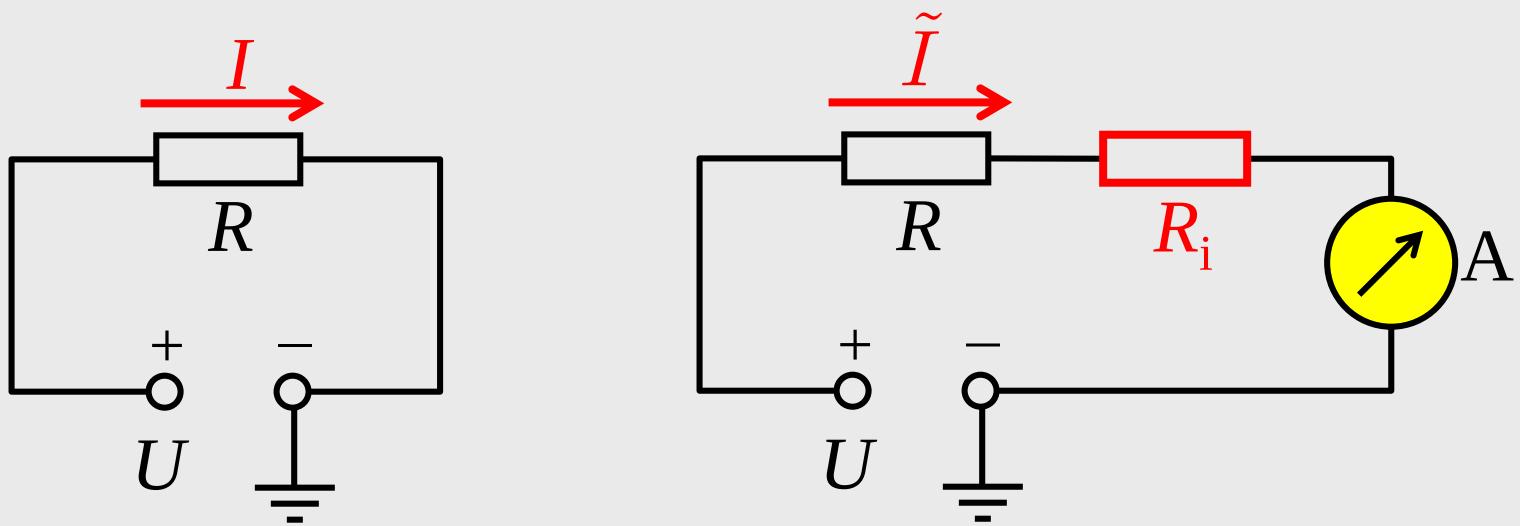


(analog: Dreheisengerät)

Innenwiderstand des Amperemeters:



Beispiel:

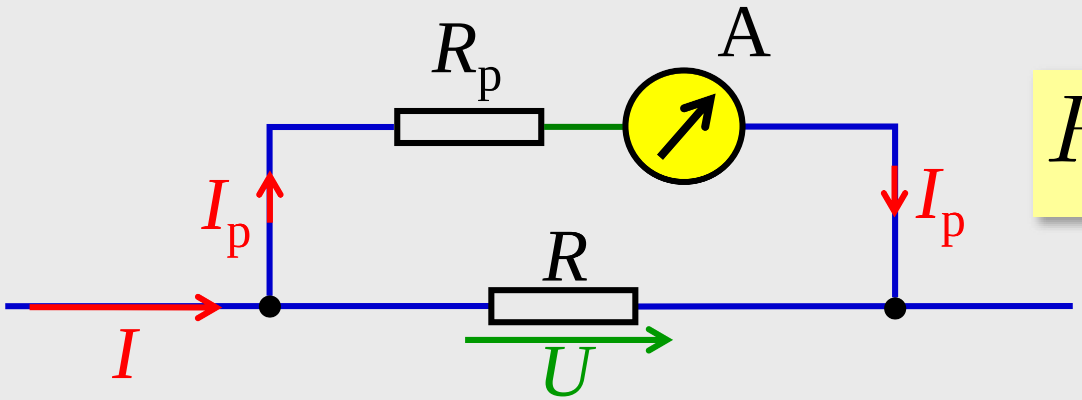


$$I = \frac{U}{R}$$

$$\tilde{I} = \frac{U}{R + R_\mathrm{i}} < I$$

$\Rightarrow$ R_i sollte möglichst klein sein!

Indirekte Spannungsmessung mit Amperemetern:



$$R_\mathrm{p} \gg R$$

Spannung ohne Messgerät: $U_0 = RI$ gesucht!

Spannung mit Messgerät: $U = R\,(I - I_\mathrm{p}) \approx RI = U_0$

$U = R_\mathrm{p} I_\mathrm{p}$ gemessen!

$$U_0 \approx R_\mathrm{p} I_\mathrm{p}$$

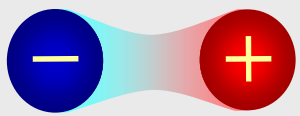
⇒ Innenwiderstand eines Voltmeters sollte möglichst groß sein!

2.6. Elektrolytische Leitung von Strom

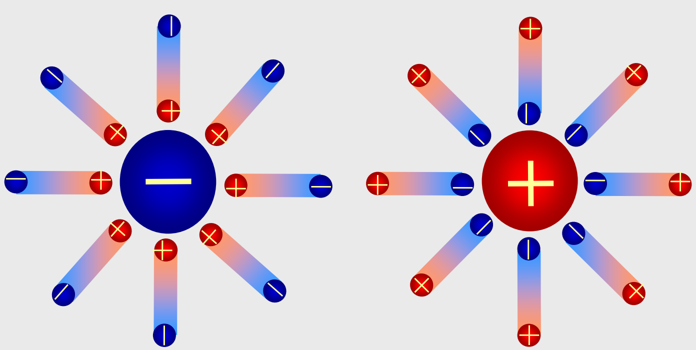
Elektrolyt: Flüssigkeit mit frei beweglichen Ionen (geladene Moleküle)
z.B. Salzlösungen, Säuren, Laugen

Bildung eines Elektrolyts:

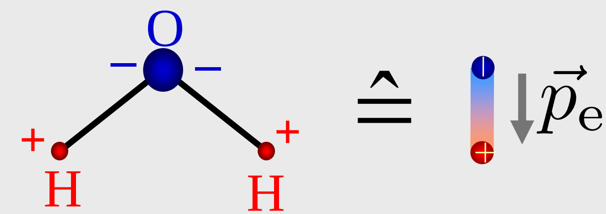
Molekül mit Ionenbindung



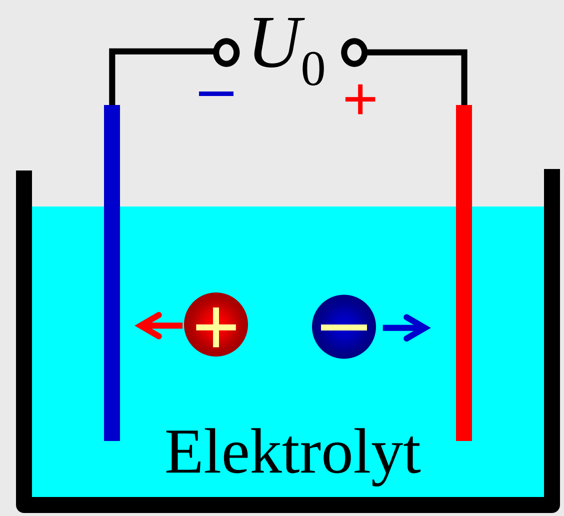
Dissoziation
(Aufspaltung in Wasser da energetisch günstiger)



Anion   Kation



Wasser-Molekül

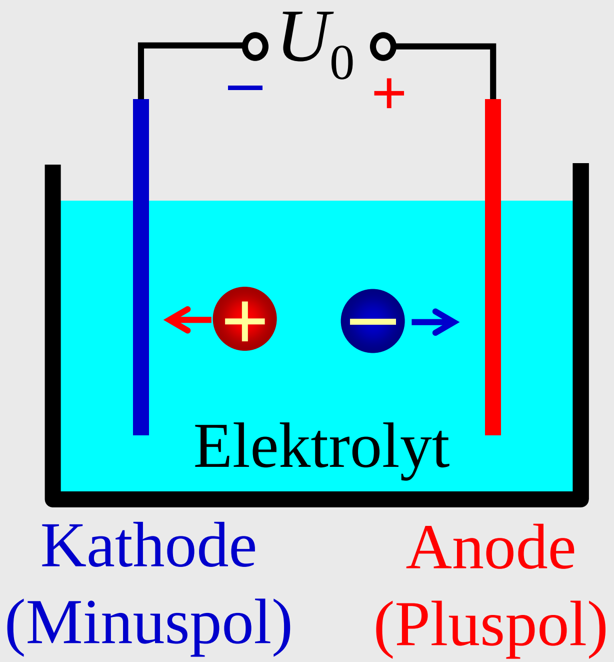


Kathode (Minuspol)

Anode (Pluspol)

Neutralisierung der Ionen an Elektroden ⇒

- Ablagerungen auf Elektroden
- Aufsteigen von Gasbläschen an Elektroden
- Auflösen von Elektroden



Spezialfall: Dissoziation von Wasser

$$H_2O \rightarrow H^+ + OH^-$$

⇒ (geringe) Leitfähigkeit von Wasser

Erhöhung der Leitfähigkeit durch Zugabe von Salz etc.

Knallgaserzeugung mit Kochsalzlösung:

Dissoziation von Kochsalz: $NaCl \longrightarrow Na^+ + Cl^-$

Kathode: $2\,Na^+ + 2\,H_2O + 2\,e^- \longrightarrow 2\,NaOH + H_2\uparrow$

Anode: $4\,Cl^- + 2\,H_2O \longrightarrow 4\,HCl + O_2\uparrow + 4\,e^-$

$\Rightarrow$ 2 H_2-Moleküle + 1 O_2-Molekül $\Rightarrow$ Knallgas

Knallgaserzeugung mit verdünnter Schwefelsäure:

Dissoziation Schwefelsäure: $H_2SO_4 \longrightarrow 2\,H^+ + SO_4^{2-}$

Kathode: $2\,H^+ + 2\,e^- \longrightarrow H_2\uparrow$

Anode: $SO_4^{2-} + H_2O \longrightarrow H_2SO_4 + \frac{1}{2}O_2\uparrow + 2\,e^-$

$\Rightarrow$ 2 H_2-Moleküle pro O_2-Molekül $\Rightarrow$ Knallgas

Kupferbeschichtung (Rostschutz):

Dissoziation Kupfersulfat: $CuSO_4 \rightarrow Cu^{2+} + SO_4^{2-}$

Kathode (z.B. Nickel): $Cu^{2+} + 2\,e^- \rightarrow Cu$ (galvanische Beschichtung)

Anode: $SO_4^{2-} \rightarrow SO_4 + 2\,e^-$

a) Kohlestab $2\,H_2O + 2\,SO_4 \rightarrow 2\,H_2SO_4 + O_2\uparrow$

b) Kupfer (Opferelektrode) $Cu + SO_4 \rightarrow CuSO_4$ (Auflösung)

Bleibaum:

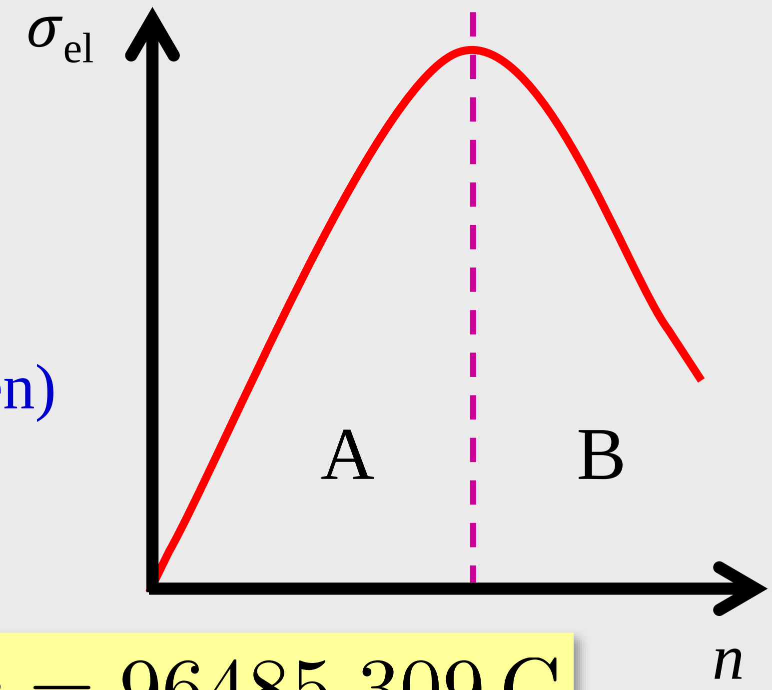
Dissoziation Bleiacetat: $Pb(CH_3COO)_2 \cdot 3H_2O$

$\hookrightarrow Pb^{2+}$ $\hookrightarrow CH_3COO^-$

Bleikathode: Pb – Ablagerung (Bleibaum)

Bleianode (Opferanode): $Pb + 2\,CH_3COO^- \rightarrow Pb(CH_3COO)_2 + 2\,e^-$

Leitfähigkeit und Ionenkonzentration:



A: Ladungsträgerdichte steigt

B: Beweglichkeit nimmt ab
(Anziehung von Kationen und Anionen)

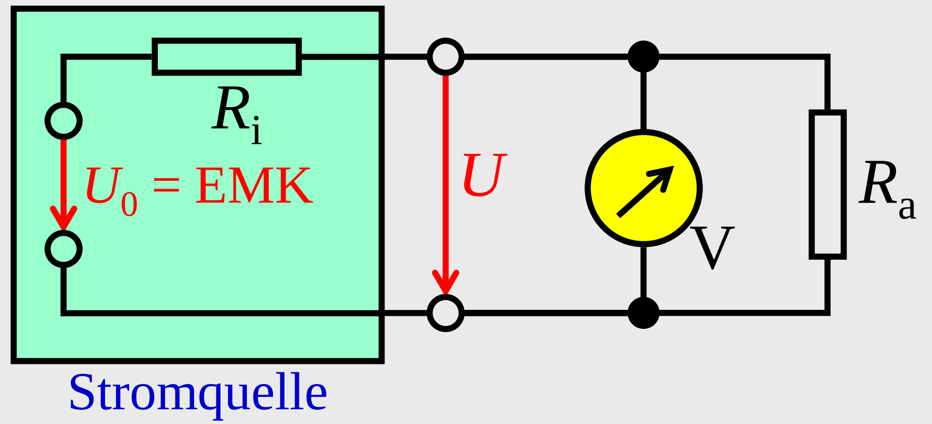
Def.: Faraday-Konstante $\boxed{F = N_{\mathrm{A}} \cdot e = 96485{,}309\,\mathrm{C}}$

Folgerung: 1 Mol eines Ions mit Ladg. $Z{\cdot}e$ transportiert die Ladg. $Z{\cdot}F$

Definition: Elektrochemisches Äquivalent = Proportionalitätsfaktor zwischen abgeschiedener Masse und transportierter Ladung

$$\boxed{E_{\mathrm{C}} = \frac{m}{Q} = \frac{M_{\mathrm{mol}}}{ZF}}$$

2.7. Stromquellen



Klemmspannung:

$$U = U_0 \cdot \frac{R_a}{R_a + R_i}$$

U_0 heißt ElektroMotorische Kraft

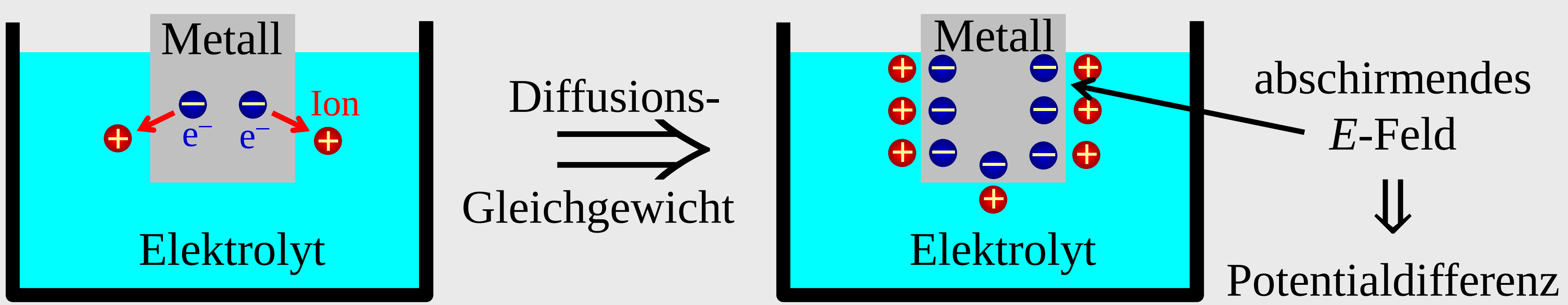
Messung von $U(R_a)$ $\Rightarrow$ Messung von R_i und EMK

Beispiele für Stromquellen:

a) Elektrodynamische Generatoren (Dynamo, → Elektrodynamik, s. u.)

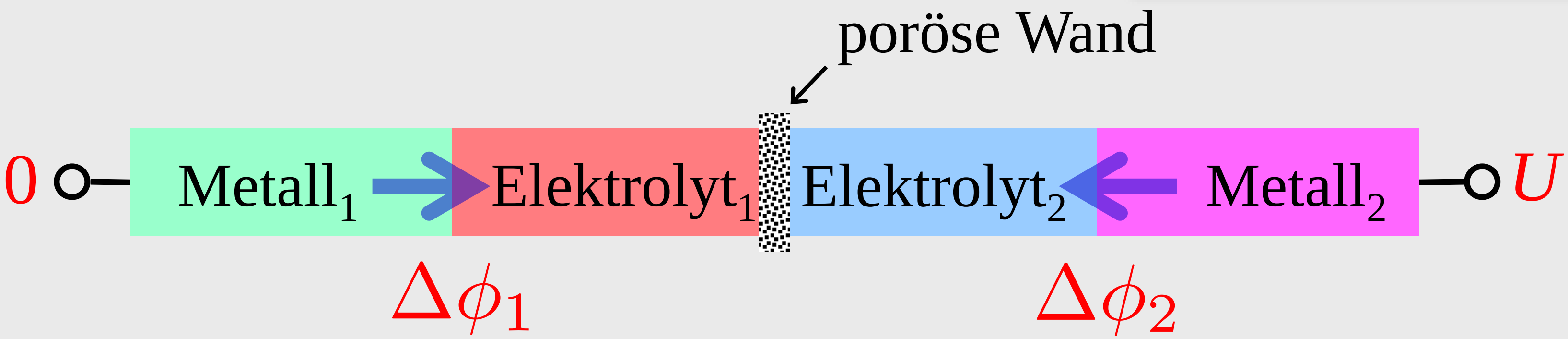
b) Solarzellen (→ Halbleiterphysik)

c) Galvanische Elemente: Lösung von Metall in Elektrolyt



Galvanisches Element (Prinzip):

$$U = \Delta\phi_1 - \Delta\phi_2$$



Referenzelektrode: H_2-umspülte Platinelektrode in $\underbrace{\text{1-normaler Säure}}_{1\ \text{Mol}\ H^+/\ell}$

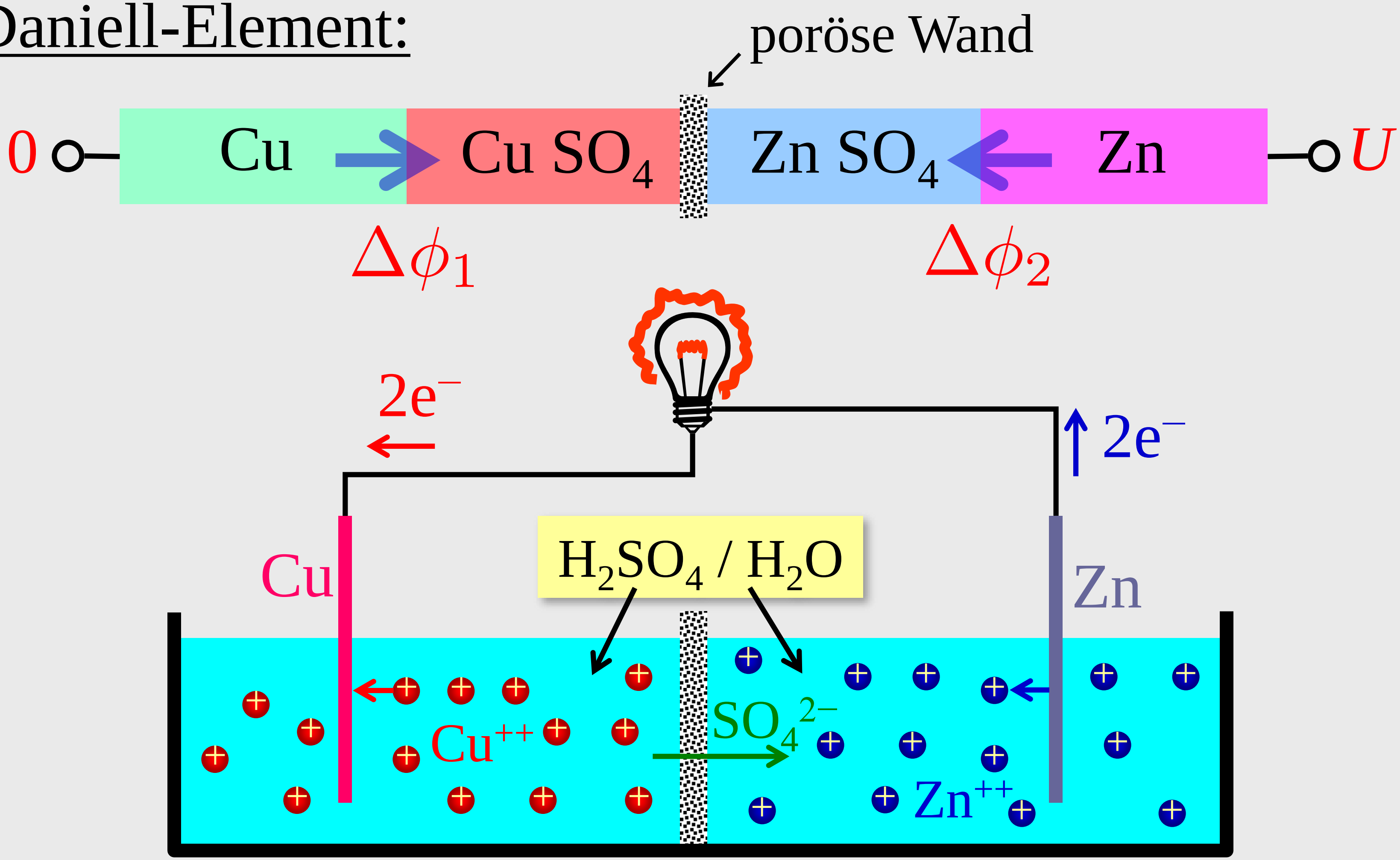
Spannungsreihe: Galvanische Spannung gegenüber Referenzelektrode

(Metalle in $\underbrace{\text{1-normalem Elektrolyt}}_{1\ \text{Mol Metallionen}/\ell}$ mit gleichem Metallion)

Edle Metalle: $U > 0$ (Cu, Ag, Au,…) geben schwer Elektronen ab

Unedle Metalle: $U < 0$ (Fe,…) geben leicht e^- ab $\Leftrightarrow$ oxydationsfreudig

Daniell-Element:

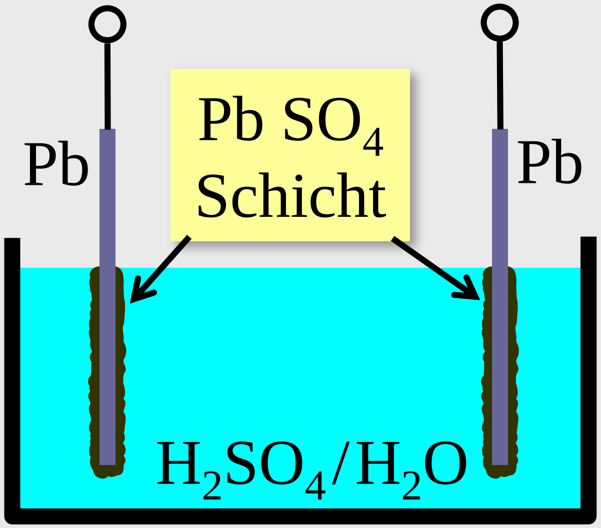


$$\Delta\phi = \Delta E = E(\text{ Cu-Abscheidung }) - E(\text{ Zn-Auflösung })$$

Bemerkung: $CuSO_4$ als gemeinsames Elektrolyt möglich, aber Zn-Elektrode würde sich mit Kupfer überziehen!

d) Akkumulatoren:
Wiederaufladbare Stromquellen

Beispiel: Bleiakku



Aufladen:

Anode: $PbSO_4 + 2\,H_2O \longrightarrow PbO_2 + H_2SO_4 + 2\,H^+ + 2\,e^-$

Kathode: $PbSO_4 + 2\,H^+ + 2\,e^- \longrightarrow Pb + H_2SO_4$

$\Rightarrow$ Anode = PbO_2 ; Kathode = Pb

Entladen:

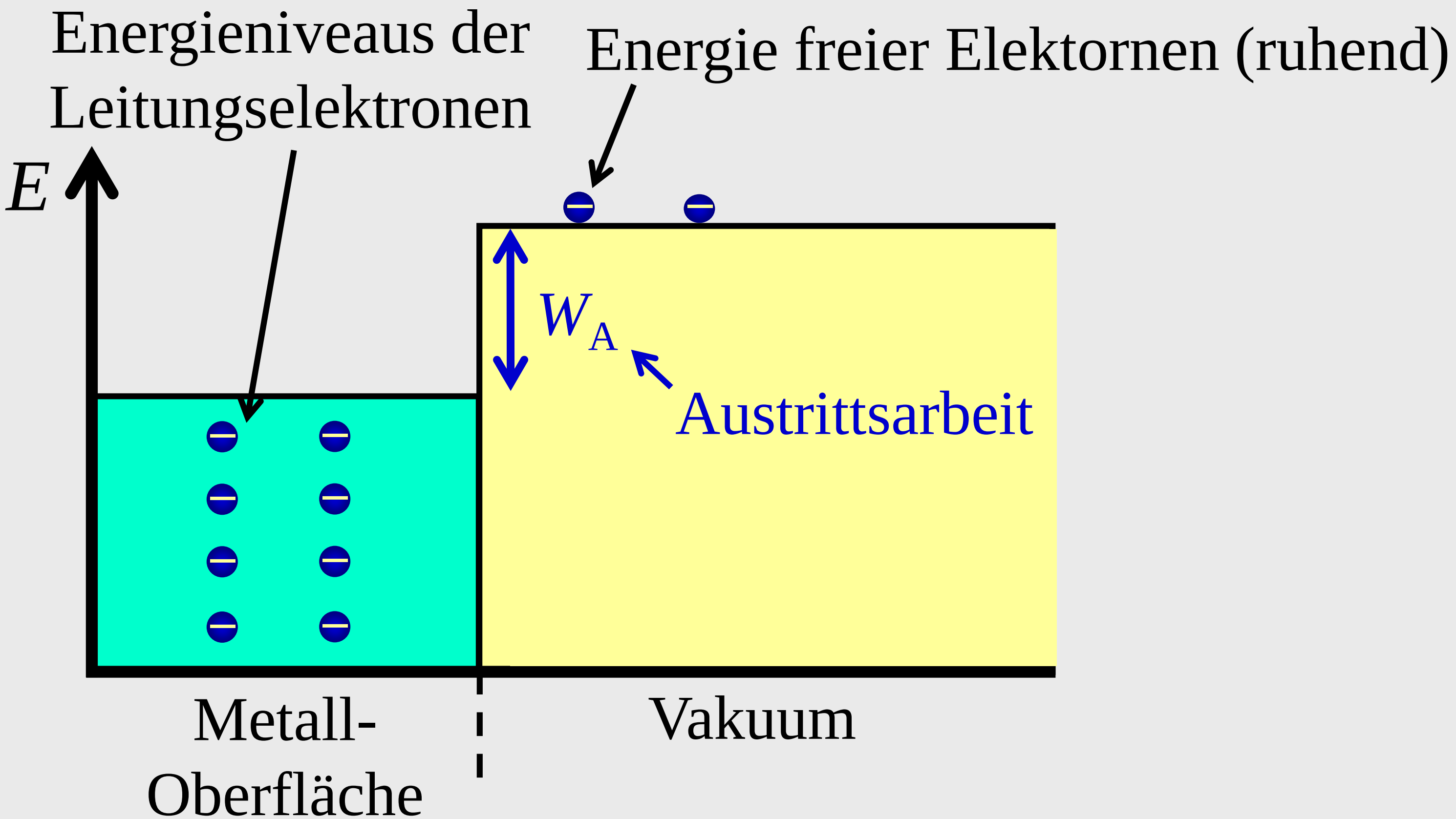
Anode: $PbO_2 + SO_4^{2-} + 4\,H^+ + 2\,e^- \longrightarrow PbSO_4 + 2\,H_2O$

Kathode: $Pb + SO_4^{2-} \longrightarrow PbSO_4 + 2\,e^-$

$\Rightarrow$ Anode = $PbSO_4$; Kathode = $PbSO_4$

Analog: Trockenbatterie (Leclanché-Element)

e) Thermoelektrizität

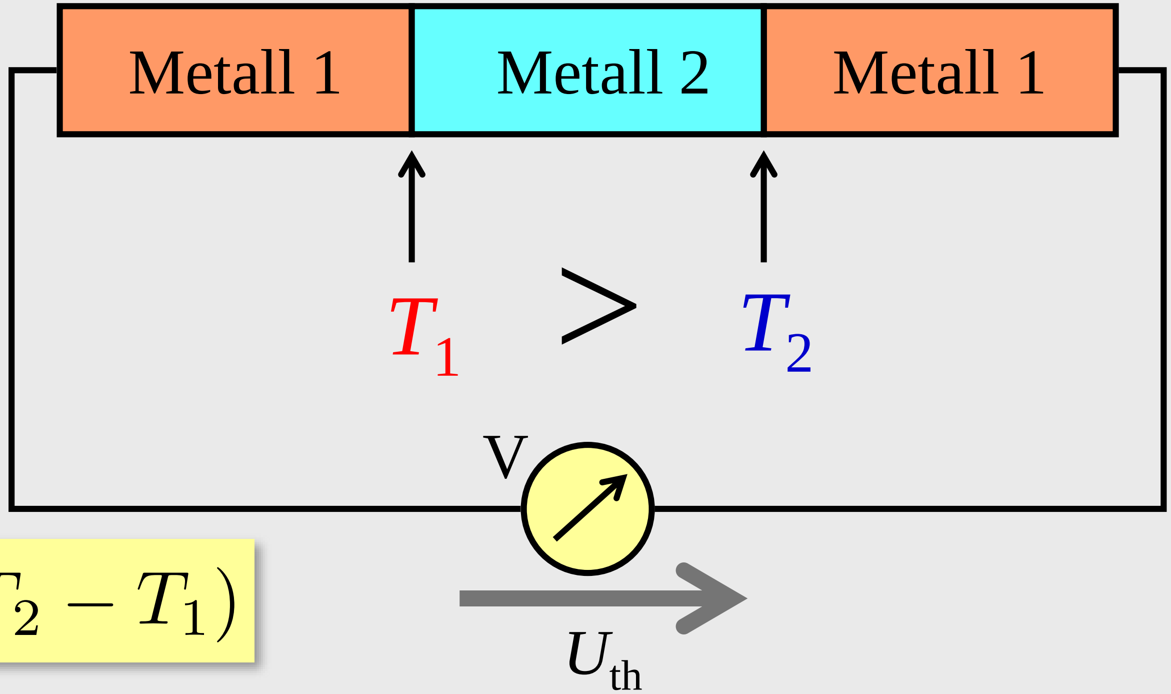


Def.: Kontaktpotential $U_{12} = \Delta W_A$ zwischen zwei sich berührenden Metallen 1, 2

stark Temperatur-abhängig

Thermoelement:

(Seebeck-Effekt)



Thermospannung:

$$U_{\mathrm{th}} = a \cdot \Delta T = a\,(T_2 - T_1)$$

Peltier-Effekt: