

3. Magnetostatik

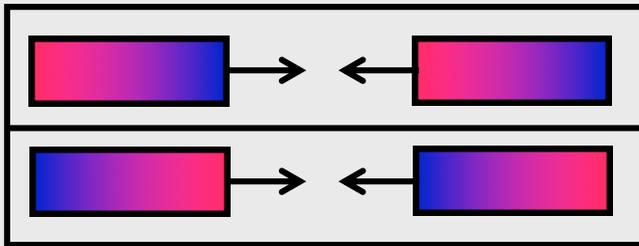
3.1. Permanentmagnete

Altertum: Fund magnetischer Steine bei Magnesia (Kleinasien)

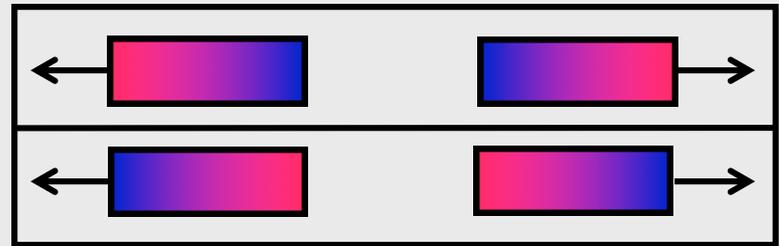
Heute: **Magnetfelder** \leftrightarrow { elektrische Ströme
magnetische Materialien \leftrightarrow
mikroskopische Kreisströme und Spins

Empirische Befunde:

a) Es gibt zwei **magnetische Pole**: **N (Nord)** **S (Süd)**



Anziehung



Abstoßung

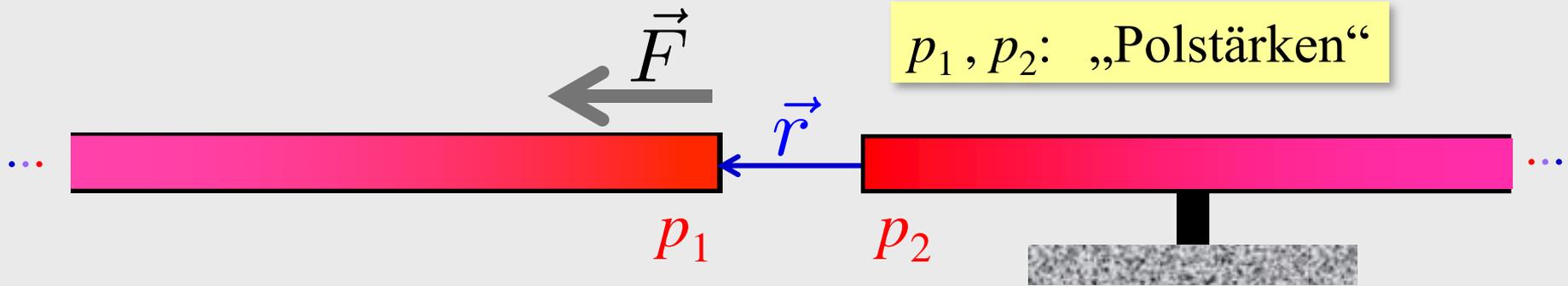
b) Es wurden bisher **keine magnetischen Monopole** beobachtet



\Leftrightarrow Magnetfeldlinien sind stets **geschlossen**, d.h. sie enden nie

Empirisches magnetisches Kraftgesetz:

sehr lange Magnetstäbe \rightarrow quasi isolierte Magnetpole



Analogie zum Coulomb-Gesetz:

$$\vec{F} = f \cdot \frac{p_1 p_2}{r^2} \cdot \vec{e}_r$$

Definition: $f = \frac{1}{4\pi\mu_0}$ mit

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$$

μ_0 = magnetische Permeabilitätskonstante (Zahlenwert aus Def. von 1 A)

Folge: Quantifizierung der Polstärke $[p] = \text{Vs}$

analog zur elektrischen Ladung $[Q] = \text{As}$

Feldkonzept (im Vakuum): $p_2 \rightarrow 0$ ist **Probepol** im **Magnetfeld** von p_1

Definition: **Magnetische Erregung**

$$\vec{H}(\vec{r}) = \lim_{p_2 \rightarrow 0} \frac{\vec{F}(\vec{r})}{p_2}$$

$$[H] = \text{Am}^{-1}$$

Definition: **Magnetische Feldstärke**

$$\vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \cdot \vec{H}(\vec{r})$$

$$[B] = \text{Vsm}^{-2}$$

Einheiten der magnetischen Feldstärke:

SI: $1\text{T} = 1\text{Tesla} = 1\text{Vsm}^{-2}$ **cgs-System:** $1\text{G} = 1\text{Gau\ss} = 10^{-4}\text{T}$

Beispiele:

- Erdmagnetfeld (Oberfläche) $\approx 20\mu\text{T}$
- NMR-Tomograph: $\approx 1\text{T}$
- Supraleitende Magnete (Beschleuniger): $\approx 10\text{T}$
- Neutronensterne (Oberfläche): $\approx 10^8\text{T}$

3.2. Magnetfelder stationärer Ströme

Beobachtung:

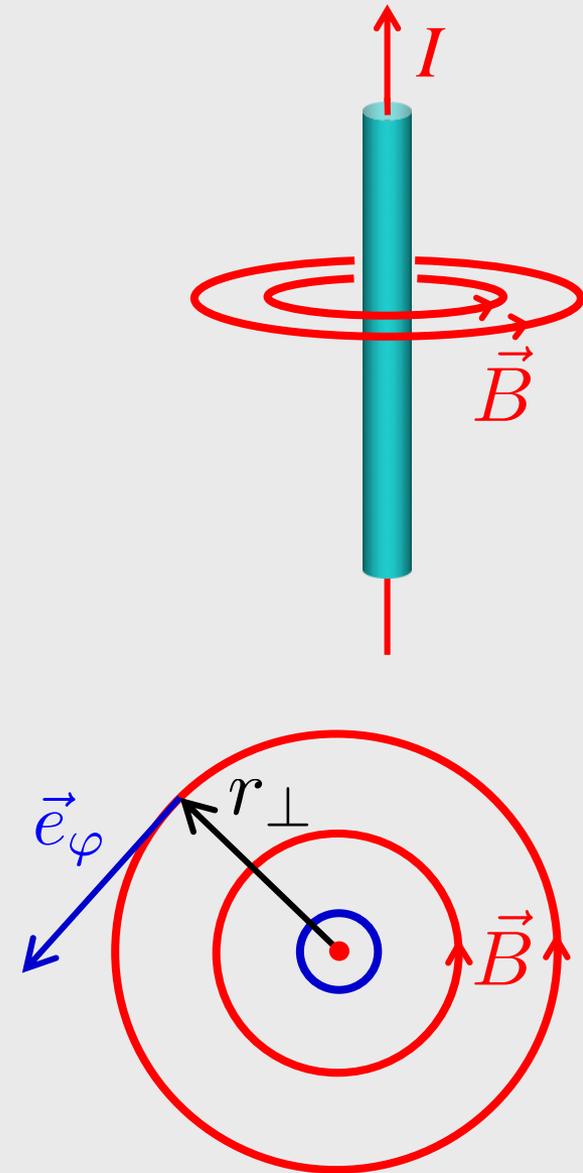
- Stationäre Ströme erzeugen **Wirbelfelder**
- Feldrichtung wechselt mit Stromrichtung
- Feldrichtung aus „Rechte-Hand-Regel“
- Quantitative Messung

$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{r_{\perp}} \cdot \vec{e}_{\varphi}$$

Folgerung (→ Tafel):

$$\oint \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 I$$

beliebiger geschlossener
Weg um Strom I



Empirische Beobachtung: Dies ist kein Zufall, sondern gilt für beliebige Stromkonfigurationen \Rightarrow

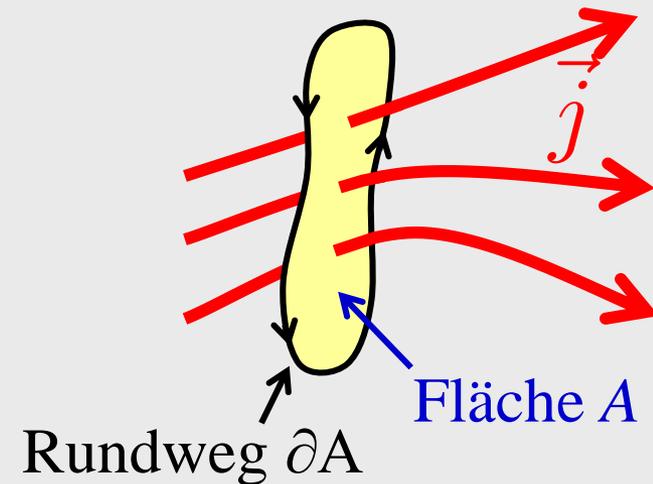
Ampèresches Gesetz

$$\oint_{\partial A} \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 I(A)$$

mit

$$I(A) = \int_A \vec{j} d\vec{A}$$

Das Wegintegral des Magnetfeldes um den Rand einer beliebigen Fläche ist proportional zum gesamten Strom, der diese Fläche durchsetzt (Vorzeichen gemäß Umlaufsinn und Rechte-Hand-Regel)



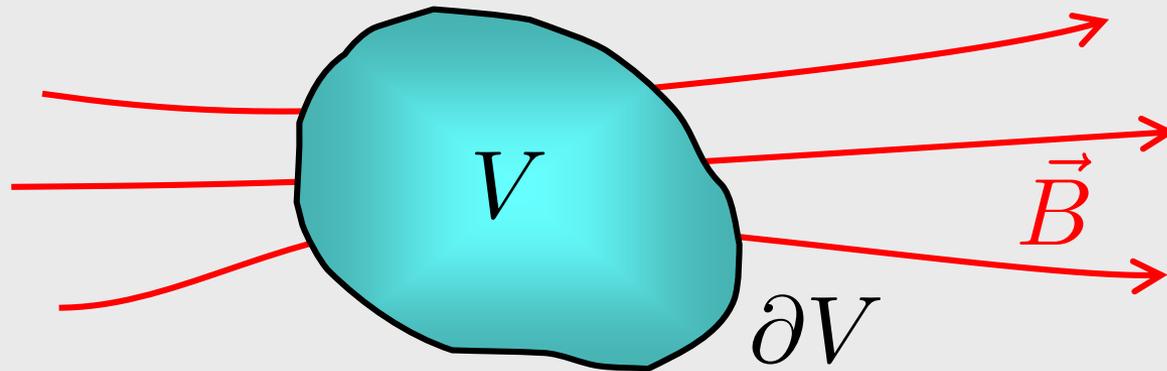
3.3. Feldgleichungen

Beobachtung 1: es gibt keine magnetischen Monopole

⇔ das Magnetfeld ist quellenfrei

⇔ magnetische Feldlinien sind geschlossen

⇔ jede Feldlinie, die in ein beliebiges Volumen eintritt, verlässt dieses auch wieder



Folgerung: Der magnetische Fluss durch die Oberfläche jedes Volumens ist Null:

$$\Phi_{\text{m}} (\partial V) \equiv \oint_{\partial V} \vec{B} d\vec{A} = 0$$

$$\Phi_{\text{m}}(\partial V) \equiv \oint_{\partial V} \vec{B} d\vec{A} = 0$$

Umformulierung mit dem Gaußschen Integralsatz:

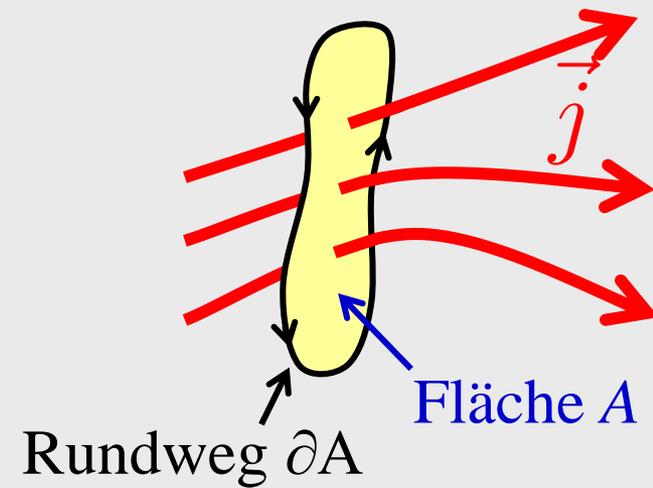
$$0 = \oint_{\partial V} \vec{B} d\vec{A} = \int_V \text{div} \vec{B} dV \quad \text{für jedes Volumen}$$

Folgerung: Feldgleichung 1

$$\text{div} \vec{B} = 0$$

Beobachtung 2: Ampèresches Gesetz

$$\oint_{\partial A} \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 \int_A \vec{j} d\vec{A}$$



Umformulierung mit dem Stokesschen Integralsatz:

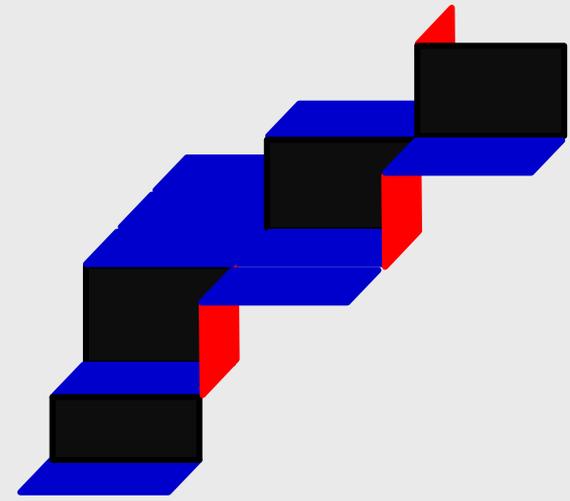
$$\mu_0 \int_A \vec{j} d\vec{A} = \oint_{\partial A} \vec{B} d\vec{s} = \int_A \text{rot} \vec{B} d\vec{A} \quad \text{für jede Fläche}$$

Folgerung: Feldgleichung 2

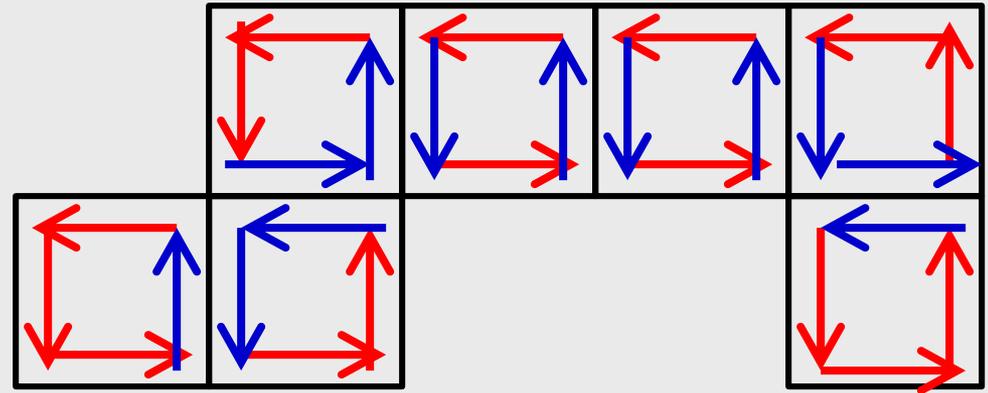
$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

Intermezzo: Zum Stokesschen Satz

Zerlege Fläche in viele infinitesimale
Kästchen K_1, K_2, K_3, \dots



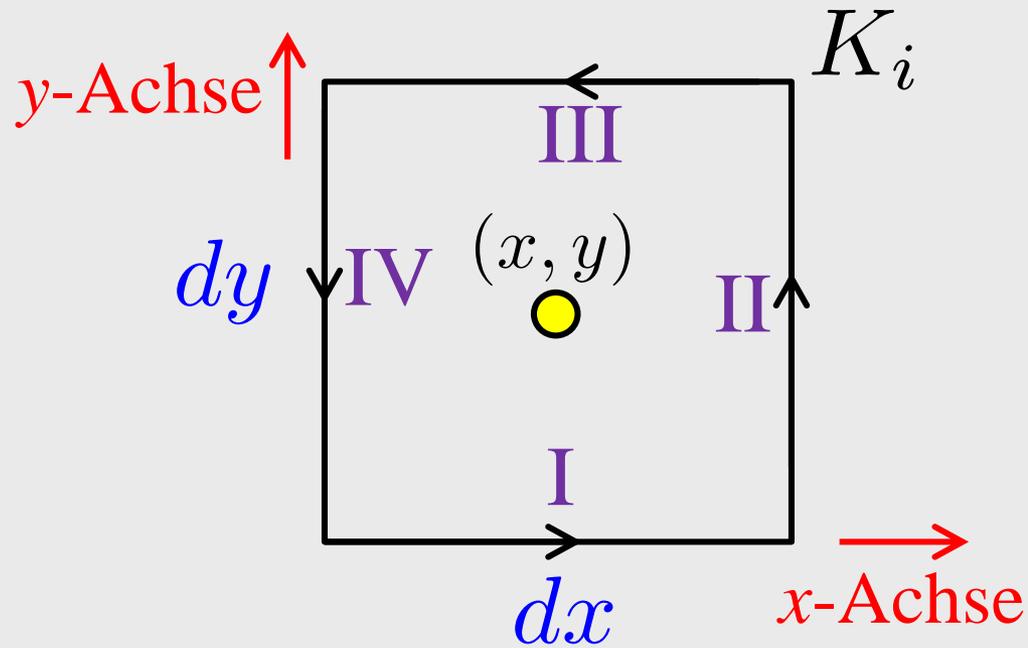
Wegintegrale über innere
Kästchenkanten heben sich
paarweise auf; nur äußere
Kästchenkanten tragen bei



$$\oint_{\partial A} \vec{B} d\vec{s} = \sum_i \oint_{\partial K_i} \vec{B} d\vec{s}$$

Betrachte Kästchen K_i

$$d\vec{A}\Big|_{K_i} = dx \cdot dy \cdot \vec{e}_z$$

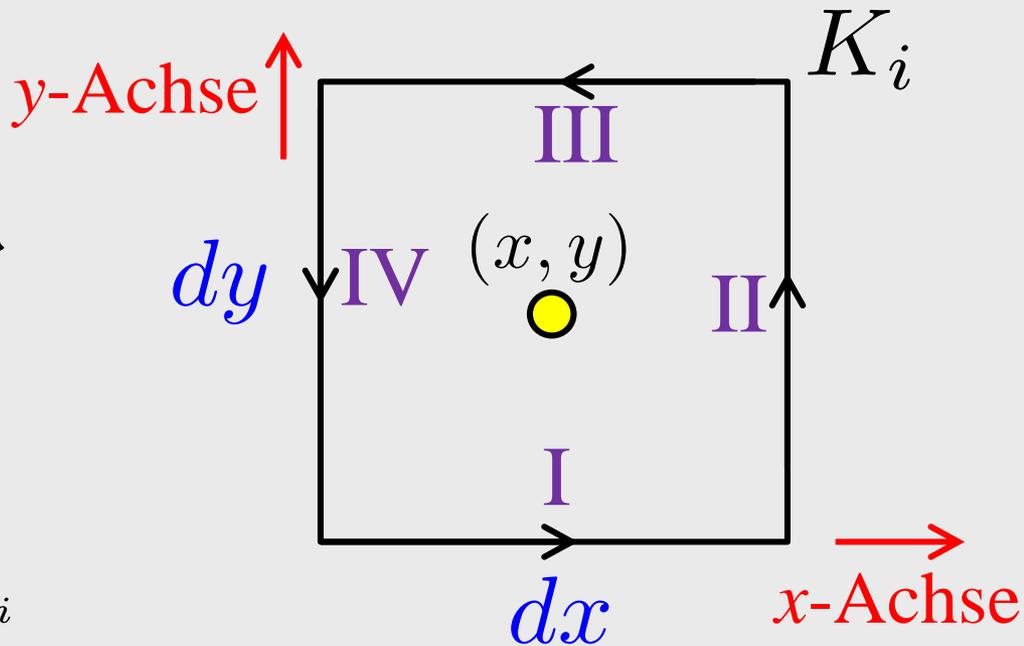


$$\begin{aligned} \oint_{\partial K_i} \vec{B} d\vec{s} &= B_x(x, y - dy/2) dx - B_x(x, y + dy/2) dx \\ &\quad + B_y(x + dx/2, y) dy - B_y(x - dx/2, y) dy \\ &= -\frac{\partial B_x}{\partial y} dy dx + \frac{\partial B_y}{\partial x} dx dy = \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \left(\text{rot } \vec{B} \right)_z \cdot dA\Big|_{K_i} = \text{rot } \vec{B} \cdot d\vec{A}\Big|_{K_i} \quad (\text{da } d\vec{A} \parallel \vec{e}_z) \end{aligned}$$

$$\oint_{\partial A} \vec{B} d\vec{s} = \sum_i \oint_{\partial K_i} \vec{B} d\vec{s}$$

$$\oint_{\partial K_i} \vec{B} d\vec{s} = \text{rot } \vec{B} \cdot d\vec{A} \Big|_{K_i}$$

$$\oint_{\partial A} \vec{B} d\vec{s} = \sum_i \text{rot } \vec{B} \cdot d\vec{A} \Big|_{K_i} = \int_A \text{rot } \vec{B} d\vec{A}$$



3.4. Das Vektorpotential

Frage: Gibt es auch für Magnetfelder ein Potential?

Antwort 1: $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \neq \vec{0}$ aber $\text{rot grad } \phi_B = \vec{0}$

\Rightarrow es gibt keine skalare Potentialfunktion ϕ_B

Antwort 2: $\text{div } \vec{B} = 0$ und $\text{div rot} \equiv 0$

\Rightarrow es gibt eine **Vektor**potentialfunktion \vec{A} mit

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$$

Bemerkung: Vektorpotential ist **nicht** eindeutig

$$\vec{A}'(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r}) + \text{grad } f(\vec{r}) \Rightarrow \vec{B} = \text{rot } \vec{A} = \text{rot } \vec{A}'$$

\Rightarrow **Eichfreiheit** des Vektorpotentials analog zur der in der Elektrostatik:

$$\phi'(\vec{r}) = \phi(\vec{r}) + \text{const.} \Rightarrow \vec{E} = -\text{grad } \phi = -\text{grad } \phi'$$

Zusammenfassung:

Elektrostatik

Magnetostatik

Homogene Gleichungen

$$\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

keine Wirbel

keine Ladungsquellen

Inhomogene Gleichungen
(Quellgleichungen)

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

Ladungen
sind Quellen
des E -Feldes

Ströme erzeugen
magnetische
Wirbelfelder

Potential-Darstellungen

$$\vec{E} = -\text{grad } \phi$$

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$$

Eichfreiheit

$$\phi \rightarrow \phi + \text{const.}$$

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \text{grad } f$$

3.5. Spezielle Stromverteilungen

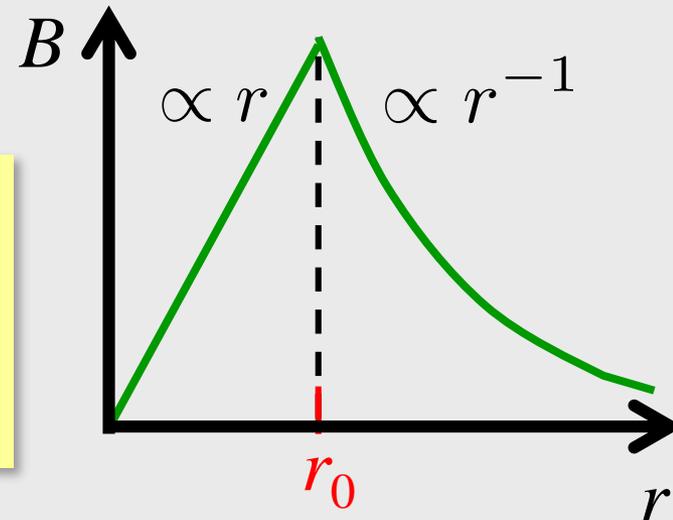
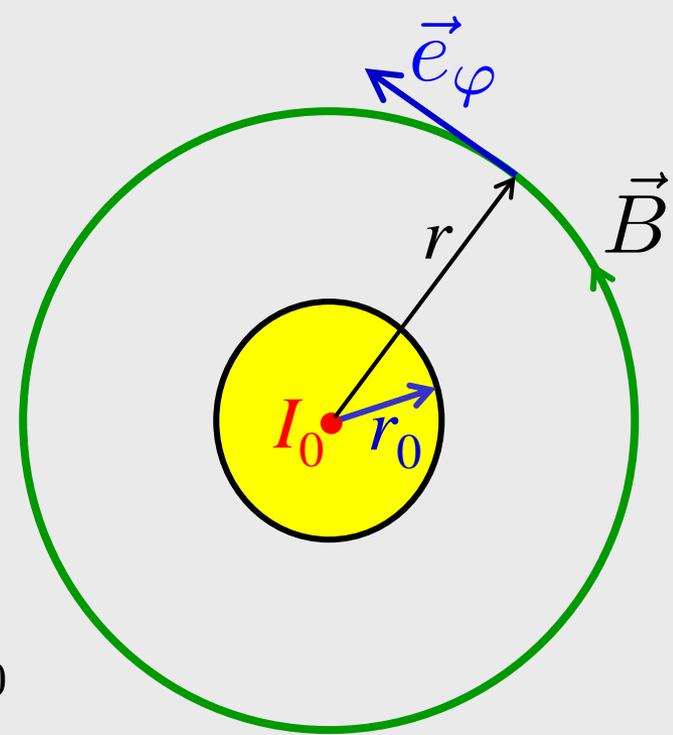
a) Stromdurchflussener Leiter

$$\text{Symmetrie} \Rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = B(r) \cdot \vec{e}_\varphi$$

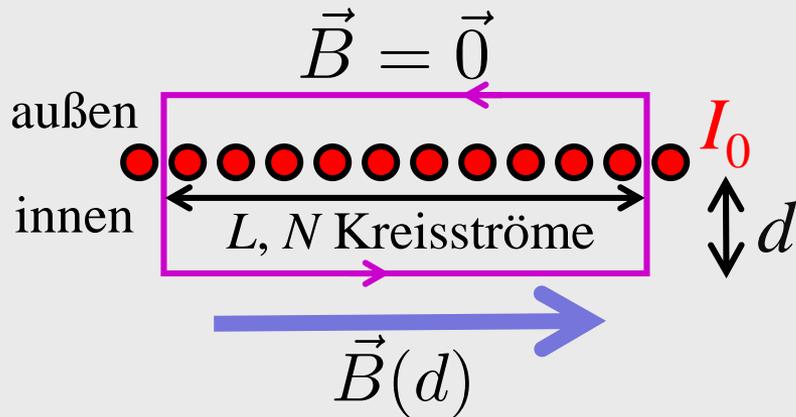
$$\oint_r \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} = 2\pi r \cdot B(r)$$

$$\mu_0 I = \mu_0 I_0 \cdot \begin{cases} 1 & , r \geq r_0 \\ \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 & , r < r_0 \end{cases}$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \cdot \begin{cases} 1 & , r \geq r_0 \\ \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 & , r < r_0 \end{cases}$$



b) Zylinderspule:



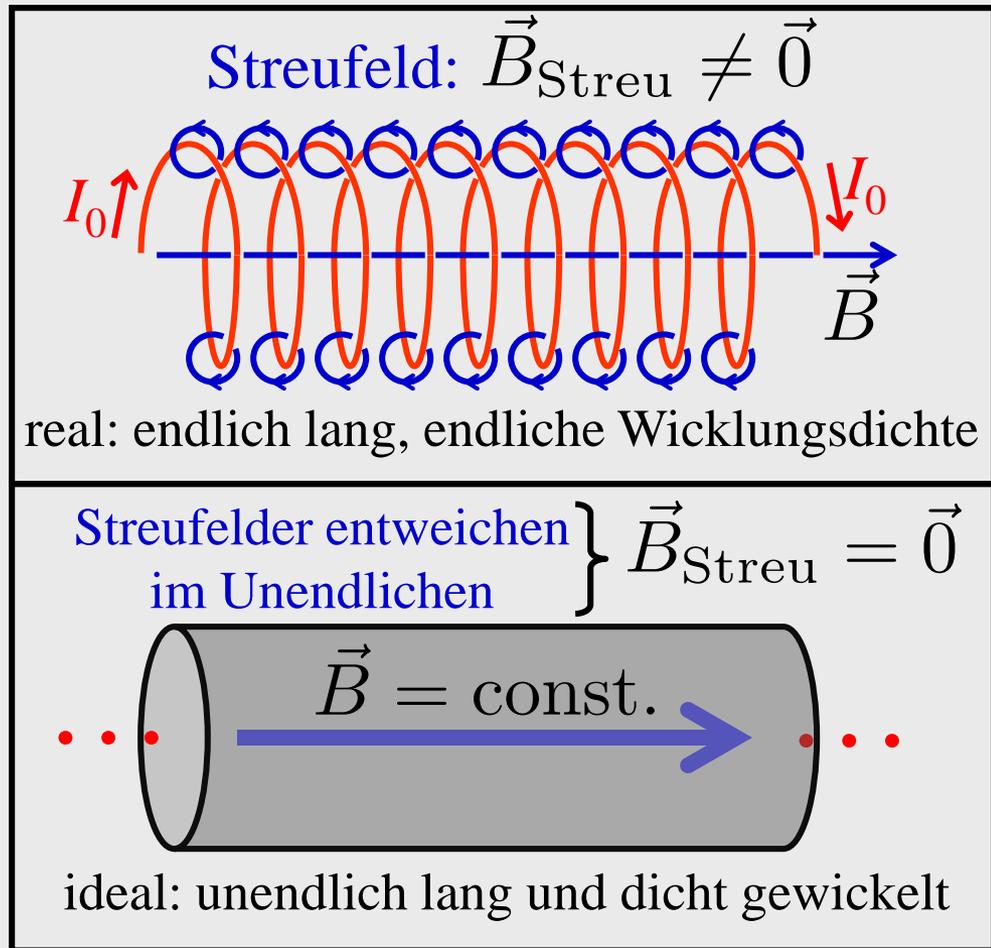
$$\oint \vec{B}(\vec{r}) d\vec{s} = B(d)L$$

$$\mu_0 I = \mu_0 N I_0$$

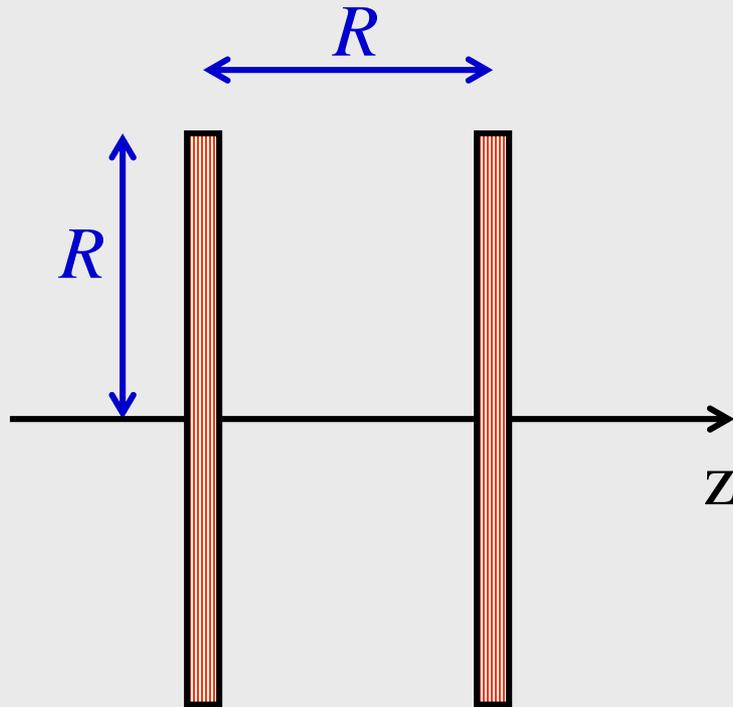
$$\Rightarrow B(d) \equiv B_0 = \mu_0 n I_0 \quad \text{mit} \quad n = \frac{N}{L}$$

unabhängig von d
 \Rightarrow homogenes Feld

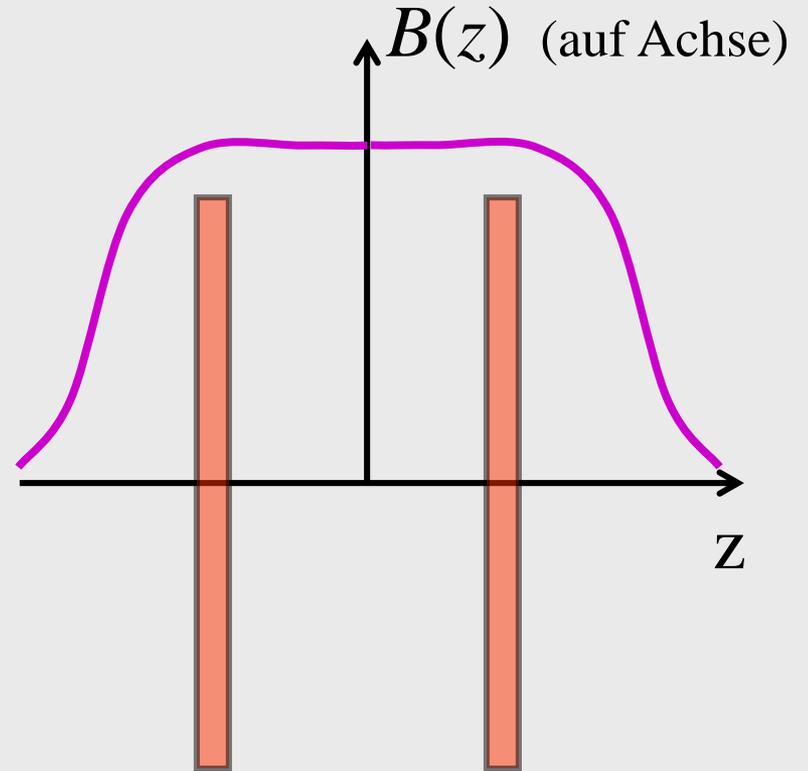
Wicklungsdichte



Praktische Realisierung des (fast) homogenen B-Feldes:



Helmholtz-Spule



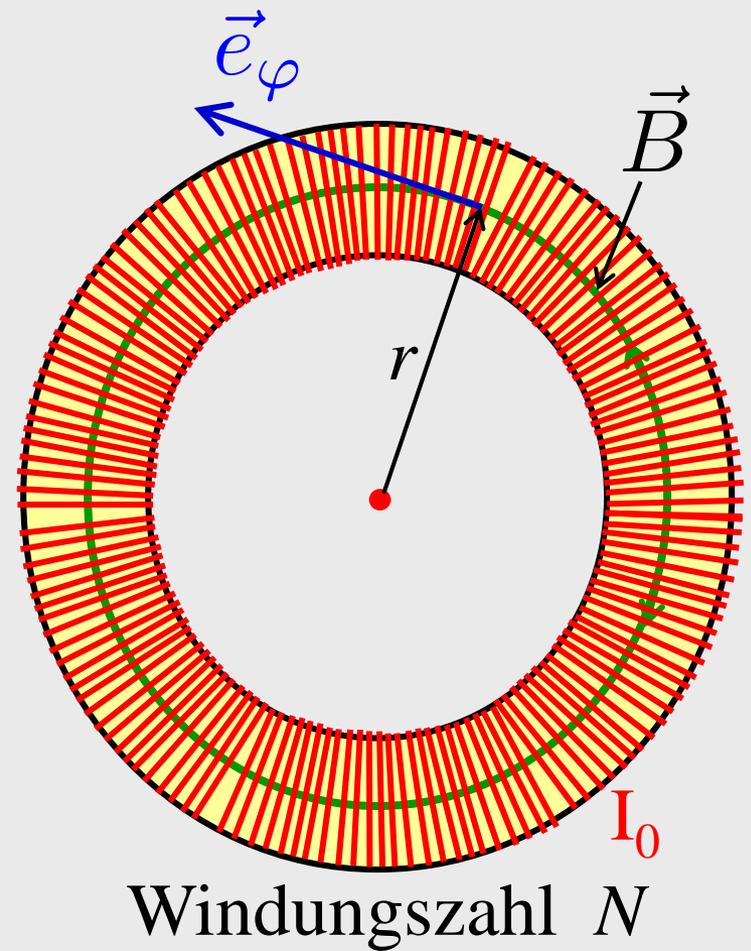
Optimale Homogenität
im Spulenzentrum

c) Ringspule:

$$\text{Symmetrie} \Rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = B(r) \cdot \vec{e}_\varphi$$

$$\oint_r \vec{B}(\vec{r}) d\vec{s} = 2\pi r \cdot B(r)$$

$$\mu_0 I = \begin{cases} \mu_0 N I_0, & \text{innen} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$



Windungszahl N

$$B(r) = \frac{\mu_0 N}{2\pi} \cdot \frac{I_0}{r}$$

im Inneren der Spule

Außenraum feldfrei

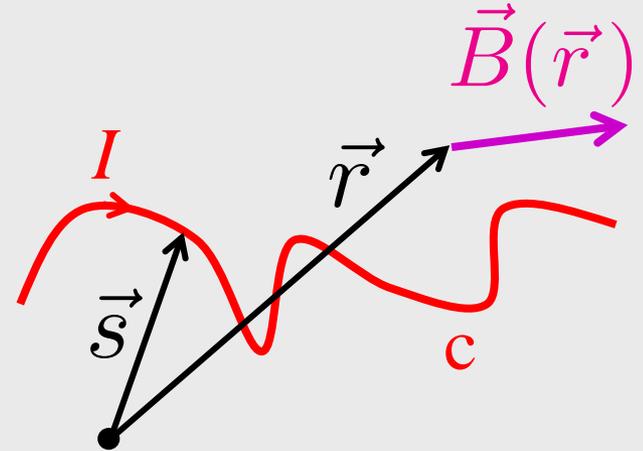
3.6. Das Biot-Savart-Gesetz

Problem: **Linienstrom I** entlang eines beliebigen Weges **c**

Biot-Savart-Gesetz

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_c \frac{d\vec{s}}{|\vec{r} - \vec{s}|}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_c \frac{\vec{r} - \vec{s}}{|\vec{r} - \vec{s}|^3} \times d\vec{s}$$



Beweis: \rightarrow Tafel

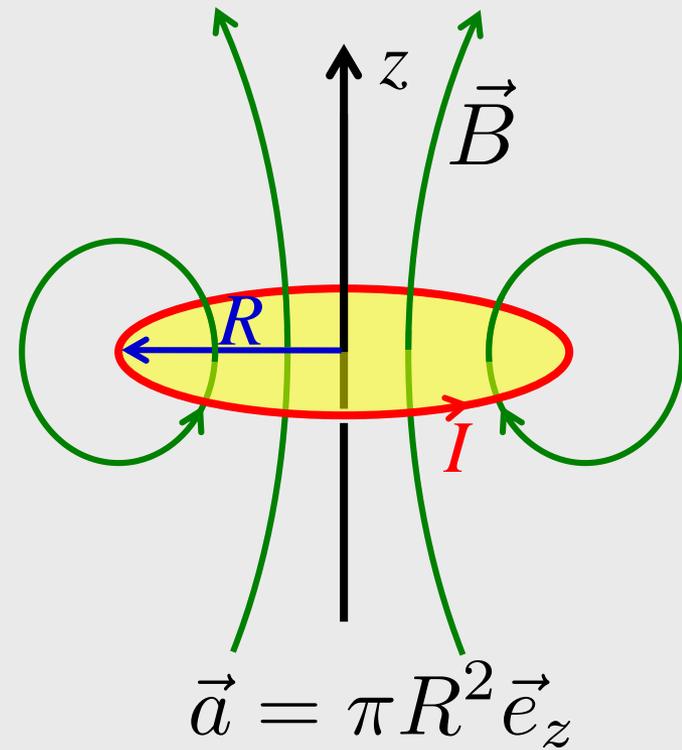
Beispiel: Stromschleife

Magnetfeld auf der z -Achse:

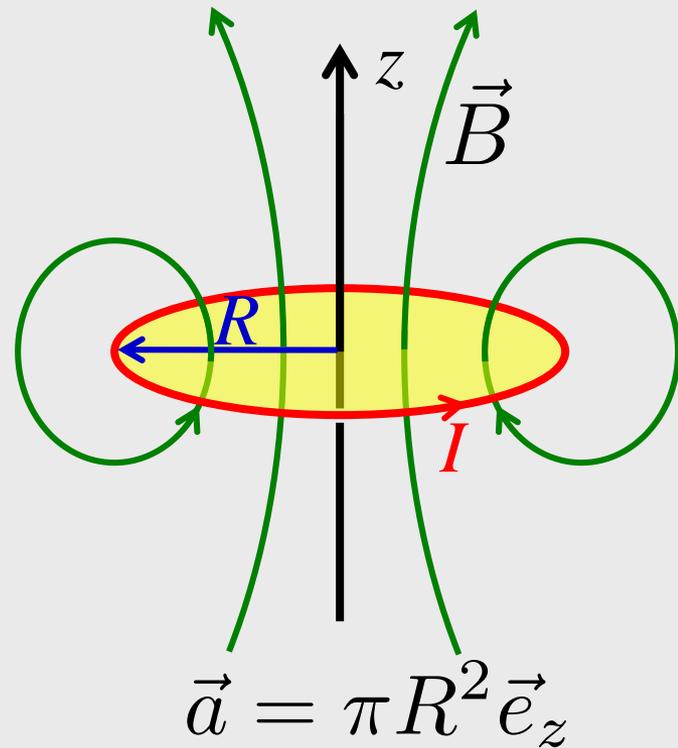
$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}, \quad \vec{s} = R \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$d\vec{s} = R \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi$$

$$|\vec{r} - \vec{s}| = \sqrt{R^2 + z^2} \quad (\text{const. auf } c)$$



$$\begin{aligned}
 (\vec{r} - \vec{s}) \times d\vec{s} &= \begin{pmatrix} -R \cos \varphi \\ -R \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -R \sin \varphi \\ R \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi \\
 &= \begin{pmatrix} -Rz \cos \varphi \\ -Rz \sin \varphi \\ -R^2 \cos^2 \varphi - R^2 \sin^2 \varphi \end{pmatrix} d\varphi \\
 &= \begin{pmatrix} -Rz \cos \varphi \\ -Rz \sin \varphi \\ -R^2 \end{pmatrix} d\varphi
 \end{aligned}$$

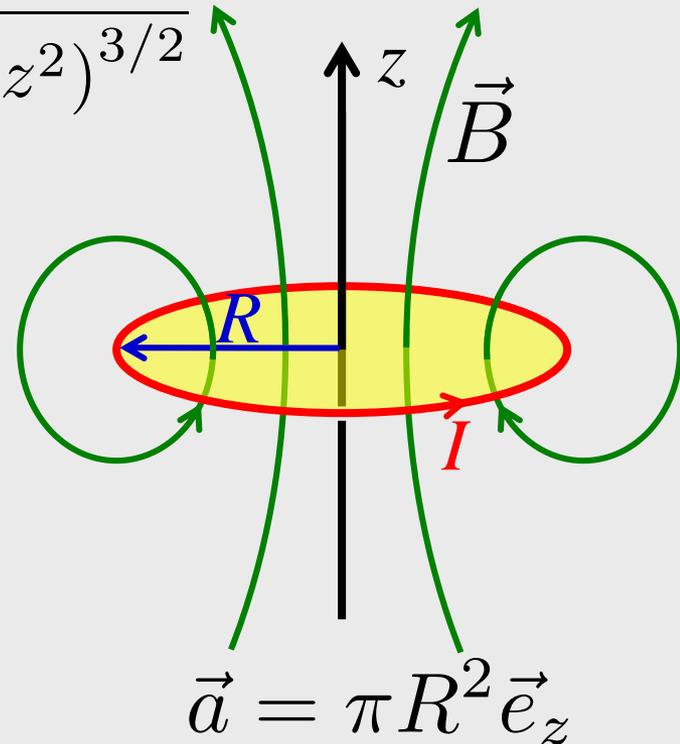


$$\begin{aligned}
\vec{B}(z) &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -Rz \cos \varphi \\ -Rz \sin \varphi \\ -R^2 \end{pmatrix} d\varphi \\
&= -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2\pi R^2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\vec{a}}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{p}_m}{(R^2 + z^2)^{3/2}}
\end{aligned}$$

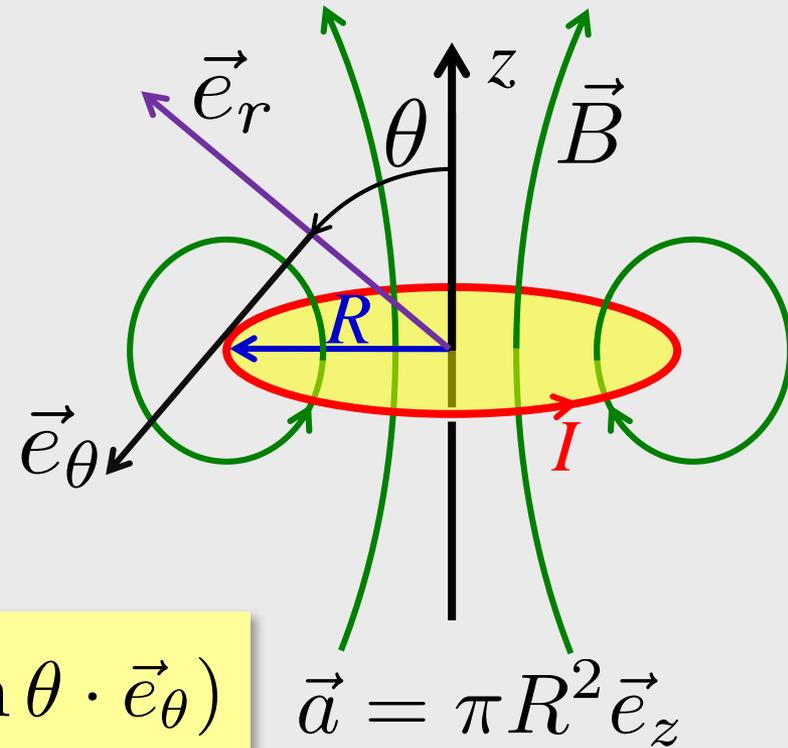
mit

Magnetisches Dipolmoment

$$\vec{p}_m = I \cdot \vec{a}$$



Allgemeines Resultat für $|\vec{r}| = r \gg R$:

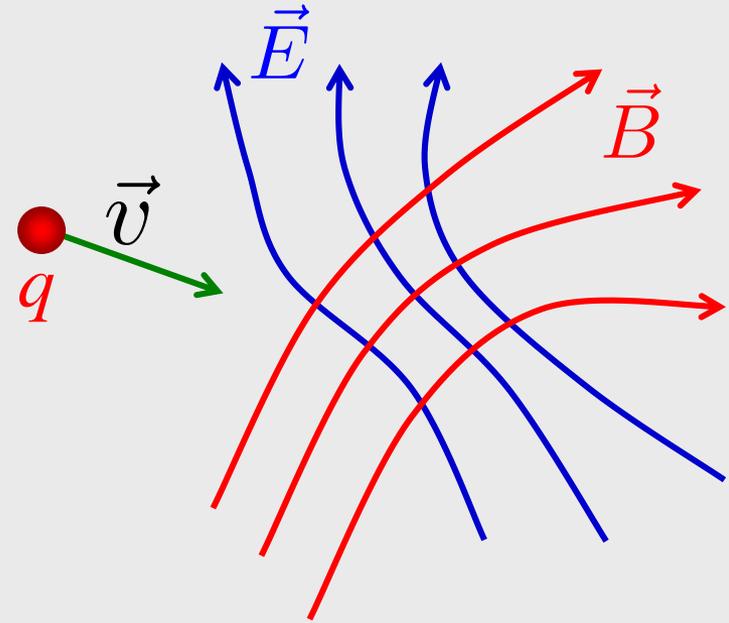


$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 p_m}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \cdot \vec{e}_r + \sin \theta \cdot \vec{e}_\theta)$$
$$\propto \frac{p_m}{r^3} \quad \text{Dipolfeld}$$

Bemerkung: Resultat gilt für beliebige Form der Fläche.

Das magnetische Dipolmoment ist eine charakteristische Größe!

3.7. Die Lorentz-Kraft



Experimentelle Beobachtung:

$$\vec{F} = q \cdot \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right)$$

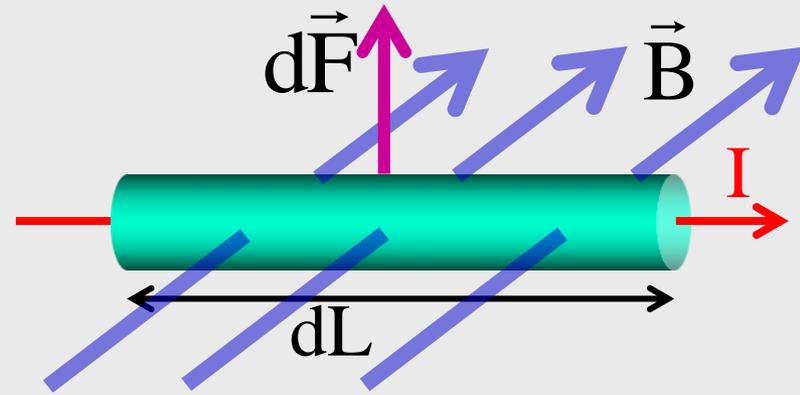
Coulomb-
Kraft

Lorentz-
Kraft

Experimentelle Tests:

a) Kraft auf stromdurchflossenen Leiter

- $n = \text{\#Ladungen } q \text{ pro Volumen}$
- $a = \text{Leiterquerschnitt}$
- $\vec{v}_D = \text{Driftgeschwindigkeit der Ladungen } q$



$$I = \underbrace{nv_D a}_{\text{\#}q \text{ pro s durch } a} q \Rightarrow \left| \vec{j} \right| = \frac{I}{a} = nv_D q \Rightarrow \vec{j} = nq\vec{v}_D$$

$$d\vec{F} = \underbrace{na dL}_{\text{\#Ladungen in } dL} q \vec{v}_D \times \vec{B} = \vec{j} \times \vec{B} dV$$

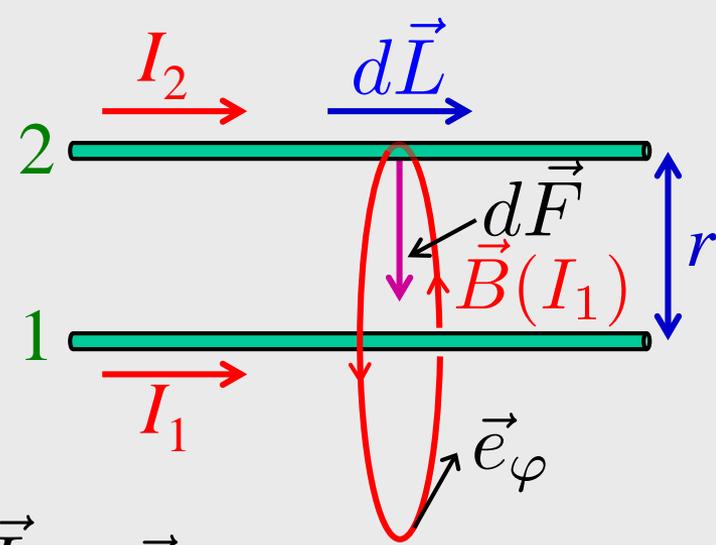
$$\vec{j} dV = I d\vec{L} \Rightarrow d\vec{F} = I d\vec{L} \times \vec{B}$$

Spezialfall: Zwei parallele Drähte

$$I_1 \text{ durch Draht 1} \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi r} I_1 \cdot \vec{e}_\varphi$$

$$\Rightarrow \text{Kraft auf Draht 2: } d\vec{F} = I_2 d\vec{L} \times \vec{B}$$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{r} d\vec{L} \times \vec{e}_\varphi$$



$$d\vec{L} \perp \vec{e}_\varphi \Rightarrow \begin{cases} \text{Anziehung, falls } I_1 \text{ und } I_2 \text{ gleichsinnig} \\ \text{Abstoßung, falls } I_1 \text{ und } I_2 \text{ gegensinnig} \end{cases}$$

Kraft pro Länge:

$$\frac{F}{L} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{r} \quad I_1 = \underline{\underline{I_2}} = I \quad \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I^2}{r}$$

Einheit **1 A** wurde oben so definiert, dass $\frac{\mu_0}{2\pi} \stackrel{\text{Def}}{=} 2 \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$

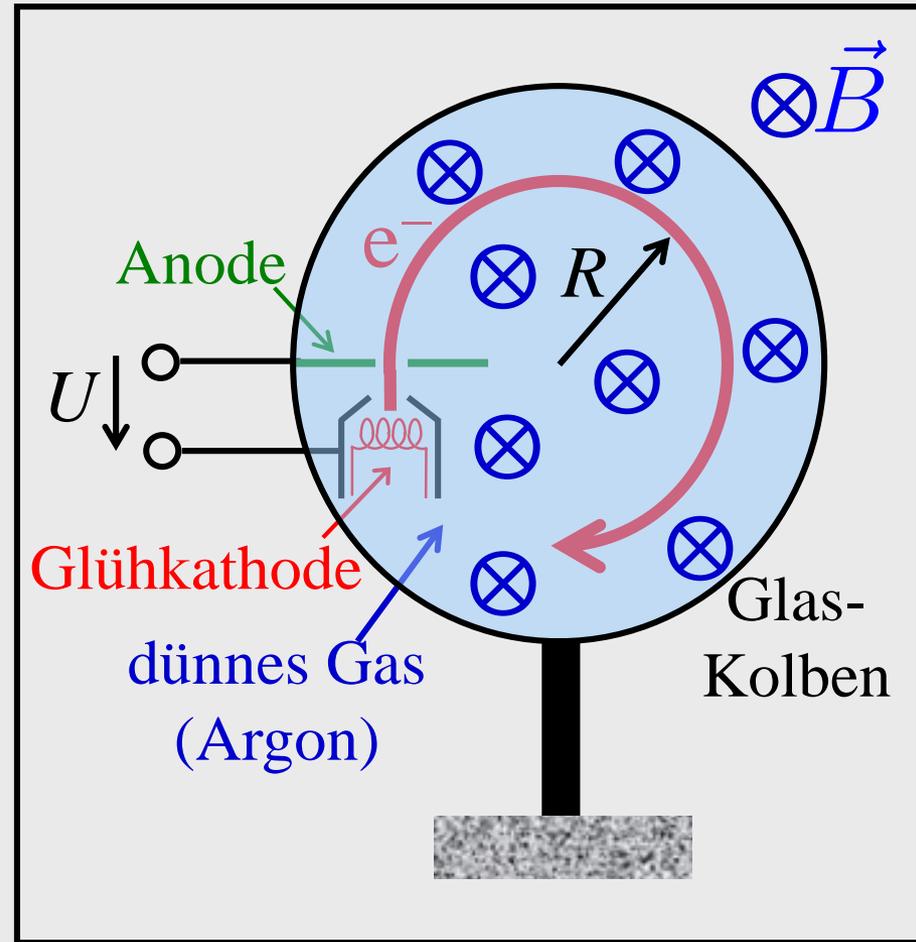
b) Fadenstrahlrohr:

$$\frac{1}{2}mv^2 = eU \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$$

$$\frac{mv^2}{R} = evB \Rightarrow R = \frac{mv}{eB}$$

$$\Rightarrow R = \frac{\sqrt{2U}}{B} \sqrt{\frac{m}{e}}$$

\Rightarrow Messung von e/m

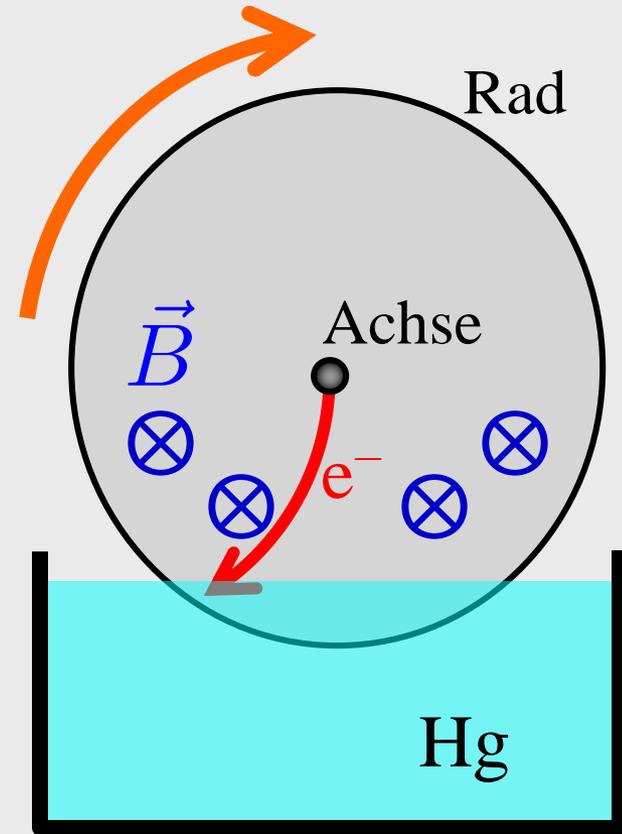
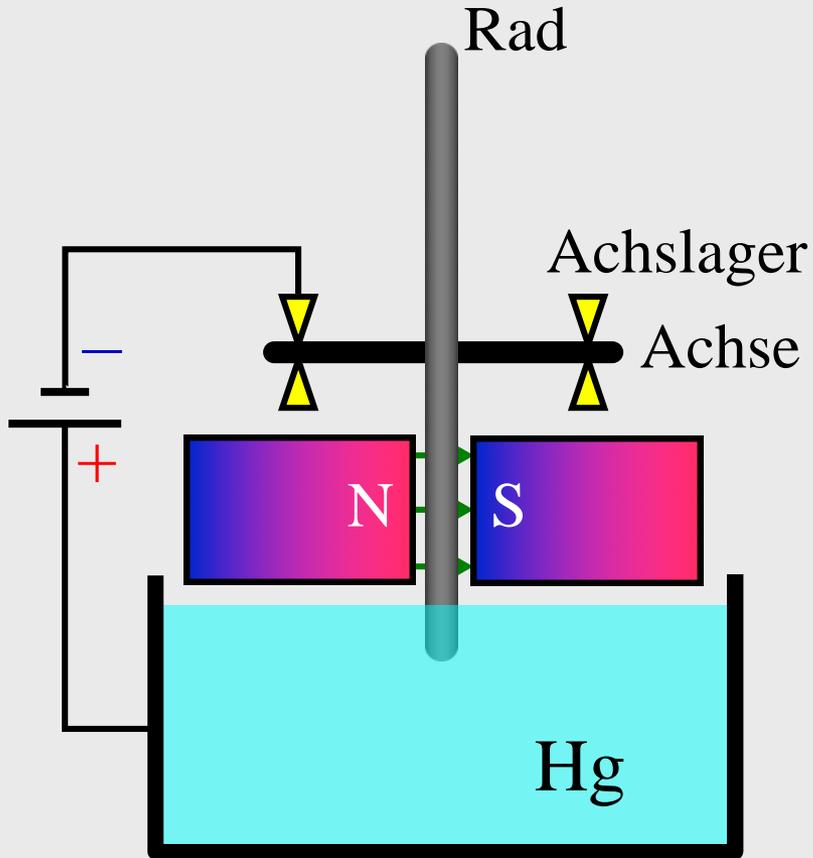


Alternative Methoden zur e/m -Messung:

Kathodenstrahlröhre mit überlagerten E - und B -Feldern

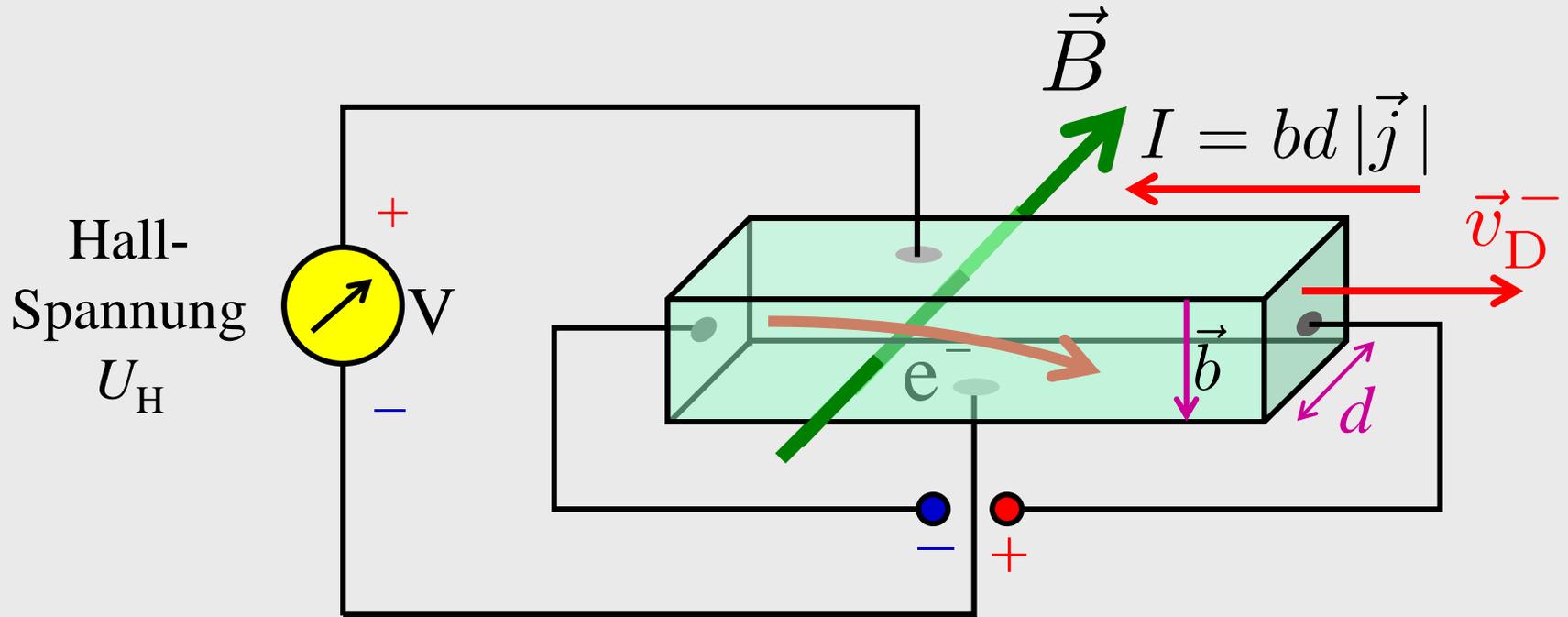
(\rightarrow Grundlagenpraktikum)

c) Barlowsches Rad:



Lorentzkraft auf Elektronen
überträgt sich durch Reibung der
Elektronen im Metall auf das Rad

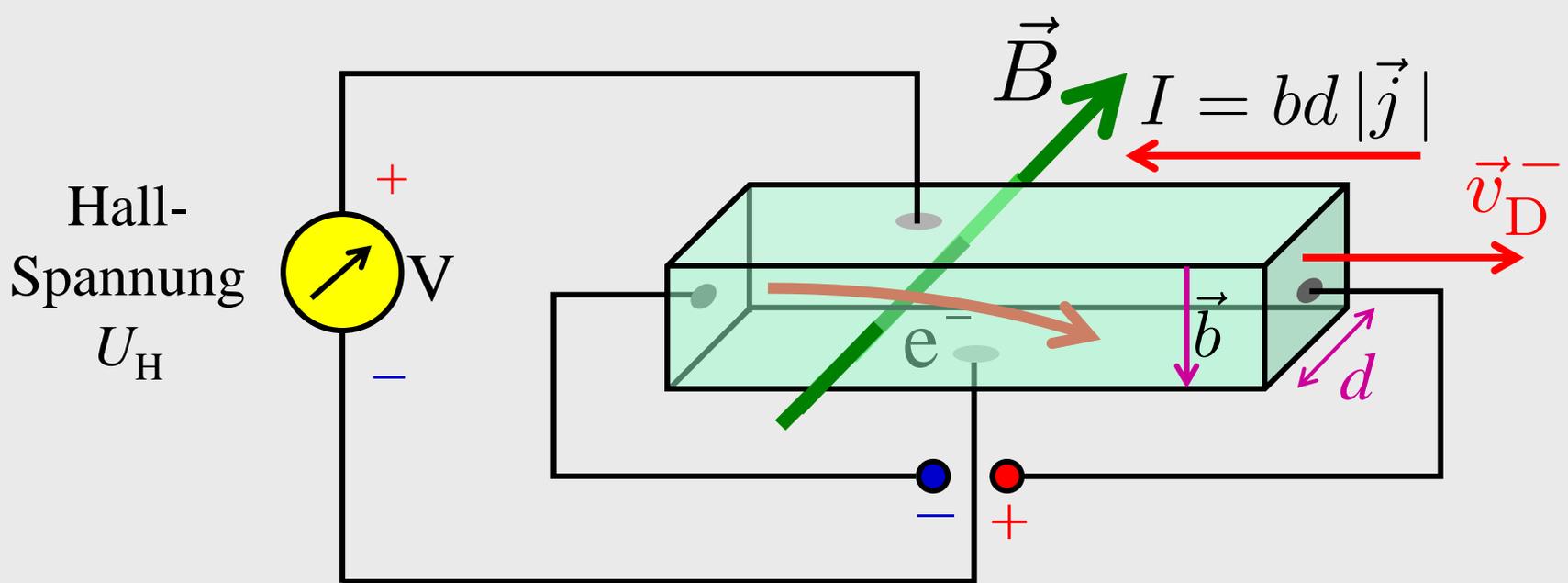
d) Hall-Effekt:



$$\vec{j} = n^+ e \vec{v}_D^+ - n^- e \vec{v}_D^-$$

Fehlstellenleitung
Löcher in p-dotierten Halbleitern

Elektronenleitung
Metalle oder Halbleiter



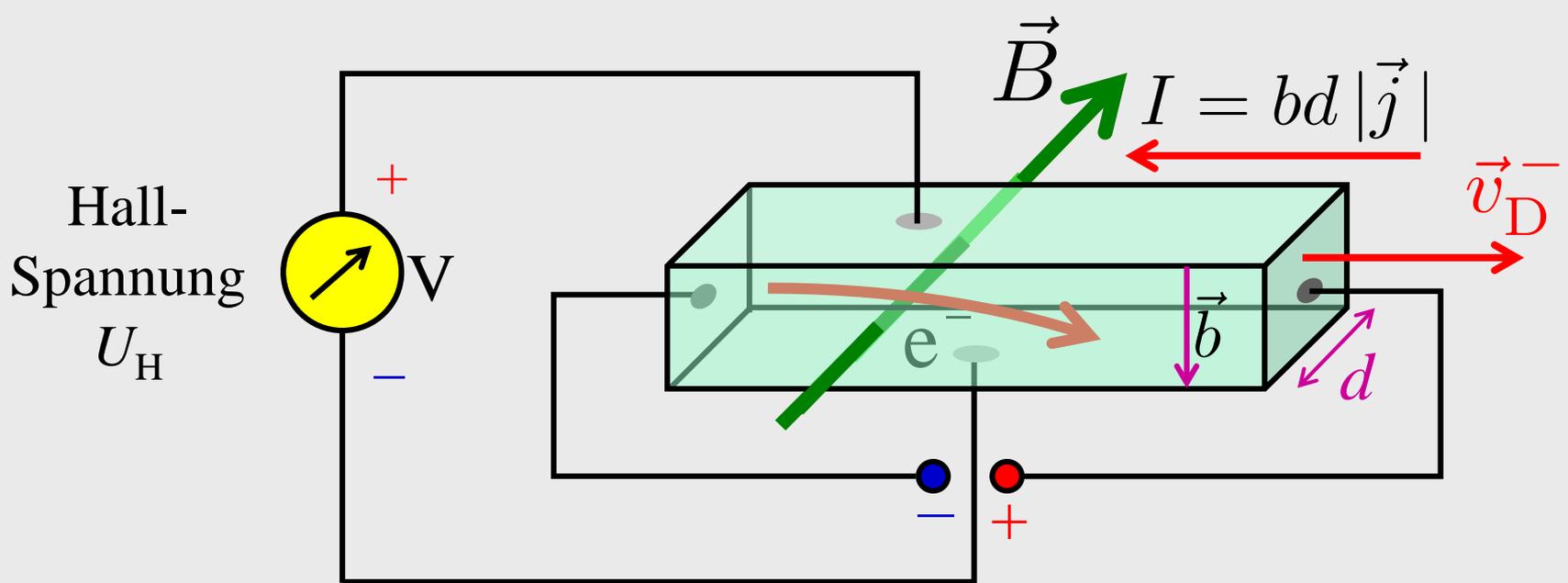
Quantitativ für einen Ladungsträgertyp:

Magnetische Kraft pro Volumen: $nq \vec{v}_D \times \vec{B}$

Elektrische Kraft pro Volumen: $nq \vec{E}_H$ ← Hall-Feldstärke
(durch Ladungsträgertrennung)

$$\Rightarrow \vec{E}_H = -\vec{v}_D \times \vec{B} = -\frac{\vec{j} \times \vec{B}}{nq}$$

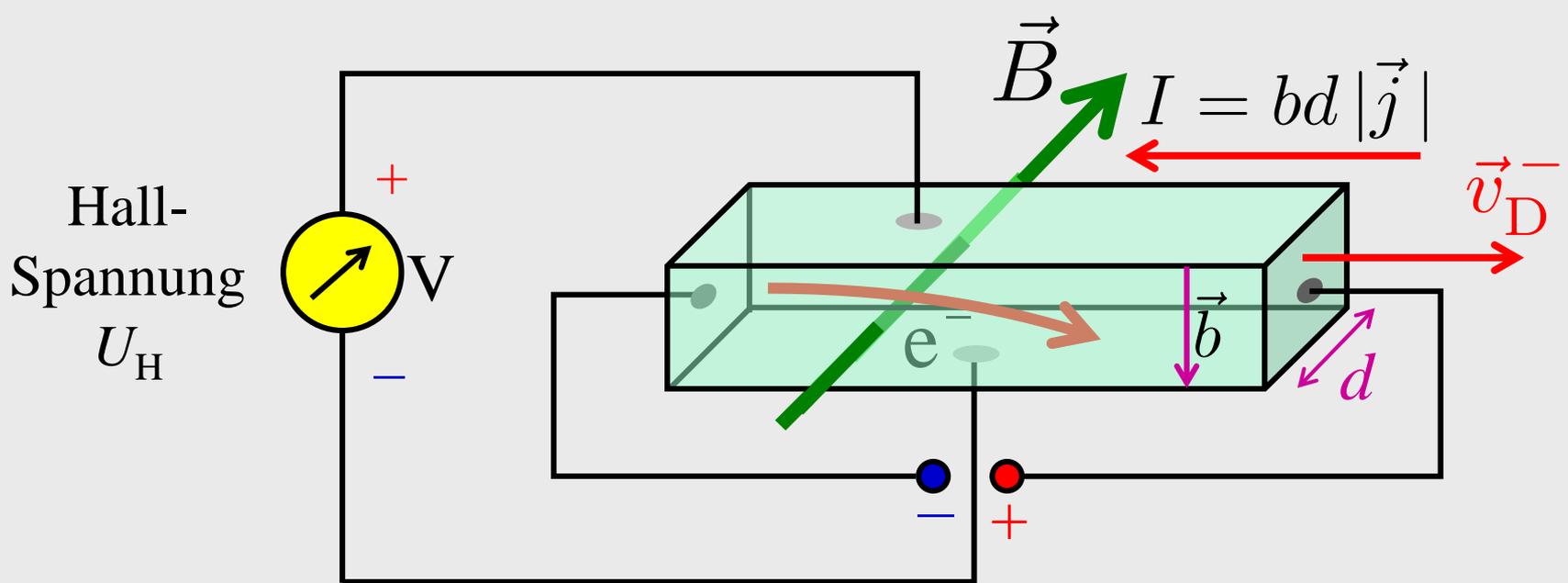
$$\Rightarrow U_H = \int \vec{E}_H d\vec{s} = \vec{b} \vec{E}_H = -\frac{(\vec{j} \times \vec{B}) \cdot \vec{b}}{nq} = -\frac{jBb}{nq}$$



Quantitativ für einen Ladungsträgertyp: $U_H = -\frac{jBb}{nq}$

$$j = \frac{I}{bd} \Rightarrow U_H = R_H \frac{IB}{d}$$

Hall-Konstante: $R_H = -\frac{1}{nq}$



$$U_H = R_H \frac{IB}{d} \quad \text{mit} \quad R_H = -\frac{1}{nq}$$

Metalle, n-Halbleiter: $q \approx -e \Rightarrow U_H > 0$

p-Halbleiter: $q \approx +e \Rightarrow U_H < 0$

$n(\text{Halbleiter}) \ll n(\text{Metalle}) \Rightarrow$ **Halbleiter-Hallsonden** sehr sensitiv
(B -Feld-Messung bis 10^{-6} T)

3.8. Magnetische Felder in Materie

3.8.1. Magnetisierung

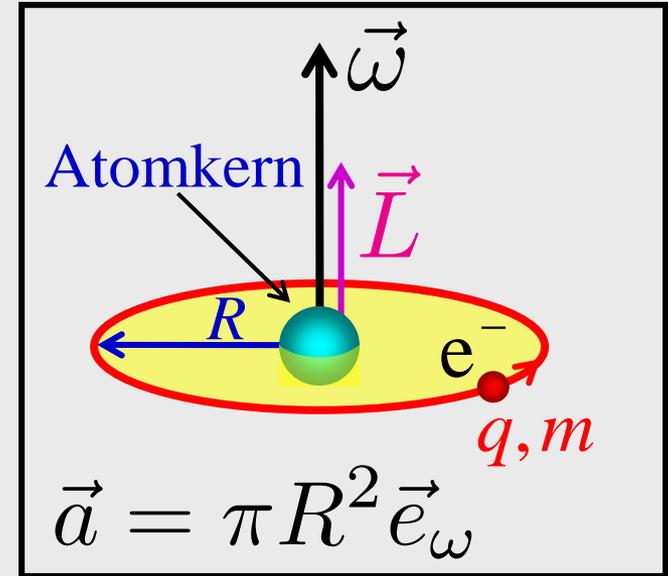
Problem: Statische magnetische Felder in Materie

atomarer magnetischer Dipol:

$$\vec{p}_m = I \cdot \vec{a} = q \underset{\uparrow \omega/(2\pi)}{\nu} \cdot \pi R^2 \vec{e}_\omega = \frac{1}{2} q R^2 \vec{\omega}$$

$$\vec{L} = \vec{R} \times \vec{p} = m \vec{R} \times \vec{v} = m R^2 \vec{\omega}$$

$$\Rightarrow \vec{p}_m = \frac{q}{2m} \cdot \vec{L}$$



Bohrsches Atommodell: $q = -e$, $m = m_e$, $L = \ell \hbar$, $\ell = 0, 1, 2, \dots$

$$\Rightarrow |\vec{p}_m| = \ell \frac{e\hbar}{2m_e} \equiv \ell \mu_B$$

Bohrsches Magneton
 $\mu_B = 9,2742 \cdot 10^{-24} \text{ Am}$

Magnetischer Dipol im Magnetfeld:

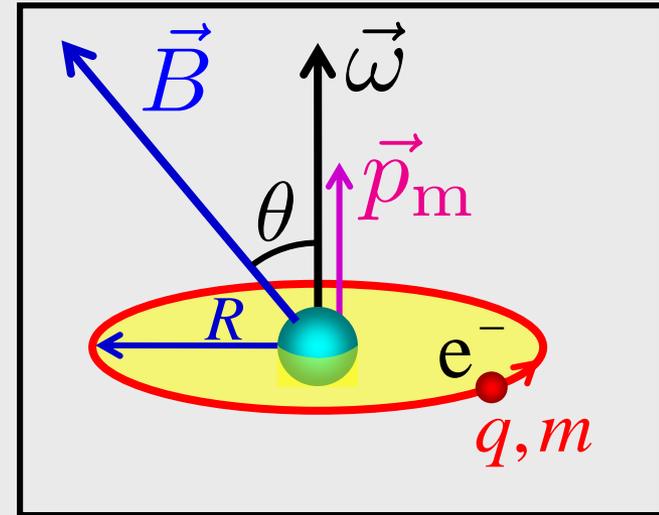
$$\vec{B} = B \begin{pmatrix} \sin \theta \\ 0 \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_m = \frac{1}{2} q R^2 \omega \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{r} = R \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = R\omega \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

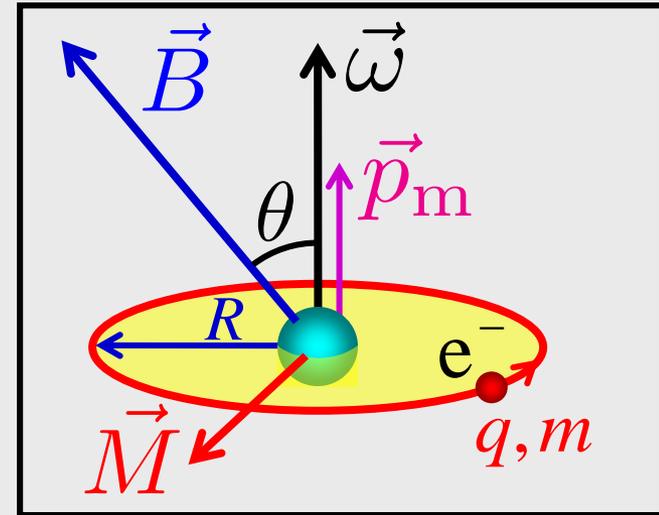
$$\text{Kraft: } \vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B} = qR\omega B \begin{pmatrix} \cos \theta \cos(\omega t) \\ \cos \theta \sin(\omega t) \\ -\sin \theta \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

Drehmoment:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = qR^2\omega B \begin{pmatrix} -\cos \theta \sin(\omega t) \cos(\omega t) \\ \sin \theta \cos^2(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$\vec{B} = B \begin{pmatrix} \sin \theta \\ 0 \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_m = \frac{1}{2} q R^2 \omega \cdot \vec{e}_z$$



Drehmoment:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = q R^2 \omega B \begin{pmatrix} -\cos \theta \sin(\omega t) \cos(\omega t) \\ \sin \theta \cos^2(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gemittelt über einen Umlauf:

$$\vec{M}(\vec{p}_m) = \frac{1}{2} q R^2 \omega B \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{p}_m \times \vec{B}$$

Magnetisches Moment wird entlang B -Feld ausgerichtet!

Potentielle Energie des magn. Dipols:

Drehe Dipol gegen rücktreibendes Drehmoment von 0 nach $\theta \rightarrow$ verrichtete Arbeit geht in potentielle Energie:

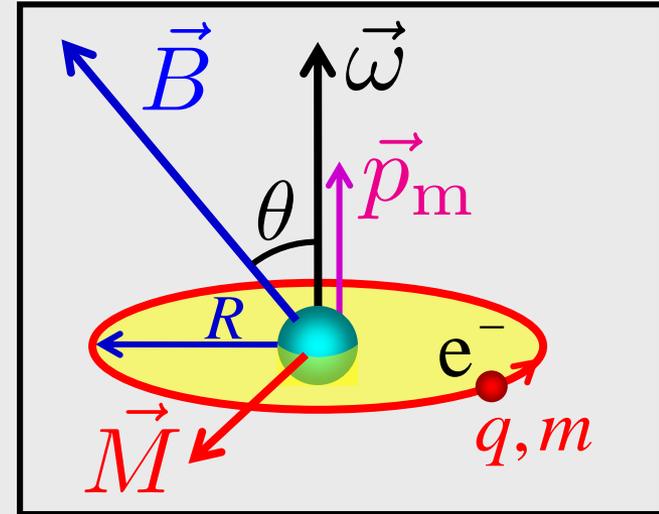
$$|\vec{M}| = p_m B \sin \theta$$

$$\Delta E_{\text{pot}} = \Delta W = p_m B \int_0^\theta \sin \theta' d\theta' = -p_m B \cos \theta + \text{const.}$$

Nullpunkt der potentiellen Energie beliebig $\rightarrow E_{\text{pot}} = -\vec{p}_m \vec{B}$

Kraft auf Dipol im inhomogenen Magnetfeld:

$$\vec{F} = -\text{grad } E_{\text{pot}} = \sum_{i=x,y,z} p_{m_i} \text{grad } B_i(\vec{r}) \equiv \vec{p}_m \cdot \left(\text{grad } \vec{B}(\vec{r}) \right)$$



Magnetisierung: Ausrichtung atomarer magnetischer Dipole

- i. Durch äußere Magnetfelder induzierte atomare Ringströme
 - ii. Permanente atomare Ringströme ($\ell > 0$)
 - iii. Eigendrehimpulse (Spins) ungepaarter Elektronen
- a) Äußere „freie“ Stromdichte (nicht im Material induziert) erzeugen „Vakuum-Anteil“ des Magnetfeldes:

$$\operatorname{rot} \vec{B}_{\text{Vakuum}} = \mu_0 \vec{j}_{\text{frei}}$$

$$\text{Magnetische Erregung: } \vec{H} \equiv \frac{1}{\mu_0} \vec{B}_{\text{Vakuum}} \Rightarrow \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}_{\text{frei}}$$

- b) Im Material induzierte Stromdichte erzeugt Magnetisierung:

$$\operatorname{rot} \vec{B}_{\text{Materie}} = \mu_0 \vec{j}_{\text{Materie}}$$

$$\text{Magnetisierung: } \vec{M} \equiv \frac{1}{\mu_0} \vec{B}_{\text{Materie}} \Rightarrow \operatorname{rot} \vec{M} = \vec{j}_{\text{Materie}}$$

Fazit: Magnetostatik in Materie

Nenne $\vec{j}_{\text{frei}} \equiv \vec{j}$

$$\vec{B} = \vec{B}_{\text{Vakuum}} + \vec{B}_{\text{Materie}} = \mu_0 \left(\vec{H} + \vec{M} \right) \Rightarrow$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}$$

(Materialgleichung)

Ohne Beweis: Magnetisierung = mittleres magn. Moment pro Volumen

Nach Definition:

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} \quad (\text{Feldgleichung 1})$$

Auch im Material gibt es keine magnetischen Monopole!

Folgerung:

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad (\text{Feldgleichung 2})$$

3.8.2. Magnetische Suszeptibilität

Definition:

$$\vec{M} = \chi_m \cdot \vec{H}$$

magnetische Suszeptibilität

(Materialparameter, ggf. H -abhängig, T -abhängig, Zahl oder Matrix)

$$\vec{B} = \mu_0 \left(\vec{H} + \vec{M} \right) = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} \equiv \mu \mu_0 \vec{H}$$

relative Permeabilität: $\mu \equiv \mu_r \equiv 1 + \chi_m$

Feldgleichungen in Materie:

$$\text{rot } \vec{B} = \mu \mu_0 \vec{j}$$

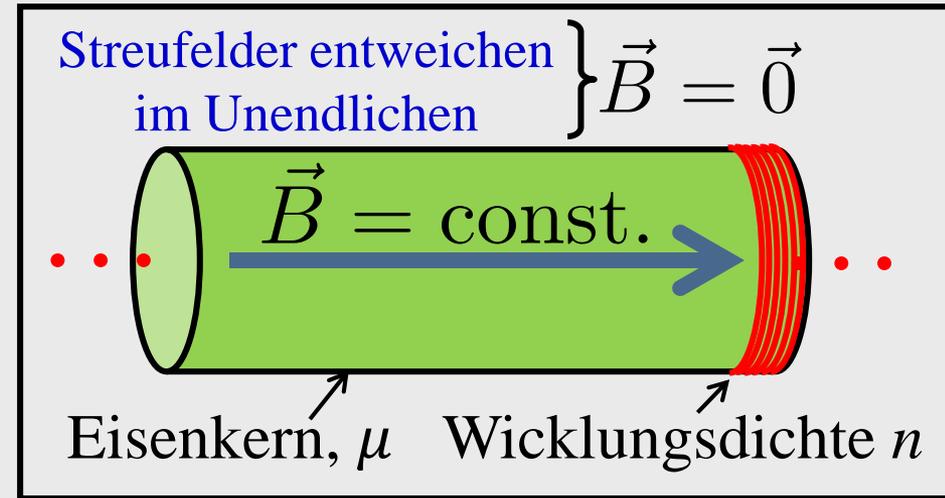
$$\text{div } \vec{B} = 0$$

Faustregel: Für homogene isotrope Medien ersetze in allen Formeln für das Vakuum einfach μ_0 durch $\mu \cdot \mu_0$.

Beispiel: Spule mit Eisenkern

$$B = \mu\mu_0 n I$$

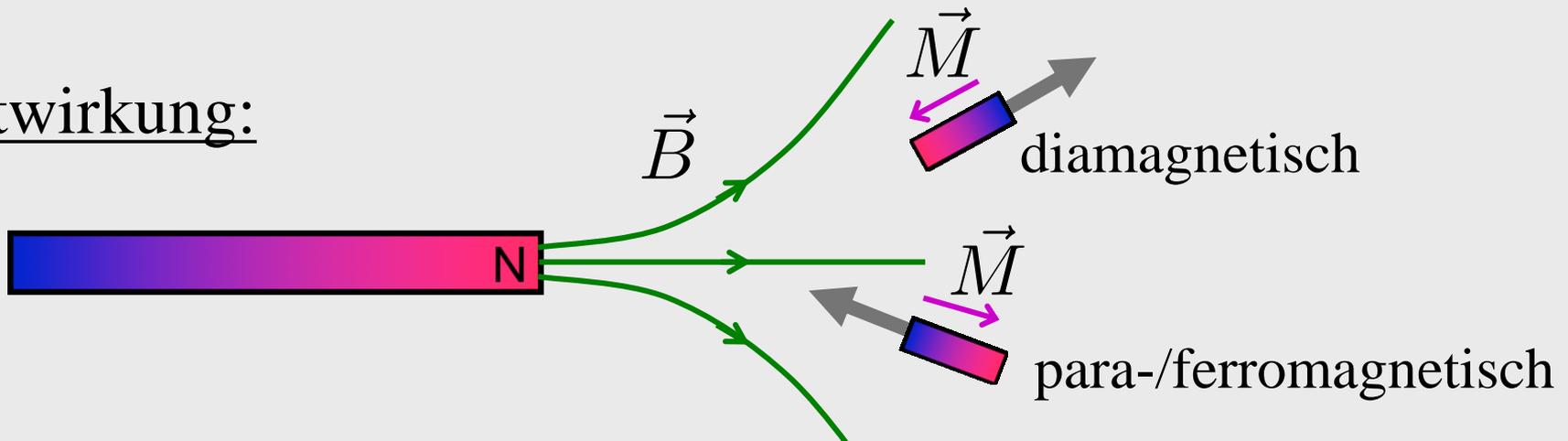
(innen)



Stoffklassen:

| | |
|------------------|---------------------------------|
| 1. Diamagnete: | } $\chi_m < 0$ $ \chi_m \ll 1$ |
| 2. Paramagnete: | |
| 3. Ferromagnete: | } $\chi_m > 0$ $\chi_m \gg 1$ |

Kraftwirkung:



Messung von χ_m :

• Faraday-Methode:

$$E_{\text{pot}} = - \sum p_m B = -VM B \stackrel{\mu \approx 1}{\approx} -V \frac{\chi_m}{\mu_0} B^2$$

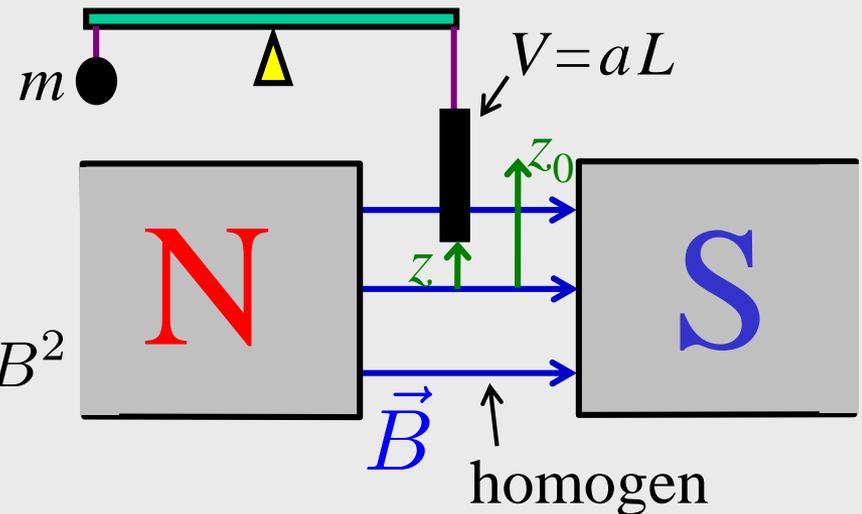
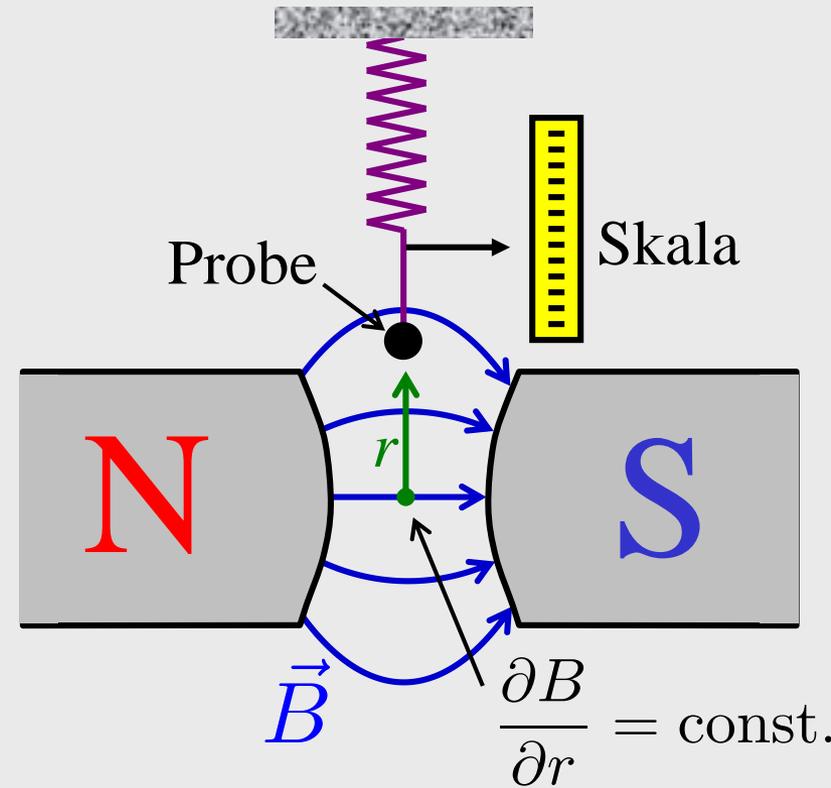
$$F_r = - \frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial r} = 2V \frac{\chi_m}{\mu_0} B \left(\frac{\partial B}{\partial r} \right) < 0$$

$$\text{sign } F_r = -\text{sign } \chi_m$$

• Gouy-Methode:

$$E_{\text{pot}} = - \underbrace{a(z_0 - z)}_{\text{eingetauchtes Volumen}} MB$$

$$F_z = - \frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial z} = -aMB \stackrel{\mu \approx 1}{\approx} - \frac{\chi_m}{\mu_0} aB^2$$



3.8.3. Diamagnetismus

- abgeschlossene Elektronenschalen $\rightarrow \ell = 0$, kein Spin
 \Rightarrow keine permanenten atomaren magnetischen Dipolmomente
- Induzierte Dipole wirken abschwächend (\leftrightarrow Lenzsche Regel, s.u.)

Abschätzung der Größenordnung:

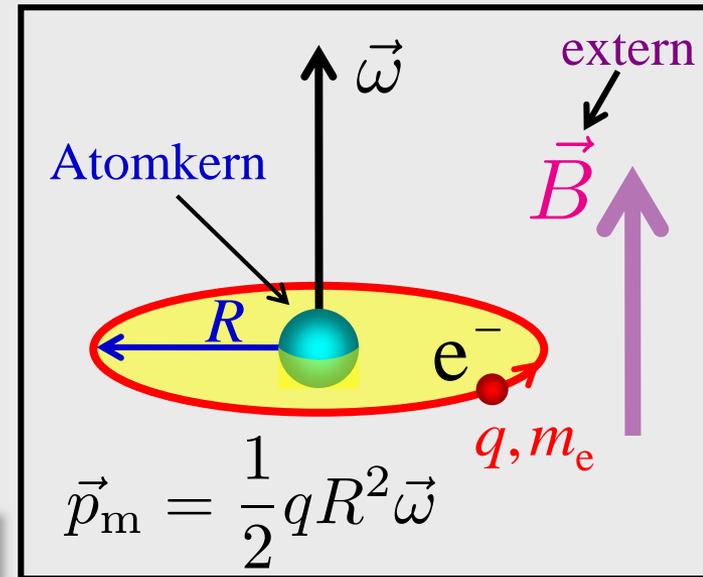
Zentripetalkraft: $F = \frac{m_e v^2}{R} \xrightarrow{B} \Delta F \approx \frac{2m_e v}{R} \Delta v \approx qvB$

$$p_m = \frac{q}{2} R^2 \omega = \frac{q}{2} Rv \Rightarrow \Delta p_m \approx \frac{q}{2} R \Delta v$$

| | | |
|---------------------------|-------------------------|----------|
| $R \approx 1 \text{ \AA}$ | $B \approx 1 \text{ T}$ | $q = -e$ |
|---------------------------|-------------------------|----------|

$$\Delta p_m \approx \frac{q^2 R^2}{4m_e} B \approx 10^{-5} \mu_B$$

- $\ell = 0$: Diamagnetismus, sehr kleiner Effekt
- $\ell > 0$: $p_{\text{atomar}} \gg \Delta p_m \Rightarrow$ Para/Ferromagn.

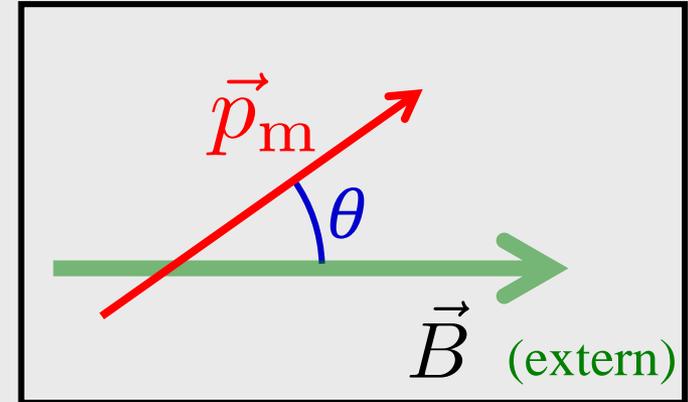


3.8.4. Paramagnetismus

Permanente atomare magn. Momente \vec{p}_m : **statistisch orientiert**

$B = 0$: $\sum_{\Delta V} \vec{p}_m = \vec{0} \Rightarrow \vec{M} = \vec{0}$

$B \neq 0$: $E_{\text{pot}} = -p_m B \cos \theta$



Thermisches Gleichgewicht (Boltzmann-Statistik) \Rightarrow

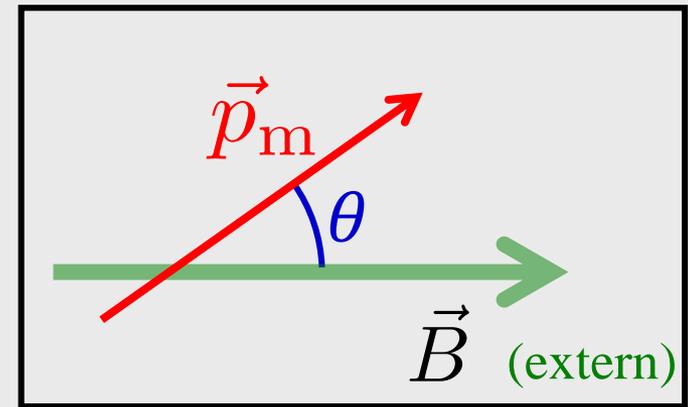
$$\rho(\cos \theta) \equiv \frac{1}{N} \frac{dN}{d \cos \theta} \propto e^{-\frac{E_{\text{pot}}}{kT}} = e^{\frac{p_m B}{kT} \cos \theta}$$

(wobei $N = \#$ magn. Momente pro Volumen)

Kleine Magnetfelder bzw. hohe Temperatur $\Rightarrow p_m B \ll kT$

$$\rho(\cos \theta) \approx A \left(1 + \frac{p_m B}{kT} \cos \theta \right) \quad A = \text{Normierungskonstante}$$

$$\rho(\cos \theta) \approx A \left(1 + \frac{p_m B}{kT} \cos \theta \right)$$



Abkürzung:

$$x = \cos \theta, \quad -1 \leq x \leq +1$$

Normierung:

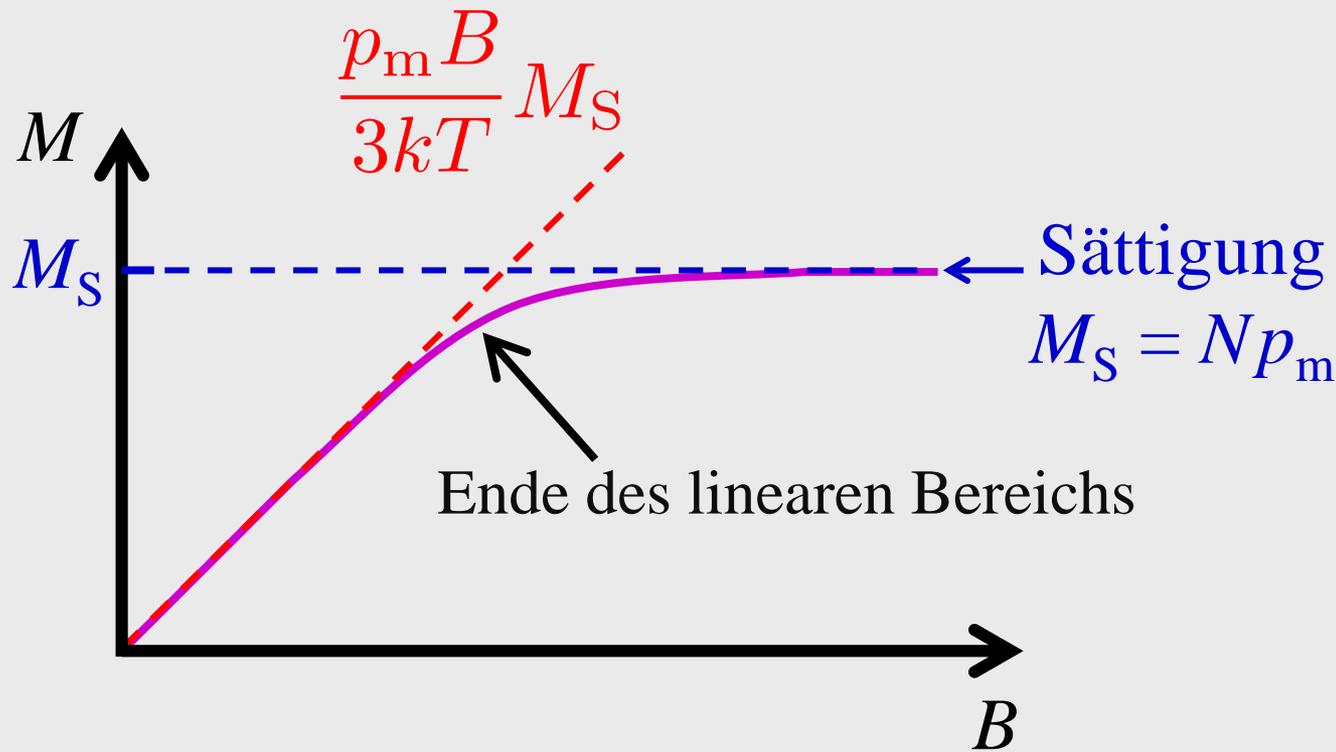
$$1 = \int_{-1}^{+1} \rho(x) dx = A \int_{-1}^{+1} \left(1 + \frac{p_m B}{kT} x \right) dx = 2A \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

Mittlere Ausrichtung \Rightarrow Magnetisierung

$$\begin{aligned} M &= N p_m \langle \cos \theta \rangle = N p_m \int_{-1}^{+1} \rho(x) \cdot x dx \\ &= \frac{N p_m}{2} \int_{-1}^{+1} \left(x + \frac{p_m B}{kT} x^2 \right) dx = \frac{N p_m^2}{3kT} \cdot B \end{aligned}$$

Curie-Gesetz

$$\Rightarrow \chi_m = \frac{M}{H} \approx \mu_0 \frac{M}{B} = \mu_0 \frac{N p_m^2}{3kT} = \mu_0 \frac{p_m}{3kT} M_S$$

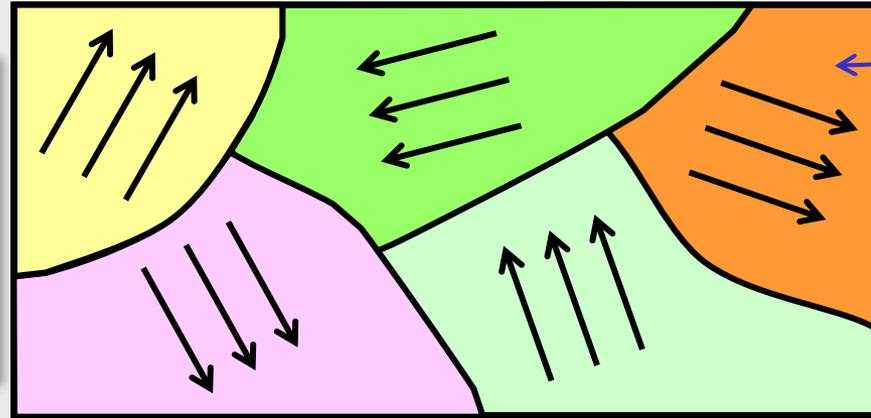


Beispiel: $p_m = 1 \mu_B$ $B = 1 \text{ T}$ $T = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ $\Rightarrow M = 8 \cdot 10^{-4} M_S$ winzig!

3.8.5. Ferromagnetismus

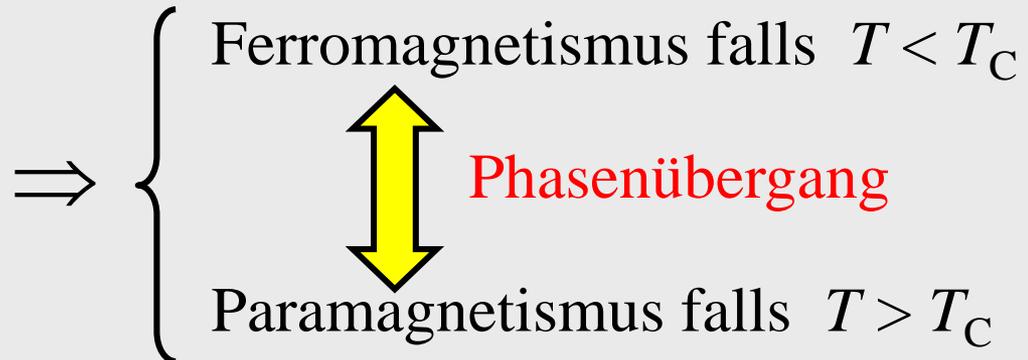
- Atome/Moleküle mit **ungepaarten** äußeren Elektronen \Rightarrow **Spin** $\Rightarrow p_m$
- Quantenmechanische **Austauschwechselwirkung** der Elektronen \Rightarrow permanente atomare magn. Momente p_m : **spontan kollektiv orientiert**
- Bsp.: **Eisen (Fe)**, **Cobalt (Co)**, **Nickel (Ni)**: 3 ungepaarte d-Elektronen

Kein äußeres Feld
 \Rightarrow Zustände
minimaler Energie
haben $M_{\text{tot}} = 0$



Magn. Domänen
(Weißsche Bezirke)
spontan magnetisiert

Kritische Temperatur
(Curie-Temperatur T_C)



Äußeres B-Feld \Rightarrow Wandern der Domänenwände,
Ausweitung der Domänen

\Rightarrow hörbares Barkhausen Rauschen (Umklappen der p_m)

Energieverbrauch (gewonnen aus potentieller Energie der p_m im B-Feld)

Magnetisierungsweg: Folge benachbarter lokaler Energieminima

\Rightarrow abhängig von Vorgeschichte \Rightarrow Hysteresekurve

Elektrodynamik

$$w_m \stackrel{\downarrow}{=} \frac{1}{2} BH = \frac{\mu\mu_0}{2} H^2$$

$$dw_m = \mu\mu_0 H dH = H dB$$

$$= \frac{1}{\chi_m} M dB$$

$$\oint dw_m = \frac{1}{\chi_m} \oint M dB \Rightarrow \text{Wärme}$$

