

4. Elektrodynamik – Quasistatik

Dynamik \leftrightarrow $\rho(\vec{r}, t)$ $\vec{j}(\vec{r}, t)$ $\vec{E}(\vec{r}, t)$ $\vec{B}(\vec{r}, t)$

Quasistatik (Folge statischer Situationen) \leftrightarrow

- Lichtgeschwindigkeit c „ $\rightarrow \infty$ “
- „Langsame“ Änderung von Ladungen und Strömen
- „Kleine“ Schaltkreise (Ladungs/Strom-Konfigurationen)

Begründung in Kap. 5

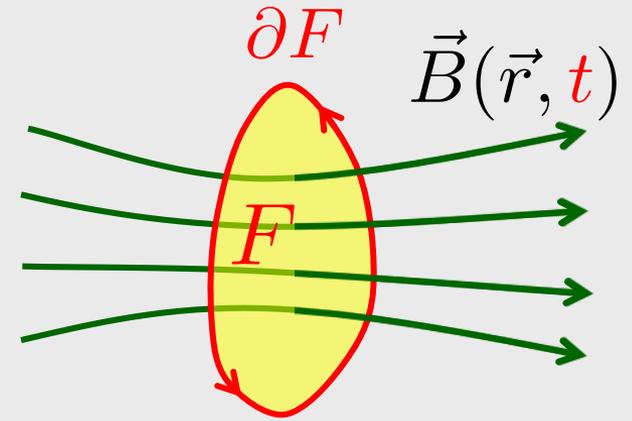
Beispiel: $I(t) = I_0 \sin(\omega t) = I_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right)$

- Zeitskala für Änderung der Konfiguration: T
- Durchmesser des Schaltkreises: D
- Quasistatische Situation falls $D \ll c \cdot T$
- Zulässige Frequenzen: $\nu = \frac{1}{T} \ll \frac{c}{D}$

4.1. Faradaysches Induktionsgesetz u. Lenzsche Regel

Experimentelle Beobachtung:

Änderung des magnetischen Flusses durch Fläche F induziert Ringspannung entlang des geschlossenen Randes ∂F der Fläche



- fiktiver geschlossener Weg
- reale Leiterschleife

Induktionsgesetz

$$U_{\text{ind}} = -\dot{\Phi}_{\text{m}}$$

U_{ind} : **induzierte Spannung** gemessen in der Schleife

Φ_{m} : **magnetischer Fluss** gemessen im Labor

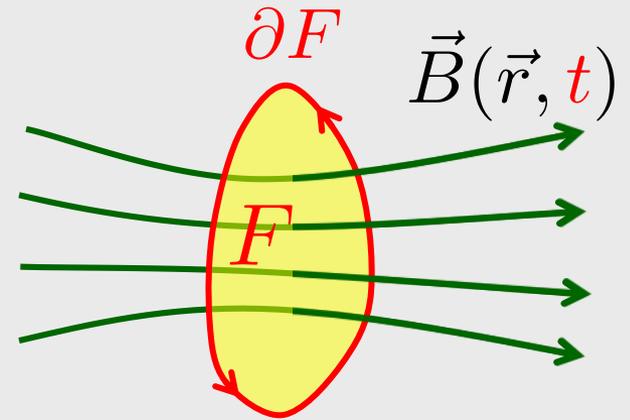
Induktionsgesetz

$$U_{\text{ind}} = -\dot{\Phi}_{\text{m}}$$

Beispiel: Ruhende Fläche F

$$U_{\text{ind}} = \oint_{\partial F} \vec{E} d\vec{s} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_F \text{rot } \vec{E} d\vec{a}$$

$$\dot{\Phi}_{\text{m}} = \frac{d}{dt} \int_F \vec{B} d\vec{a} = \int_F \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{a}$$



für alle Flächen F

Folgerung:

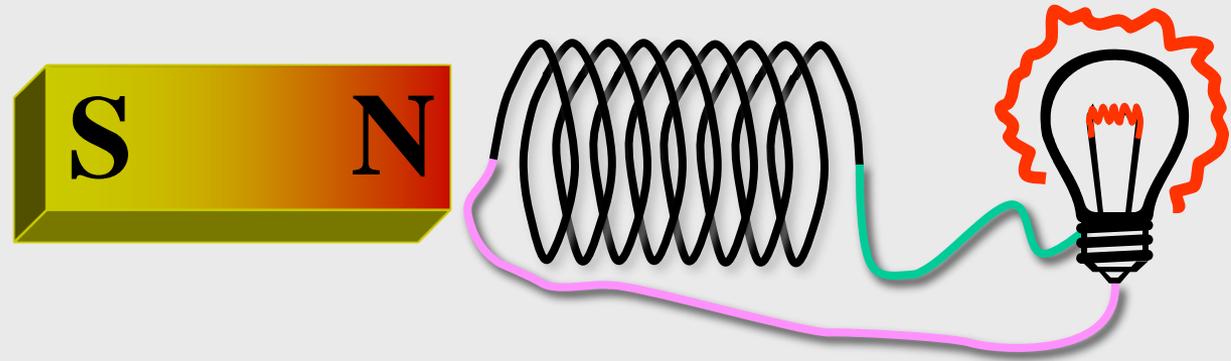
$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

\Rightarrow elektrisches **Wirbelfeld**

Bemerkung: U_{ind} ist wegababhängig \Rightarrow keine Potentialdifferenz.

Daher oft Bezeichnung: $U_{\text{ind}} \equiv$ **EMK**
(**E**lektro-**M**otorische **K**raft)

Test 1: B -Feld: variabel Leiterschleife: fest



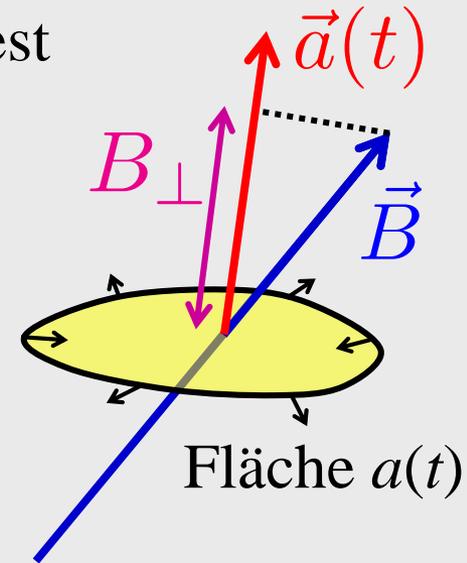
- $U_{\text{ind}} \propto$ Zahl der Spulenwicklungen
- Vorzeichen von U_{ind} wechselt mit Bewegungsrichtung des Magneten
- Vorzeichen von U_{ind} wechselt mit Magnetorientierung
- Effekt durch Eisenkern verstärkbar
- Magnet ersetzbar durch Spule mit variierendem Stromfluss

Test 2: B -Feld: konstant Leiterschleife: variable Form

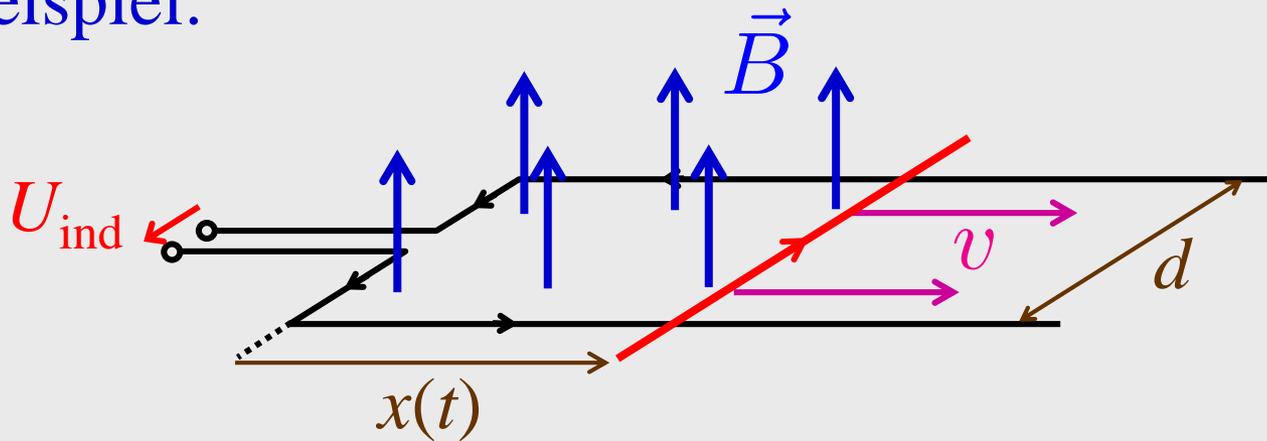
Spezialfall: B homogen, Schleife eben, Orientierung fest

$$\Phi_m = \vec{B} \cdot \vec{a}(t) = B_{\perp} a(t)$$

$$\Rightarrow U_{\text{ind}} = -B_{\perp} \dot{a}(t)$$



Beispiel:



$$a(t) = x(t)d \quad \Rightarrow \quad \dot{a}(t) = \dot{x}(t)d = vd$$

$$B_{\perp} = B \quad \Rightarrow \quad U_{\text{ind}} = -Bvd$$

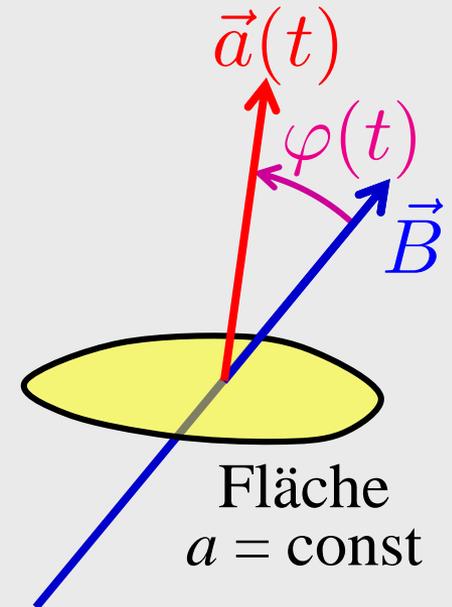
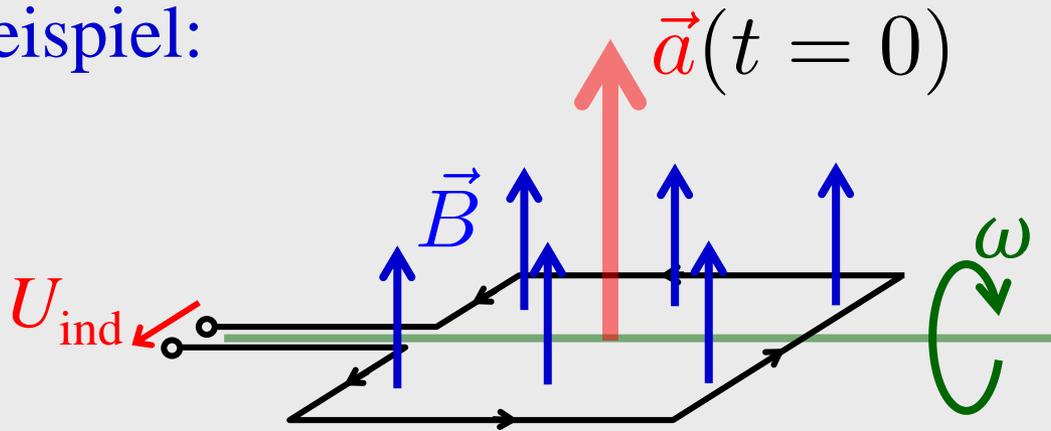
Test 3: B -Feld: konstant Leiterschleife: variable Orientierung

Spezialfall: B homogen, Schleife eben

$$\Phi_m = \vec{B} \cdot \vec{a}(t) = Ba \cos \varphi(t)$$

$$\Rightarrow U_{\text{ind}} = Ba \omega(t) \sin \varphi(t)$$

Beispiel:



$$\omega(t) = \dot{\varphi}(t)$$

$$\omega = \text{const.}, \quad \varphi(t) = \omega t \quad \Rightarrow \quad U_{\text{ind}} = Ba \omega \sin(\omega t)$$

\Rightarrow Wechselspannungsgenerator (Dynamo)

Induktionsgesetz

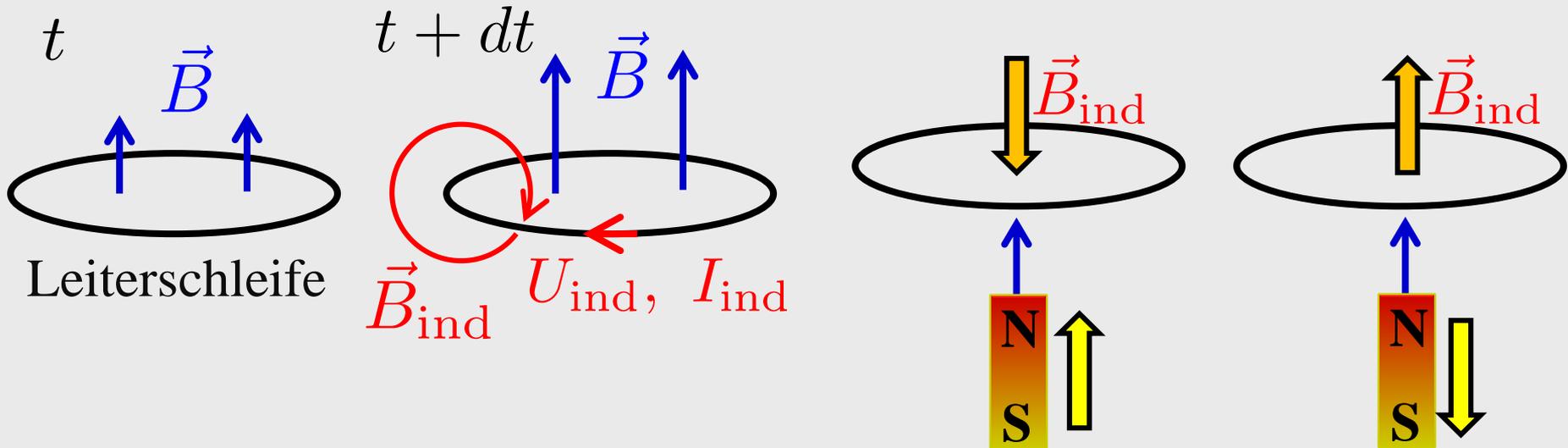
$$U_{\text{ind}} = -\dot{\Phi}_m$$



Lenzsche Regel:

Die Induktion wirkt ihrer Ursache stets **entgegen** (Gegenspannungen, Gegenkräfte etc.)

- im Einzelfall: $U_{\text{ind}} \Rightarrow I_{\text{ind}} \Rightarrow$ Gegenfeld B_{ind}



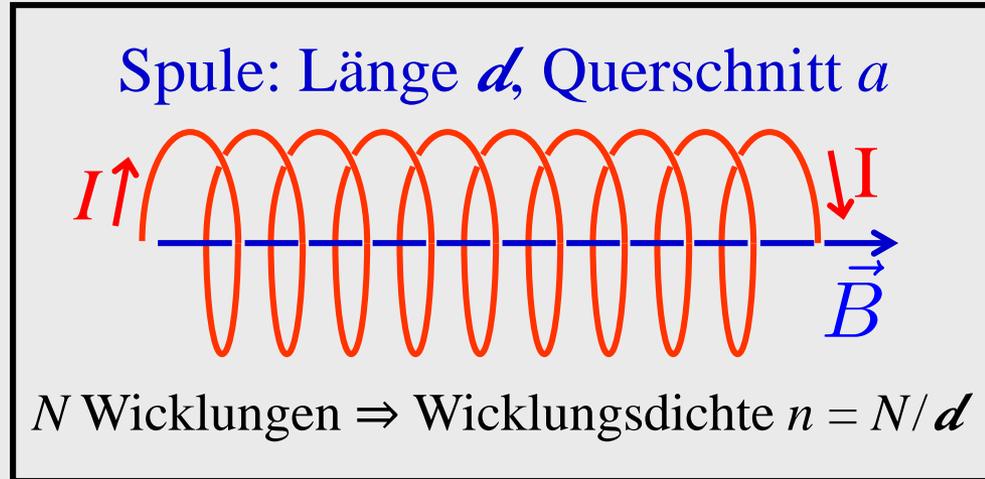
- generell: $U_{\text{ind}} \Rightarrow I_{\text{ind}} \Rightarrow$ Energieverbrauch
 \Rightarrow Ursache muss Arbeit verrichten \Rightarrow Gegen-, „Kraft“

Anwendungsbeispiel: Wirbelstrombremse

4.2. Induktivität u. Feldenergie

Betrachte beliebige Leiterschleife

(Beispiel: Spule)



Biot-Savart-Gesetz \Rightarrow

$$\vec{B} \propto I \Rightarrow \Phi_m = \int_F \vec{B} d\vec{a} \propto I \Rightarrow U_{\text{ind}} = -\dot{\Phi}_m \propto -\dot{I}$$

Definition: $L \equiv \frac{\Phi_m}{I} = -\frac{U_{\text{ind}}}{\dot{I}}$ Selbstinduktionskoeffizient
bzw. Induktivität

• L hängt nur von der (festen) Schleifengeometrie ab

• Maßeinheit: $[L] = \text{V s A}^{-1} = \text{H} = \text{Henry}$

• Schaltsymbol



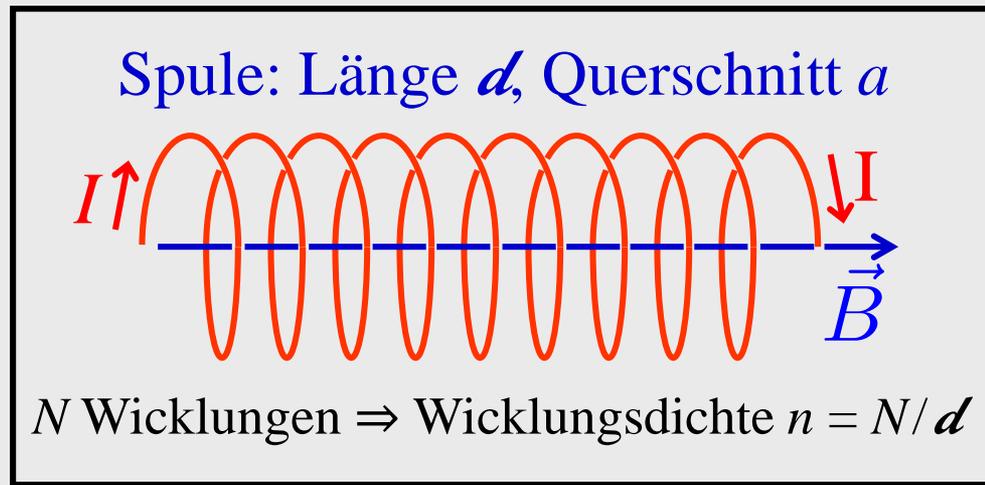
Beispiel: Zylinderspule

$$\text{Magnetostatik} \Rightarrow B = \mu_0 n I$$

$$\Phi_m = \underbrace{N a}_{\text{Gesamt-Fläche}} B = n \underbrace{V}_{\text{Spulen-Volumen}} B$$

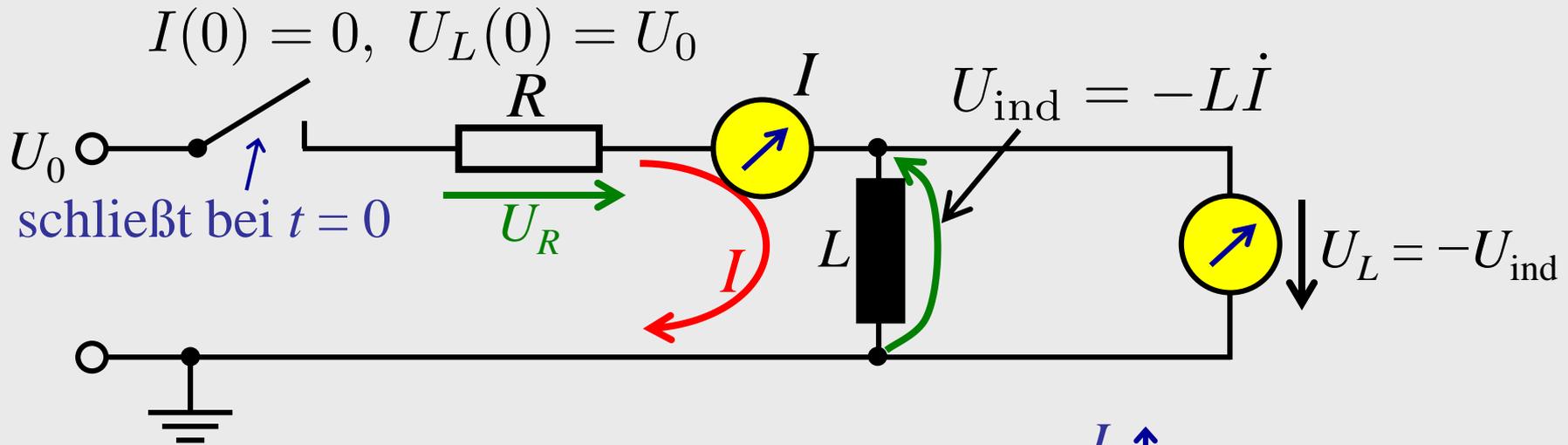
$$\Rightarrow \Phi_m = \mu_0 n^2 V \cdot I$$

$$\Rightarrow L = \mu_0 n^2 V \propto n^2$$



- Das Magnetfeld steigt proportional zur Wicklungsdichte
- Die Induktivität steigt mit dem Quadrat der Wicklungsdichte

Beispiel: quasistatischer Einschaltvorgang einer Induktivität



Maschen sind B -Feld-frei

(B -Feld ist eingeschperrt in Induktivität)

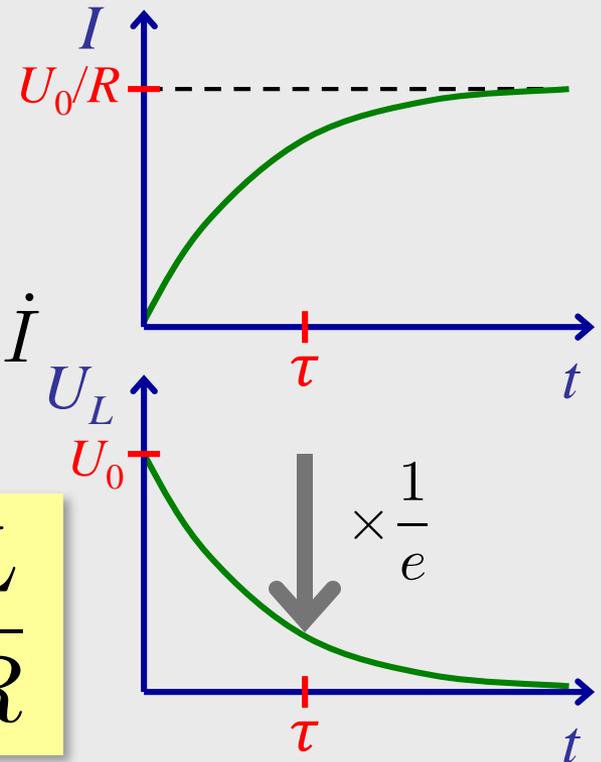
$$U_0 = U_R + U_L = U_R - U_{\text{ind}} = RI + L\dot{I}$$

Lösung:

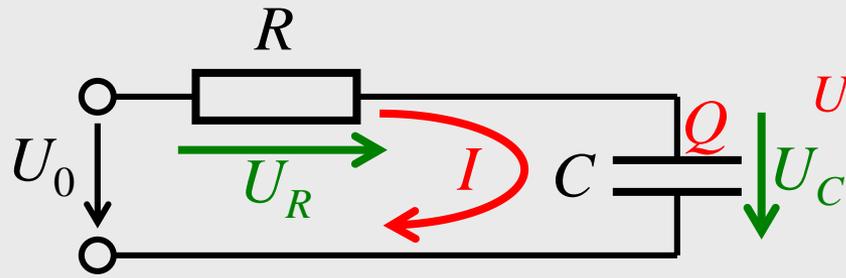
$$I(t) = \frac{U_0}{R} \left(1 - e^{-t/\tau} \right)$$

$$U_L(t) = L\dot{I} = U_0 e^{-t/\tau}$$

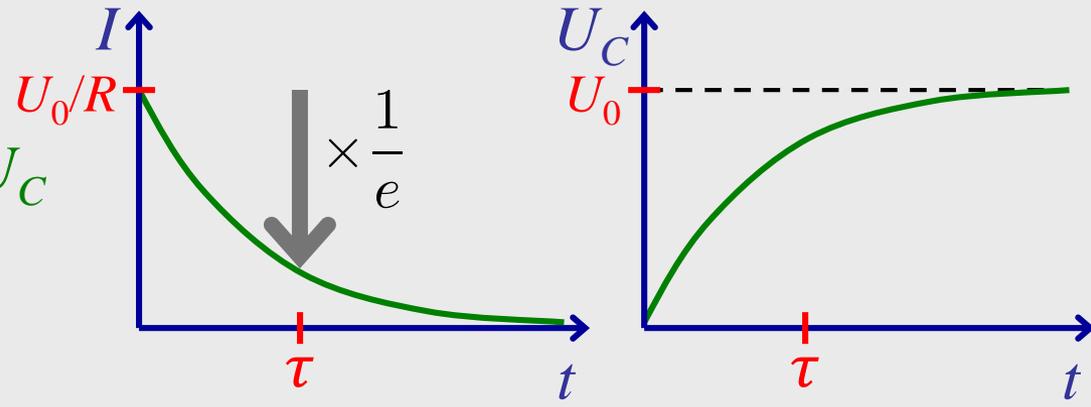
$$\tau = \frac{L}{R}$$



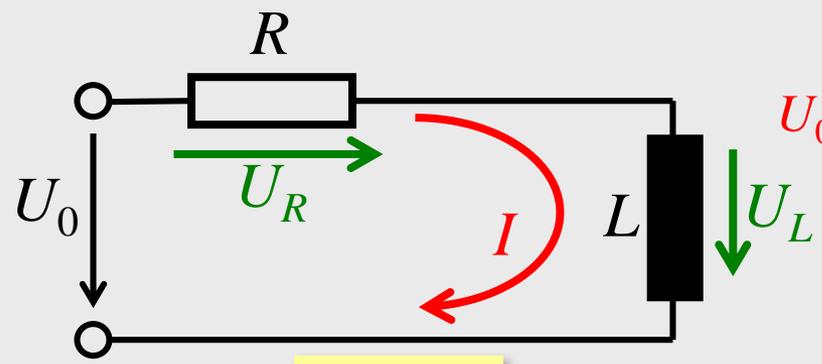
Vergleich: Kapazität \leftrightarrow Induktivität



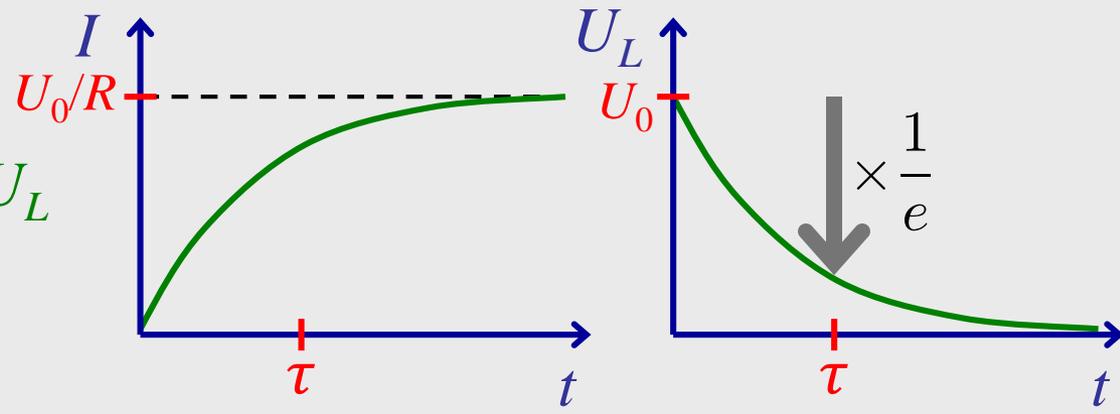
$$\tau = RC$$



erst Stromfluss, Spannungsaufbau verzögert



$$\tau = \frac{L}{R}$$



erst Spannung, Stromfluss verzögert

Energie des Magnetfeldes in einer Induktivität:

$$\begin{aligned} W_{\text{m}}(t) &= \int_0^t U_L(\tilde{t}) I(\tilde{t}) d\tilde{t} = L \int_0^t \dot{I}(\tilde{t}) I(\tilde{t}) d\tilde{t} \\ &= \frac{L}{2} \int_0^t \frac{dI^2(\tilde{t})}{d\tilde{t}} d\tilde{t} = \frac{L}{2} (I^2(t) - I^2(0)) = \frac{1}{2} L I^2(t) \end{aligned}$$

Vergleich: **Kapazität** \leftrightarrow **Induktivität**

Magnetische Energie in
Induktivität L

$$W_{\text{m}}(t) = \frac{1}{2} L I^2$$

Elektrische Energie in
Kapazität C

$$W_{\text{el}}(t) = \frac{1}{2} C U^2$$

Energiedichte des Magnetfeldes in einer Spule (mit Kern):

$$L = \mu\mu_0 n^2 V \Rightarrow w_m = \frac{W_m}{V} = \frac{1}{2} \frac{L}{V} I^2 = \frac{1}{2} \mu\mu_0 n^2 I^2$$

$$B = \mu\mu_0 H = \mu\mu_0 n I \Rightarrow w_m = \frac{1}{2} \vec{B} \vec{H}$$

gilt auch allgemein

Vergleich: magnetische Energiedichte \leftrightarrow elektrische Energiedichte

$$w_m = \frac{1}{2} \vec{B} \vec{H}$$

$$w_{el} = \frac{1}{2} \vec{E} \vec{D}$$

$$\vec{B} \equiv \mu\mu_0 \vec{H}$$

$$\vec{D} \equiv \epsilon\epsilon_0 \vec{E}$$

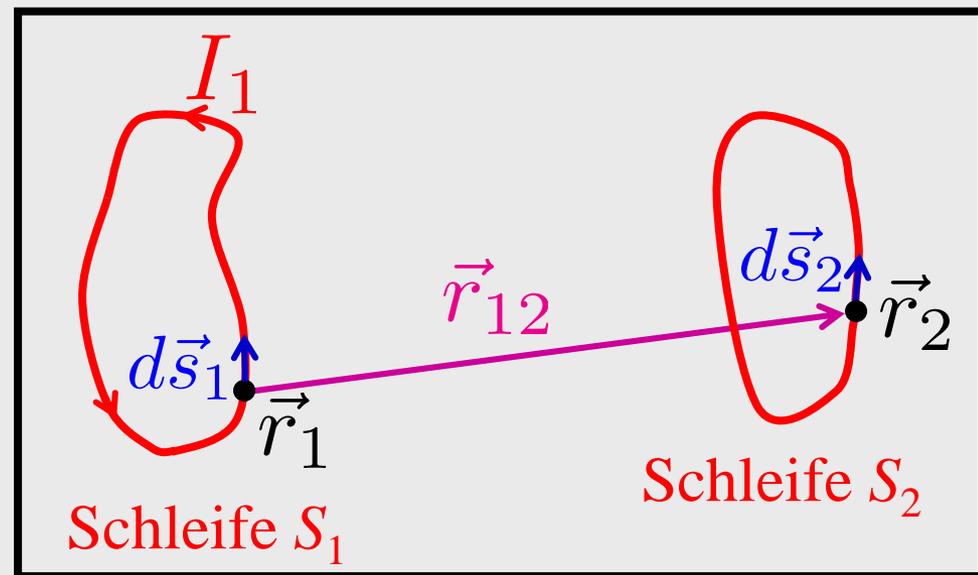
4.3. Gegenseitige Induktivität

Biot-Savart-Gesetz \Rightarrow

$$\vec{A}(\vec{r}_2) = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{\partial S_1} \frac{d\vec{s}_1}{r_{12}}$$

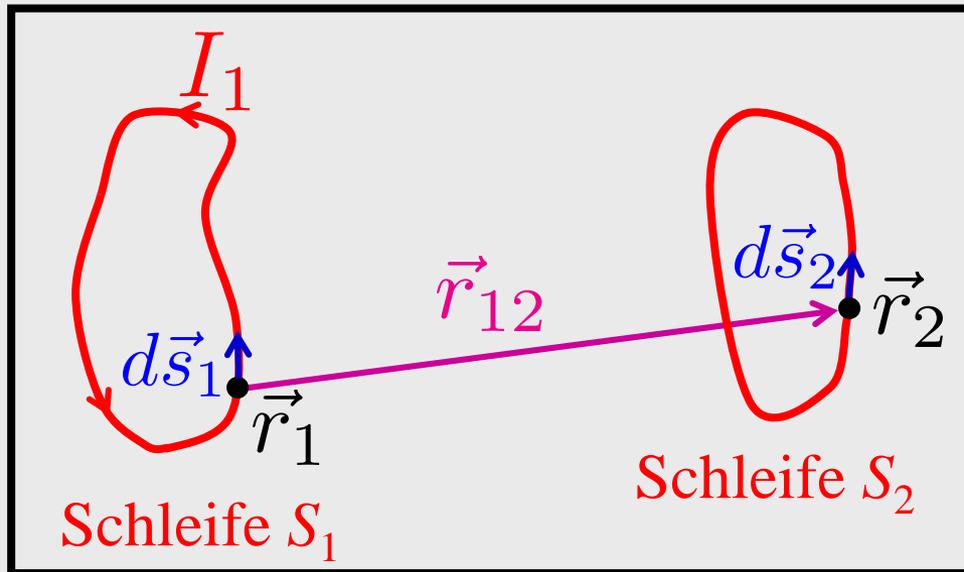
\Rightarrow Fluss durch Schleife 2:

$$\begin{aligned} \Phi_m &= \int_{S_2} \vec{B} d\vec{a} = \int_{S_2} \text{rot } \vec{A} d\vec{a} = \oint_{\partial S_2} \vec{A}(\vec{r}_2) d\vec{s}_2 \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\partial S_1} \oint_{\partial S_2} \frac{d\vec{s}_1 d\vec{s}_2}{r_{12}} \cdot I_1 \equiv L_{12} \cdot I_1 \end{aligned}$$



Gegeninduktivität

$$L_{12} = L_{21} \equiv \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\partial S_1} \oint_{\partial S_2} \frac{d\vec{s}_1 d\vec{s}_2}{r_{12}}$$



$$L_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\partial S_1} \oint_{\partial S_2} \frac{d\vec{s}_1 d\vec{s}_2}{r_{12}}$$

hängt nur von Schleifen-
Geometrie ab

Fazit:

$$\Phi_m(S_2) = L_{12} I_1$$

$$U_{\text{ind}}(S_2) = -L_{12} \dot{I}_1$$

Bemerkung:

$$-\sqrt{L_1 L_2} \leq L_{12} \leq +\sqrt{L_1 L_2}$$

4.4. Wechselstromlehre

4.4.1. Erinnerung: komplexe Zahlen

Komplexe Zahl: $z = x + iy$ mit $i^2 = -1$

Darstellungen:

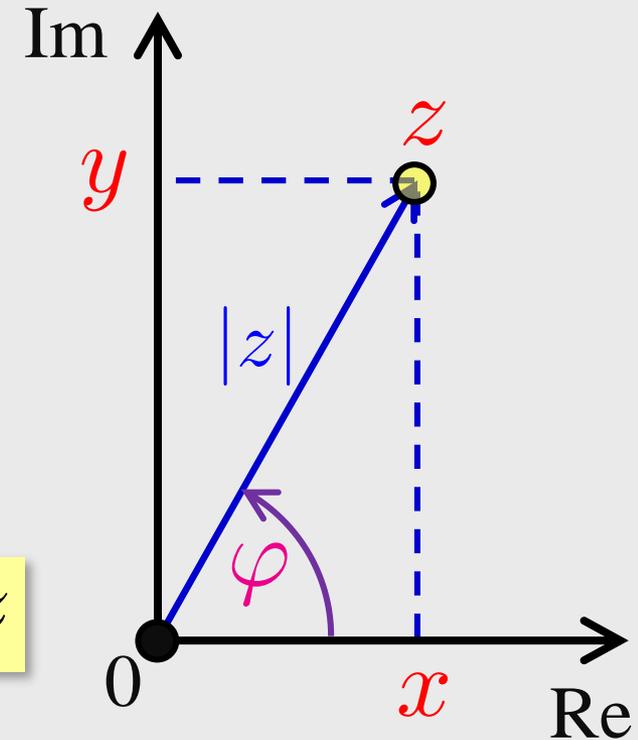
$$\begin{aligned}z &= x + iy \\ &= |z| \cos \varphi + i |z| \sin \varphi \\ &= |z| e^{i\varphi}\end{aligned}$$

Betrag von z : $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Phase φ von z : $\tan \varphi = \frac{y}{x}$ $\varphi \equiv \arg z$

Realteil von z : $\operatorname{Re} z = x$

Imaginärteil von z : $\operatorname{Im} z = y$



Der Imaginärteil einer komplexen Zahl ist eine reelle Zahl!

Komplexe Zahl: $z = x + iy$ mit $i^2 = -1$

Zur Phase: $\varphi, \varphi \pm 2\pi, \varphi \pm 4\pi, \dots$ sind äquivalent („gleich“)

- Wähle ein Intervall der Länge 2π , z.B.

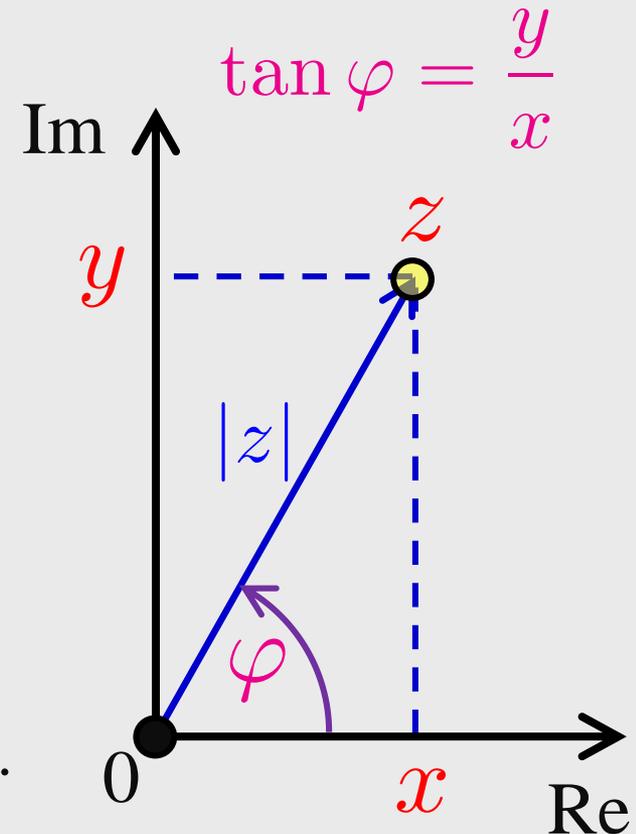
$$-\pi < \varphi \leq +\pi$$

- Dann folgt φ (für $z \neq 0$) eindeutig aus

$$\cos \varphi = \frac{x}{|z|}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{|z|}$$

- Hierfür existieren Computer-Funktionen, z.B.

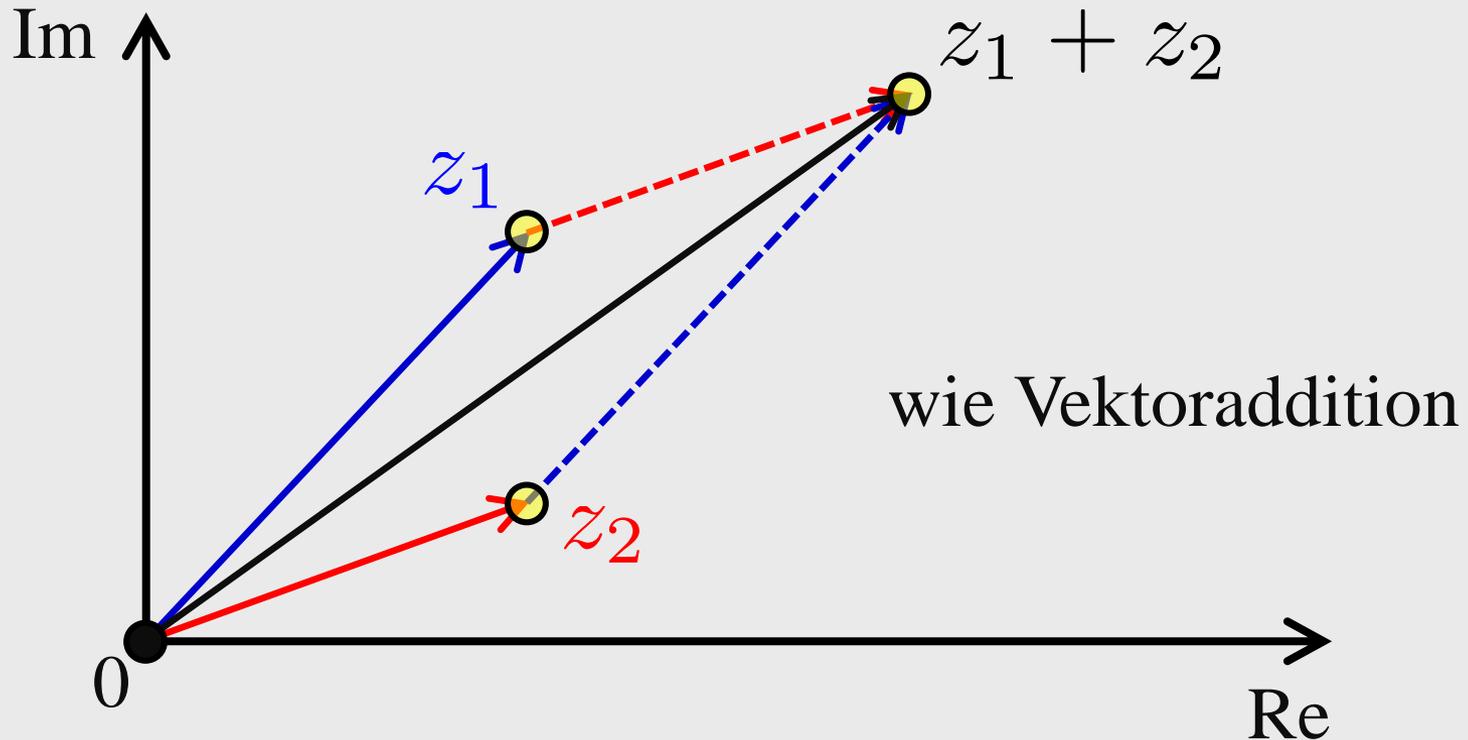
```
double atan2(double y, double x);
```



Addition komplexer Zahlen

$$z_1 = x_1 + iy_1 \quad z_2 = x_2 + iy_2$$

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$



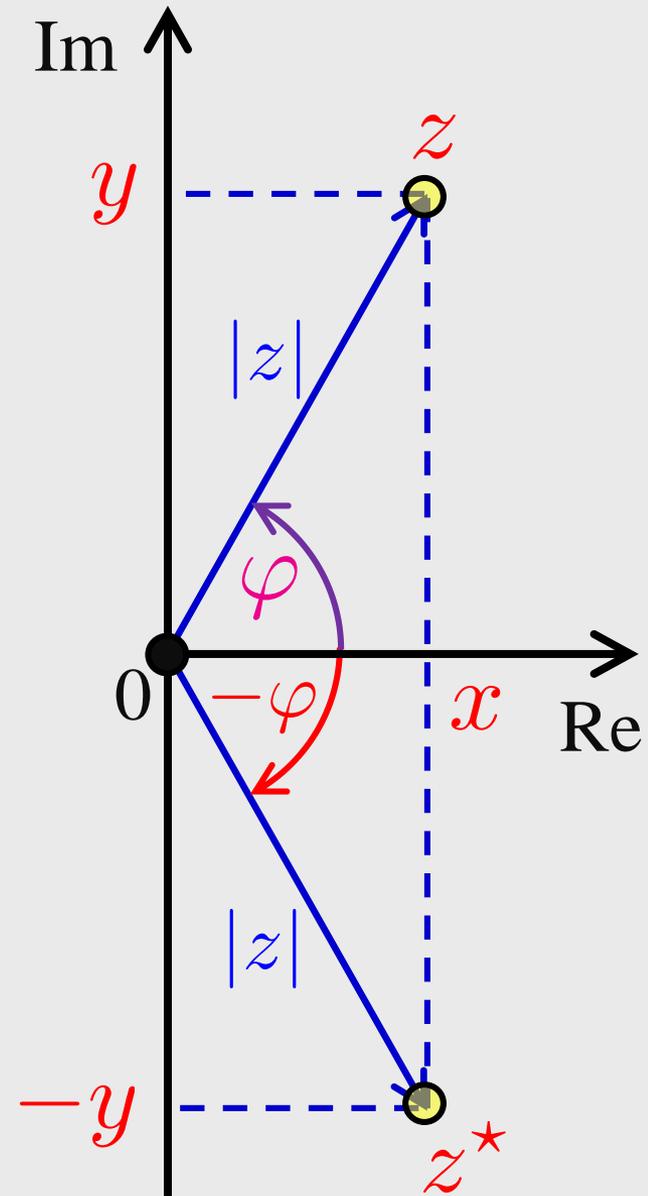
Komplexe Konjugation

$$z = x + iy = |z|e^{i\varphi}$$

$$z^* = x - iy = |z|e^{-i\varphi}$$

$$x = \operatorname{Re} z = \frac{z + z^*}{2}$$

$$y = \operatorname{Im} z = \frac{z - z^*}{2i}$$

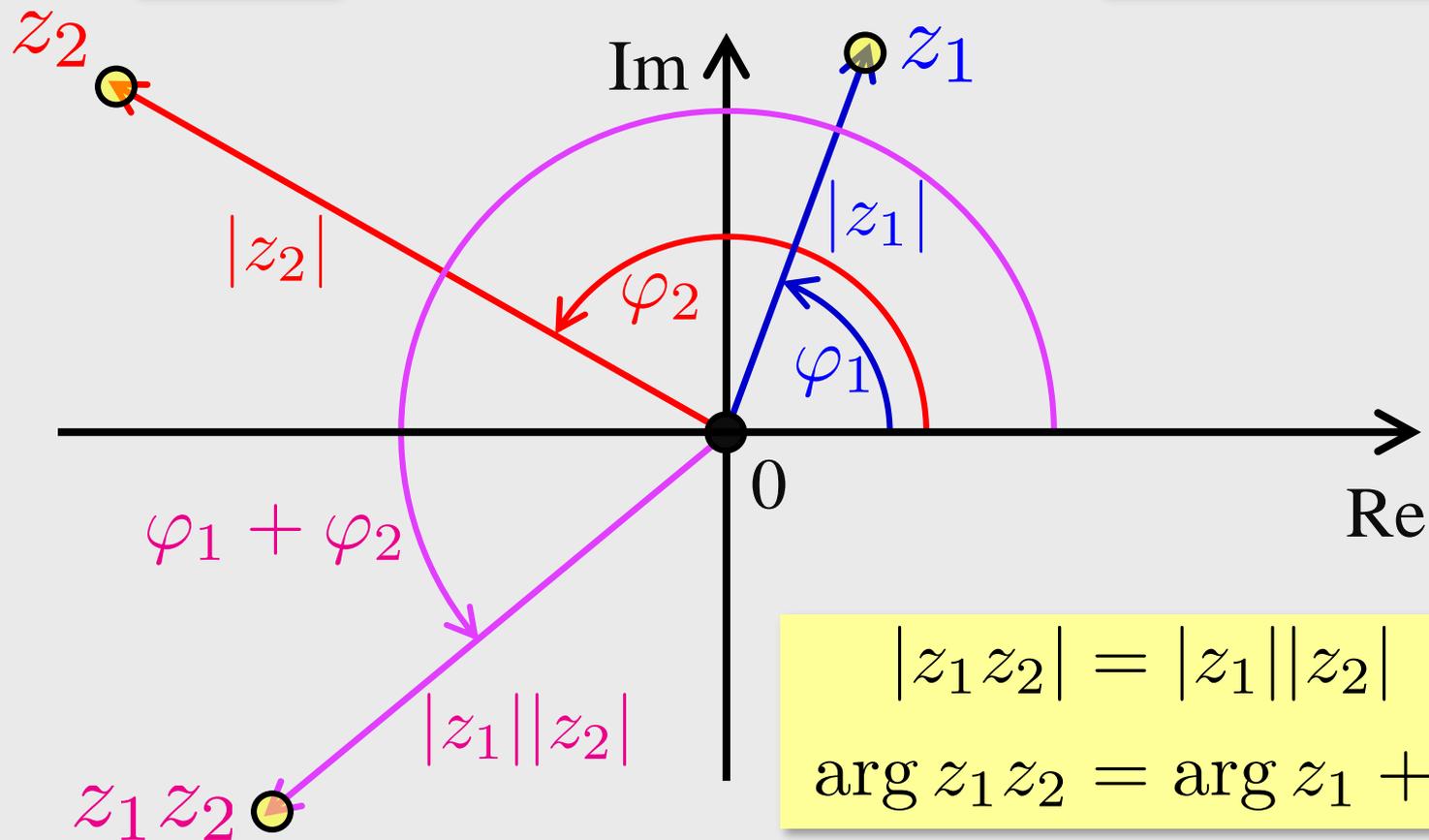


Multiplikation komplexer Zahlen

$$z_1 = x_1 + iy_1 = |z_1|e^{i\varphi_1} \quad z_2 = x_2 + iy_2 = |z_2|e^{i\varphi_2}$$

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) = |z_1||z_2|e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

Beispiel: $zz^* = |z|e^{i\varphi}|z|e^{-i\varphi} = |z|^2 e^0 = |z|^2 = x^2 + y^2$



Division: Reziproke Zahlen

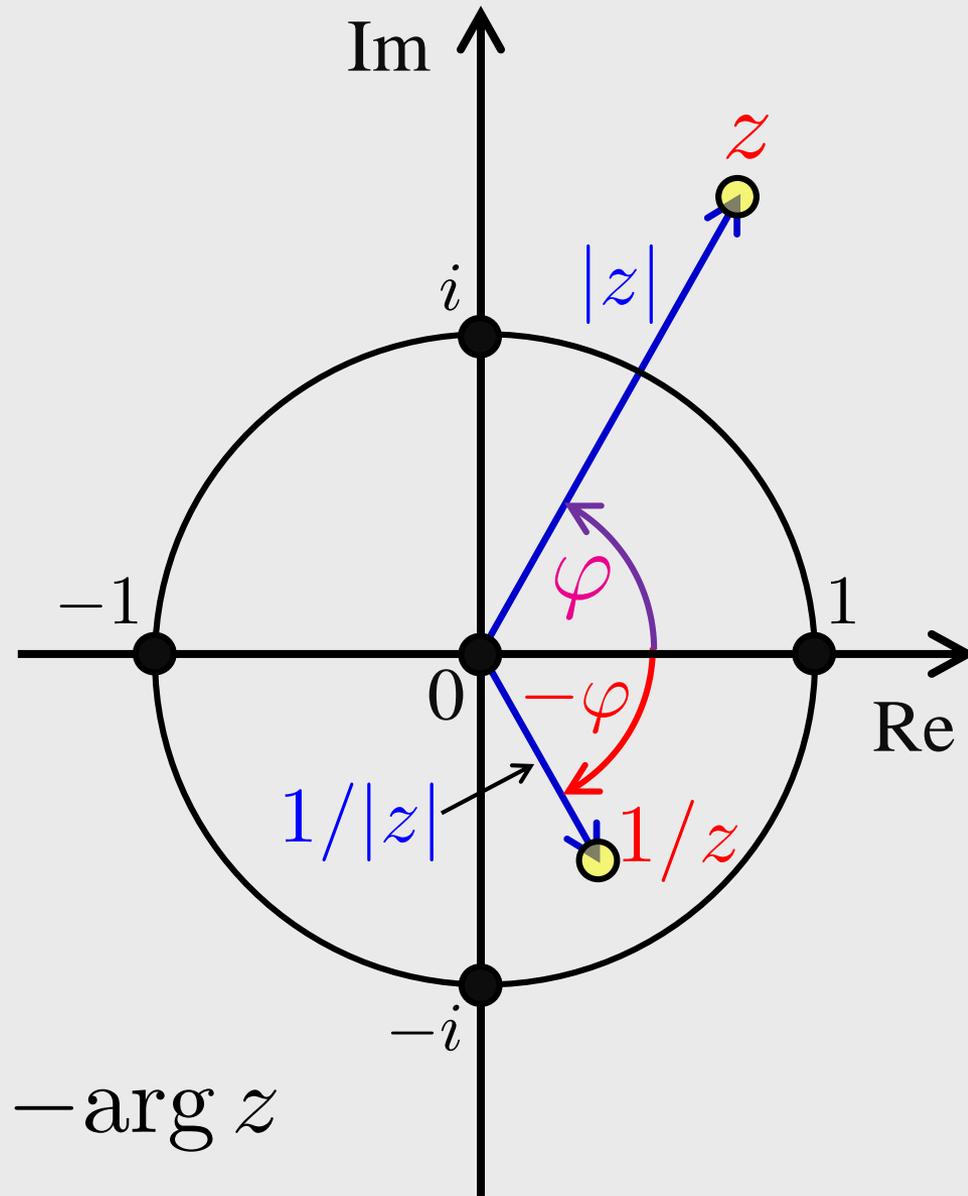
$$z = x + iy = |z|e^{i\varphi}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{z^*}{zz^*}$$

$$= \frac{1}{|z|} e^{-i\varphi}$$

$$= \frac{x}{|z|^2} - i \frac{y}{|z|^2}$$

$$\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}, \quad \arg \frac{1}{z} = -\arg z$$



Division zweier komplexer Zahlen

$$z_1 = x_1 + iy_1 = |z_1|e^{i\varphi_1}, \quad z_2 = x_2 + iy_2 = |z_2|e^{i\varphi_2}$$

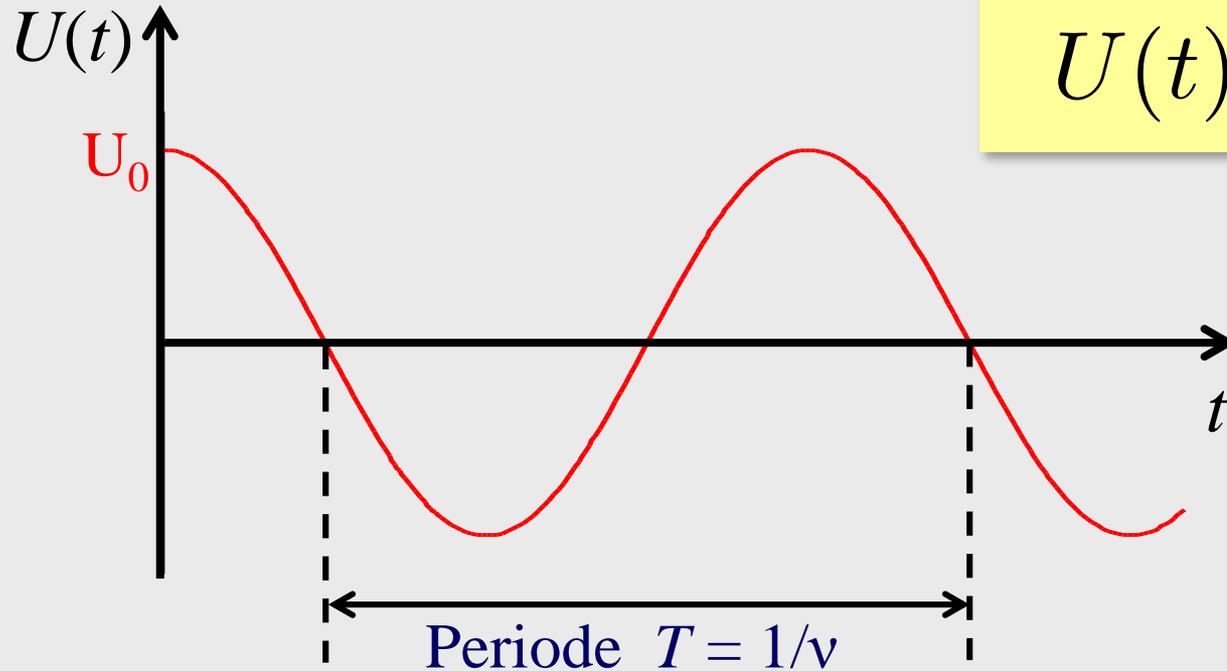
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} = \frac{z_1 z_2^*}{|z_2|^2}$$

$$= \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$$

4.4.2. Wechselstrom



Harmonische Wechselspannung

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t)$$

Schaltsymbol:



U_0 : Scheitelwert $U(t)$: Momentanwert

T : Periode $\nu = \frac{1}{T}$: Frequenz

$\omega = \frac{2\pi}{T}$: Kreisfrequenz

Europa

$$U_0 = \sqrt{2} \cdot 230 \text{ V}$$

$$\nu = 50 \text{ Hz}$$

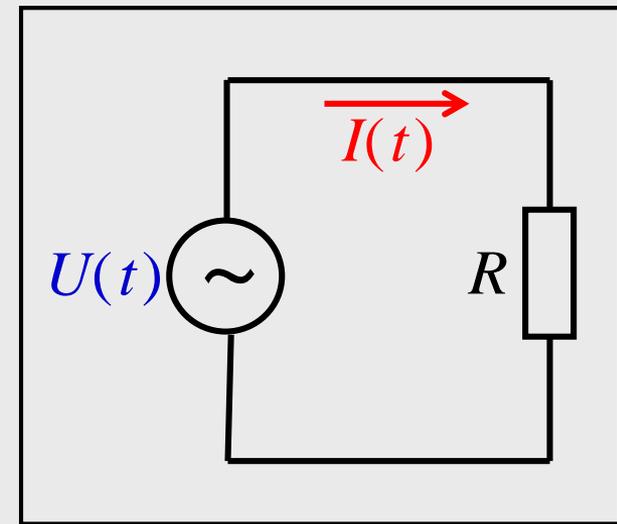
U.S.A.

$$U_0 = \sqrt{2} \cdot 110 \text{ V}$$

$$\nu = 60 \text{ Hz}$$

Harmonische Wechselspannung

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t)$$



⇒ Wechselstrom im ohmschen Verbraucher

$$I(t) = \frac{U(t)}{R} = \frac{U_0}{R} \cos(\omega t)$$

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t) \quad \text{mit}$$

$$I_0 = \frac{U_0}{R}$$

Leistung im ohmschen Verbraucher

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t) , \quad I(t) = \frac{U_0}{R} \cos(\omega t)$$

Momentanwert:

$$P(t) = U(t)I(t) = \frac{U^2(t)}{R} = RI^2(t)$$

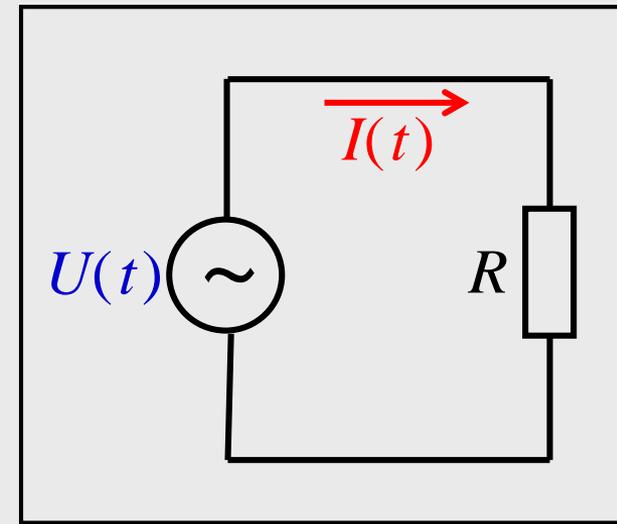
$$P(t) = \frac{U_0^2}{R} \cos^2(\omega t) = \frac{U_0^2}{2R} (1 + \cos(2\omega t))$$

Mittlere Leistung (über eine Periode):

$$\bar{P} = \frac{1}{R} \overline{U^2} = R \overline{I^2} = \frac{U_0^2}{2R} \quad \text{weil} \quad \overline{\cos(2\omega t)} = 0$$

mit Mittelwertbildung

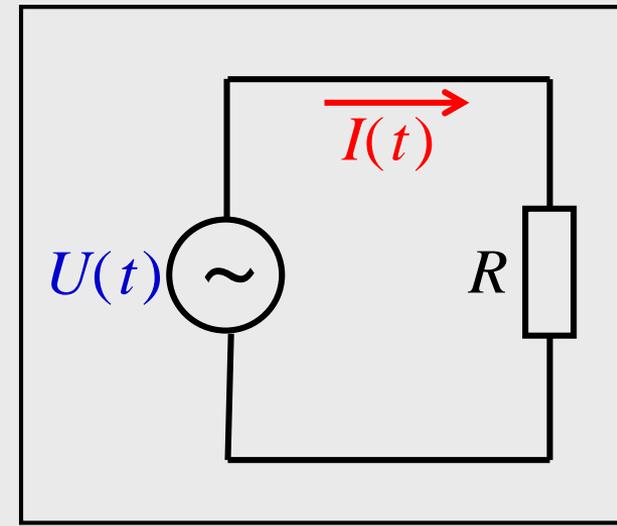
$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt \quad \text{etc.}$$



Leistung im ohmschen Verbraucher

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t) , \quad I(t) = \frac{U_0}{R} \cos(\omega t)$$

$$\bar{P} = \frac{1}{R} \overline{U^2} = R \overline{I^2} = \frac{U_0^2}{2R}$$



Bezeichnung für beliebige periodische Wechselspannungen

$$\text{Effektivspannung: } U_{\text{eff}} = \sqrt{\overline{U^2}}$$

$$\text{Effektivstrom: } I_{\text{eff}} = \sqrt{\overline{I^2}}$$

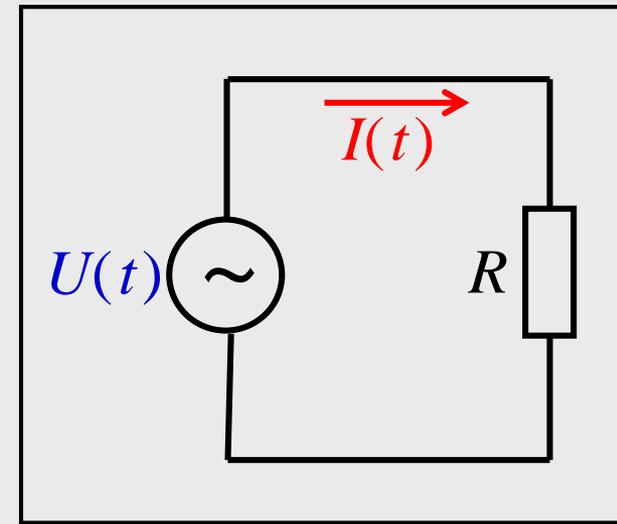
⇒ mittlere Leistung im ohmschen Verbraucher

$$\bar{P} = \frac{U_{\text{eff}}^2}{R} = R I_{\text{eff}}^2 = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}}$$

Leistung im ohmschen Verbraucher

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t) , \quad I(t) = \frac{U_0}{R} \cos(\omega t)$$

$$\bar{P} = \frac{U_{\text{eff}}^2}{R} = RI_{\text{eff}}^2 = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}}$$



Für harmonische Wechselspannung: $\bar{P} = \frac{U_0^2}{2R} = \frac{1}{2} RI_0^2$

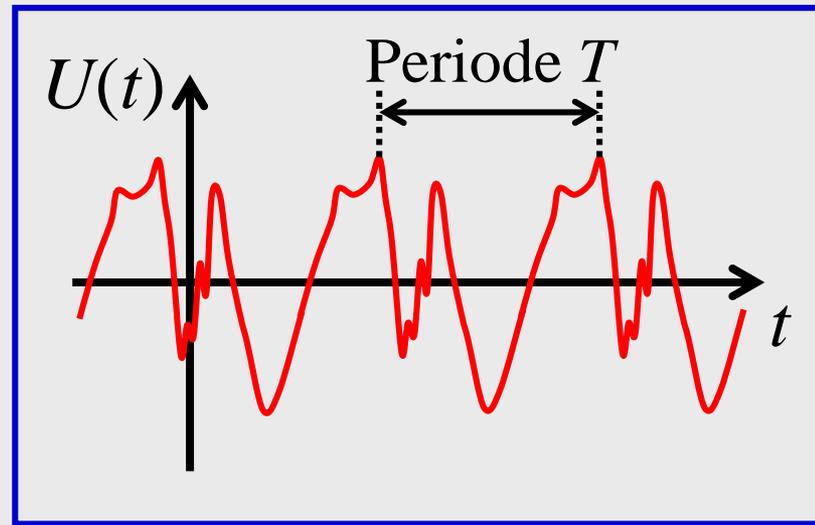
Folgerung für harmonische Wechselspannung:

$$U_{\text{eff}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} , \quad I_{\text{eff}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} , \quad \bar{P} = \frac{1}{2} U_0 I_0$$

Allgemeine Wechselspannung:

Periode T : $U(t) = U(t + T)$

Fundamentalkreisfrequenz: $\omega = \frac{2\pi}{T}$



Theorem (Fourierzerlegung): $U(t)$ ist zerlegbar in Überlagerung von **harmonischen** Wechselspannungen...

U_0 : Gleichspannung

Bias-Spannung

U_1 : Kreisfrequenz ω

Grundwelle \triangleq **Tonhöhe**

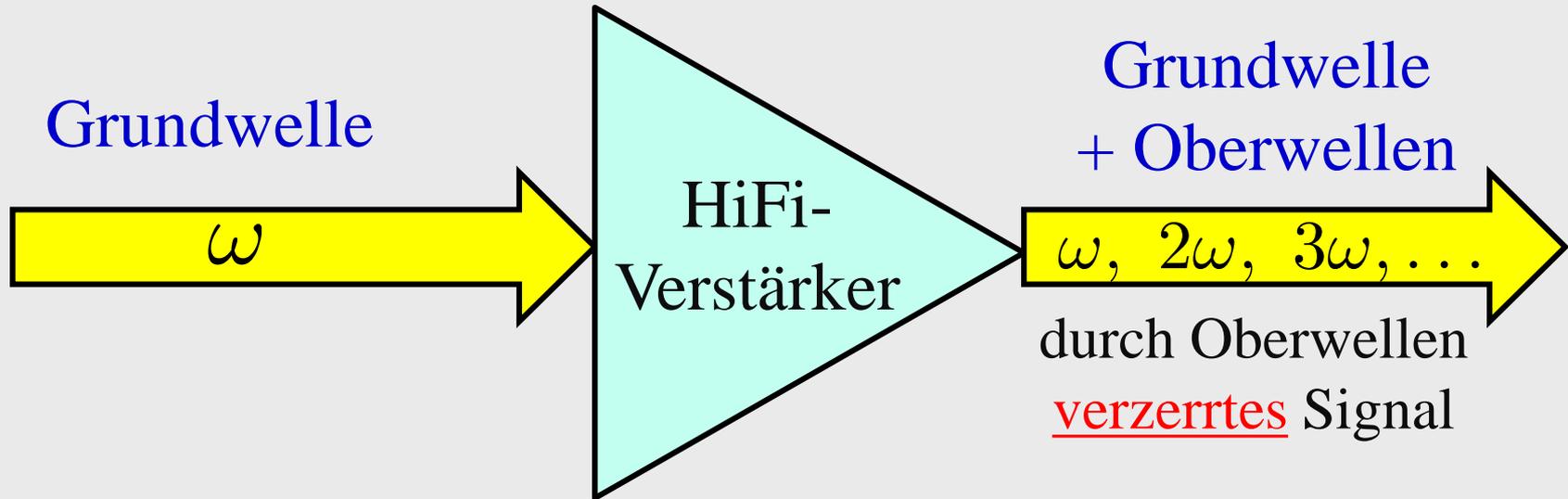
U_2 : Kreisfrequenz 2ω

U_3 : Kreisfrequenz 3ω

Oberwellen \triangleq **Klang**

...

Quantifizierung der Linearität einer Schaltung:



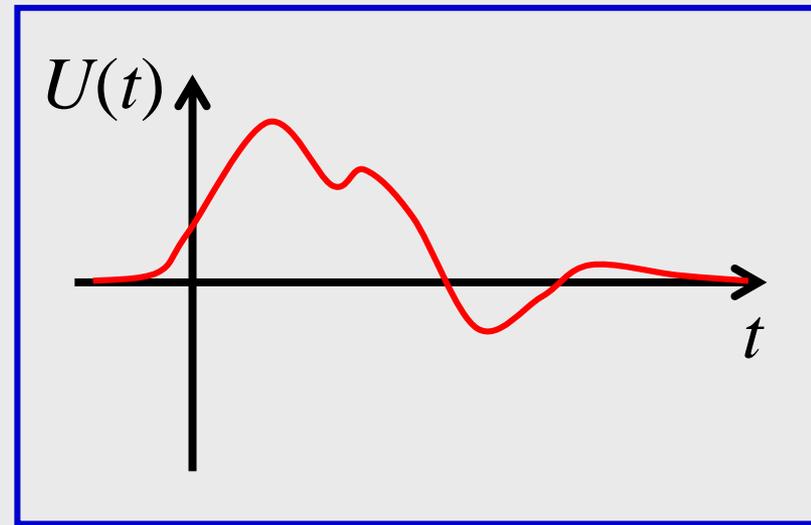
$$\text{Klirrfaktor} = \frac{U_{\text{eff}}(\text{nur Oberwellen})}{U_{\text{eff}}(\text{Gesamtsignal})}$$

Nicht-periodische Spannung:

(Einschaltvorgang, Testpulse etc.)

Periode $T \rightarrow \infty$

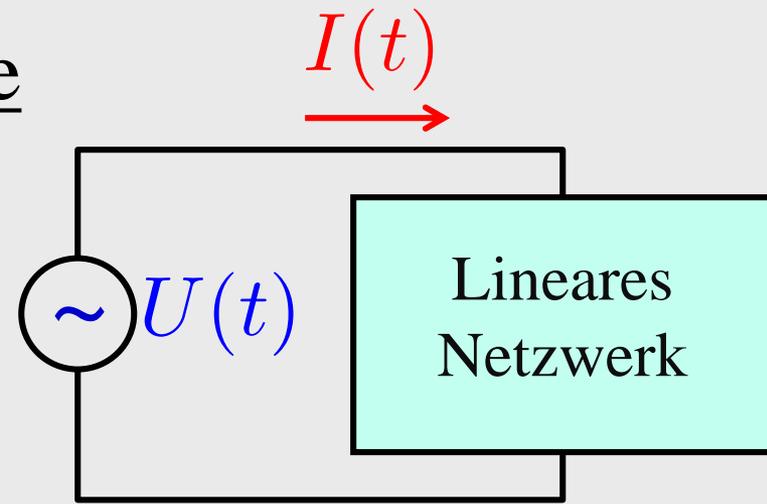
Fundamentalkreisfrequenz $\omega \rightarrow 0$



Theorem (Fouriertransformation): $U(t)$ ist zerlegbar in Überlagerung von **harmonischen** Wechselspannungen **aller** möglichen Kreisfrequenzen von **0** bis ∞ .

Folgerung: Für **lineare** Netzwerke (\leftrightarrow **Superpositionsprinzip** anwendbar) reicht es aus, das Verhalten für **harmonische** Wechselströme/Wechselspannungen zu untersuchen.

4.4.3. Wechselstromwiderstände



Differentialgleichung

Lineare Netzwerke: Zeitverhalten \leftrightarrow **lineare** DGL

Lineare Komponenten: Widerstände, Kondensatoren, ideale Spulen, Linearverstärker, ...

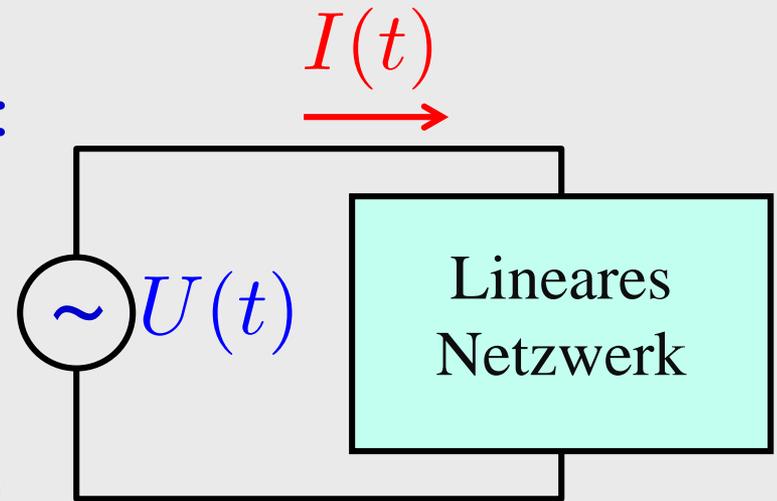
Nichtlineare Komponenten: Spulen mit Kernen nahe der Sättigungsmagnetisierung, nichtlineare Verstärker, Multiplizierer, Dioden, Glimmlampen, hochkonzentrierte Elektrolyte, ...

(1) Betrieb mit Wechselspannung:

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t)$$

Lineare Netzwerke \Rightarrow

Wechselströme gleicher Frequenz



$$I(t) = I_0 \cos(\omega t - \varphi) \quad (\text{allgemeinste Form})$$

(nach Beendigung des Einschwing-Vorgangs)

(2) Betrieb mit um $-T/4$ zeitversetzter Wechselspannung \Rightarrow

$$\tilde{U}(t) = U_0 \sin(\omega t) , \quad \tilde{I}(t) = I_0 \sin(\omega t - \varphi)$$

(3) Die DGL des linearen Netzwerkes wird durch **jede** Linearkombination dieser beiden Lösungen gelöst!

Zwei Lösungen:

$$U_0 \cos(\omega t) \quad I_0 \cos(\omega t - \varphi)$$

$$U_0 \sin(\omega t) \quad I_0 \sin(\omega t - \varphi)$$

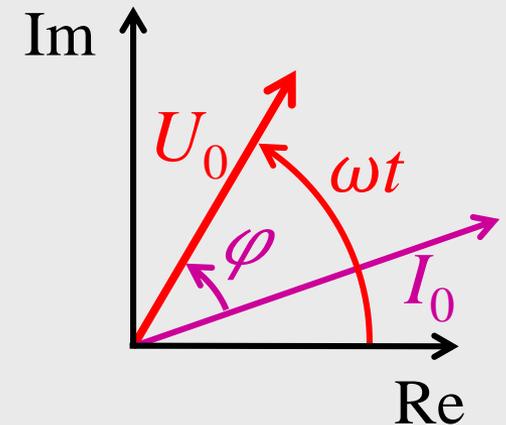
⇒ komplexe Lösung:

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t) + iU_0 \sin(\omega t) = U_0 e^{i\omega t}$$

komplexe Wechselspannung

$$I(t) = \dots = I_0 e^{i(\omega t - \varphi)}$$

komplexer Wechselstrom



physikalischer



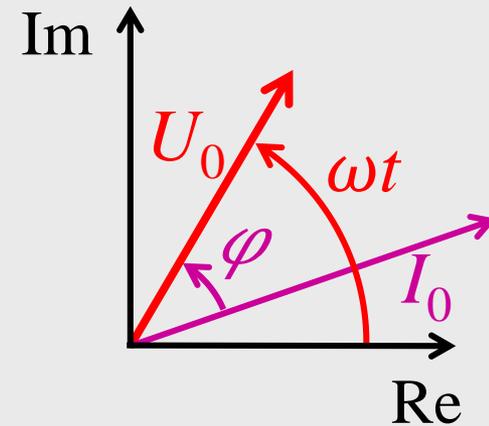
Anteil

$$\operatorname{Re} U(t) = U_0 \cos(\omega t)$$

$$\operatorname{Re} I(t) = I_0 \cos(\omega t - \varphi)$$

harmonisch

$$U(t) = U_0 e^{i\omega t} \quad , \quad I(t) = I_0 e^{i(\omega t - \varphi)}$$



Definition: **Komplexer** Wechselstromwiderstand

$$Z = Z(\omega) = \frac{U(t)}{I(t)} = \frac{U_0}{I_0} e^{i\varphi}$$

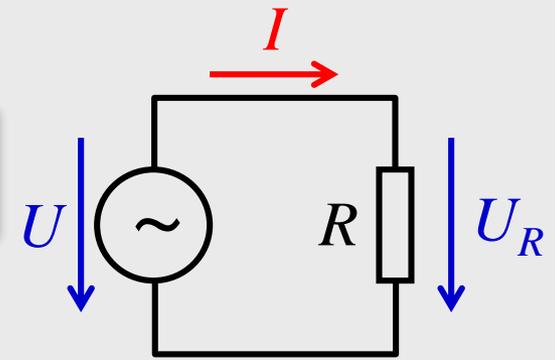
Nach Konstruktion:

- Gesetze der Quasistatik (Kirchhoffsche Regeln ...) gelten auch für die komplexen Größen
- Für Kombinationen (Serien-, Parallelschaltung etc.) von Wechselstromwiderständen gelten dieselben Regeln wie für Kombinationen ohmscher Widerstände.

Beispiel: Ohmscher Widerstand

$$U(t) = U_R(t) = RI(t) \Rightarrow Z = R$$

Z reell und unabhängig von ω

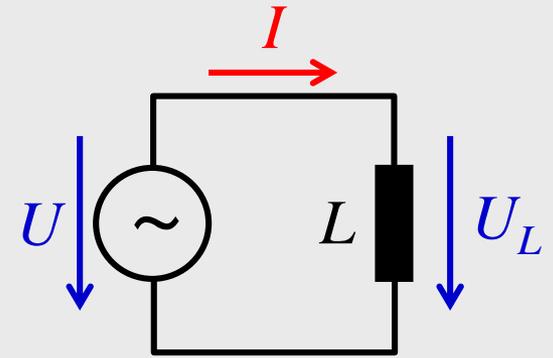


Beispiel: Induktivität

$$U_0 e^{i\omega t} = U(t) = U_L(t) = -U_{\text{ind}}(t) = LI\dot{}$$

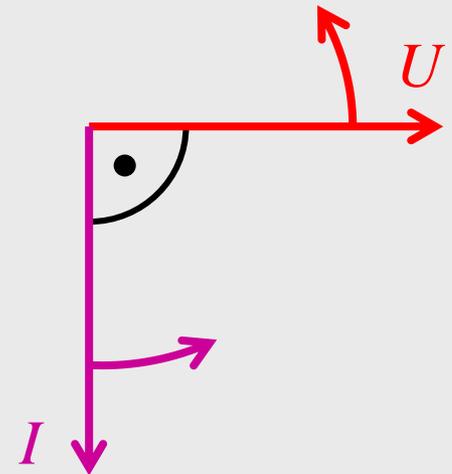
$$I(t) = \frac{U_0}{L} \int e^{i\omega t} dt = \frac{U_0}{i\omega L} e^{i\omega t} = \frac{U(t)}{i\omega L}$$

$$\Rightarrow Z = i\omega L \rightarrow \begin{cases} 0, & \omega \rightarrow 0 \\ \infty, & \omega \rightarrow \infty \end{cases}$$



Z imaginär und proportional zu ω

$\varphi = +90^\circ \Rightarrow$ Strom eilt Spannung um 90° nach

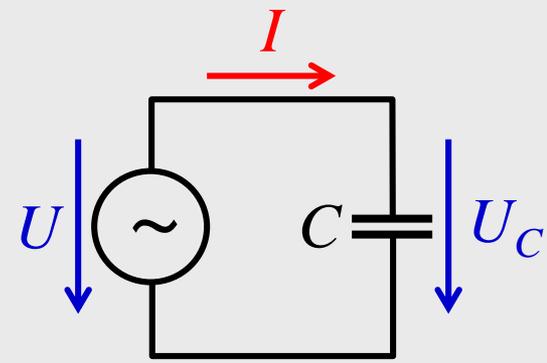


Beispiel: Kapazität

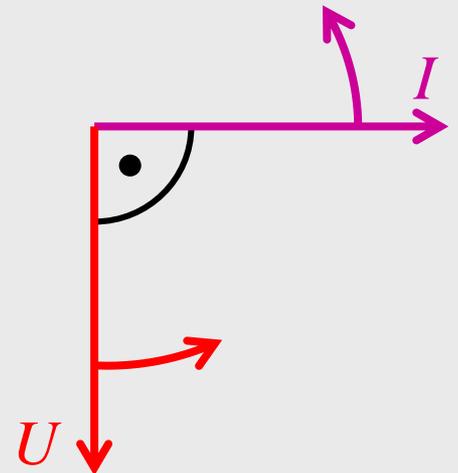
$$U_0 e^{i\omega t} = U(t) = U_C(t) = \frac{Q(t)}{C}$$

$$I(t) = \dot{Q}(t) = C \frac{dU(t)}{dt} = i\omega C U_0 e^{i\omega t} = i\omega C U(t)$$

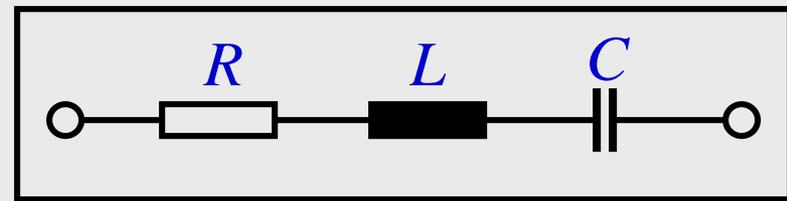
$$\Rightarrow Z = \frac{1}{i\omega C} \rightarrow \begin{cases} 0, & \omega \rightarrow \infty \\ \infty, & \omega \rightarrow 0 \end{cases}$$



Z imaginär und umgekehrt proportional zu ω
 $\varphi = -90^\circ \Rightarrow$ Spannung eilt Strom um 90° nach



Beispiel: *RLC*-Serienschaltung



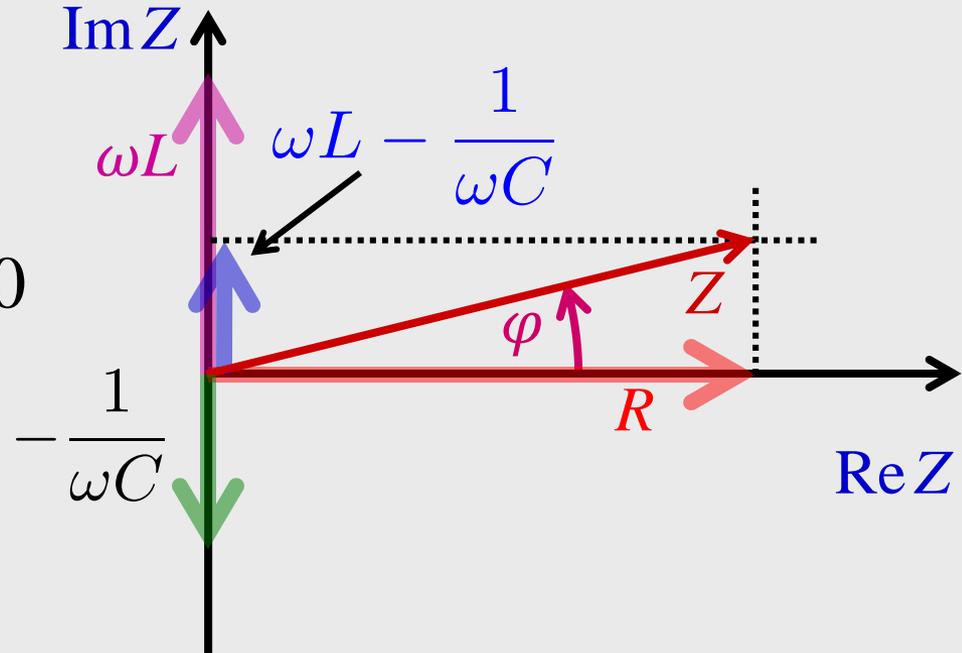
$$Z = R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C} = R + i \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$$

$$\tan \varphi = \frac{\operatorname{Im} Z}{\operatorname{Re} Z} = \frac{1}{R} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$$

Konstruktion im Zeigerdiagramm:

Dieses Beispiel: $\operatorname{Re} Z = R > 0$

$$\Rightarrow \varphi \in [-90^\circ, +90^\circ]$$



4.4.4. Wechselstromleistung

$$Z = \operatorname{Re} Z + i \operatorname{Im} Z = |Z| e^{i\varphi} = \frac{U_0}{I_0} e^{i\varphi}$$

Momentane Wechselstromleistung in Z:

$$\begin{aligned} P(t) &= \operatorname{Re} U \cdot \operatorname{Re} I = U_0 I_0 \cos(\omega t) \cos(\omega t - \varphi) \\ &= U_0 I_0 \cos \varphi \cos^2(\omega t) + U_0 I_0 \sin \varphi \cos(\omega t) \sin(\omega t) \\ &= \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos \varphi (1 + \cos(2\omega t)) + \frac{1}{2} U_0 I_0 \sin \varphi \sin(2\omega t) \end{aligned}$$

Bezeichnungen:

Scheinleistung: $P_S \equiv \frac{1}{2} U_0 I_0 = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}}$

Wirkleistung: $P_W \equiv P_S \cos \varphi$

Blindleistung: $P_B \equiv P_S \sin \varphi$

$$\text{Scheinleistung: } P_S \equiv \frac{1}{2} U_0 I_0 = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}}$$

$$\text{Wirkleistung: } P_W \equiv P_S \cos \varphi$$

$$\text{Blindleistung: } P_B \equiv P_S \sin \varphi$$

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos \varphi (1 + \cos(2\omega t)) + \frac{1}{2} U_0 I_0 \sin \varphi \sin(2\omega t) \\ &= P_W (1 + \cos(2\omega t)) + P_B \sin(2\omega t) \end{aligned}$$

Mittlere Wechselstromleistung in Z:

$$\bar{P} = P_W \left(1 + \overline{\cos(2\omega t)} \right) + P_B \overline{\sin(2\omega t)} = P_W$$

- **Wirkleistung:** In Erwärmung von Z umgesetzte Leistung.
- **Blindleistung:** Keine Wärmeerzeugung; nur periodischer Auf- und Abbau von E - und B -Feldern in Kapazitäten und Induktivitäten.

Definition: Komplexe Leistung

$$P \equiv \frac{1}{2} U I^* = \frac{1}{2} U_0 e^{i\omega t} I_0 e^{-i(\omega t - \varphi)} = \frac{1}{2} U_0 I_0 e^{i\varphi}$$

$$\Rightarrow P = P_S e^{i\varphi} = P_W + iP_B$$

Es gilt aber auch: $P = \frac{1}{2} U I^* = \frac{1}{2} I_0^2 Z = \frac{1}{2} \frac{U_0^2}{Z^*}$

Also: $P_S = \frac{1}{2} I_0^2 |Z|$, $P_W = \frac{1}{2} I_0^2 \operatorname{Re} Z$, $P_B = \frac{1}{2} I_0^2 \operatorname{Im} Z$

Scheinwiderstand: $|Z|$

Wirkwiderstand: $\operatorname{Re} Z$

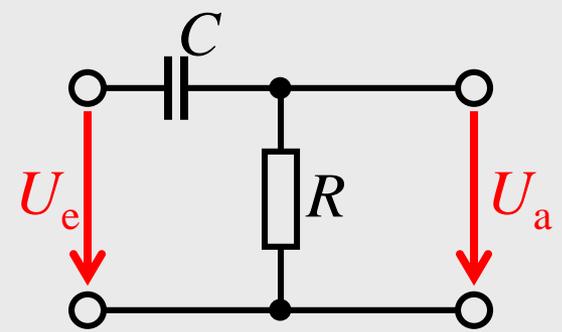
Blindwiderstand: $\operatorname{Im} Z$

4.4.5. Wichtige lineare Netzwerke

a) (Passiver) Hochpass (erster Ordnung):

Spannungsteilerschaltung \Rightarrow

$$\frac{U_a}{U_e} = \frac{R}{R + \frac{1}{i\omega C}} = \frac{i\omega\tau}{1 + i\omega\tau} \quad \text{mit } \tau = RC$$



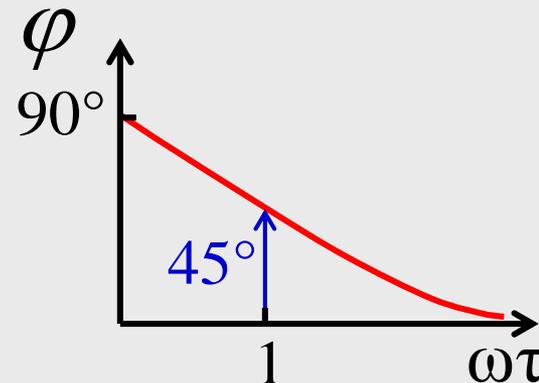
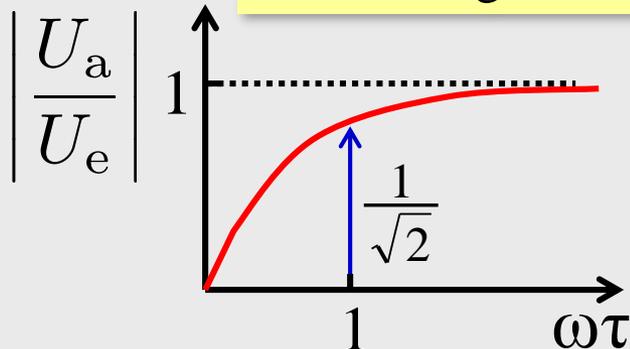
$$\left| \frac{U_a}{U_e} \right| = \frac{\omega\tau}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$$

Übertragungsfunktion

$$\tan \varphi = \frac{1}{\omega\tau}$$

Phasendrehung

durchlässig für $\omega \gtrsim \tau^{-1}$



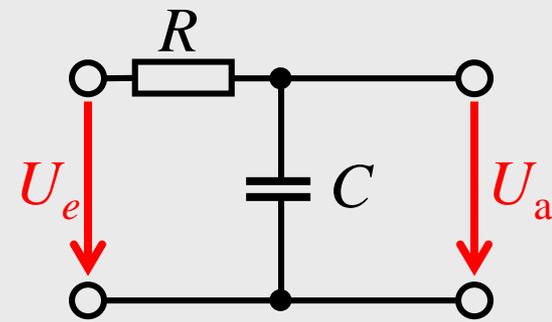
b) (Passiver) Tiefpass (erster Ordnung):

Spannungsteilerschaltung \Rightarrow

$$\frac{U_a}{U_e} = \frac{\frac{1}{i\omega C}}{R + \frac{1}{i\omega C}} = \frac{1}{1 + i\omega\tau}$$

mit

$$\tau = RC$$

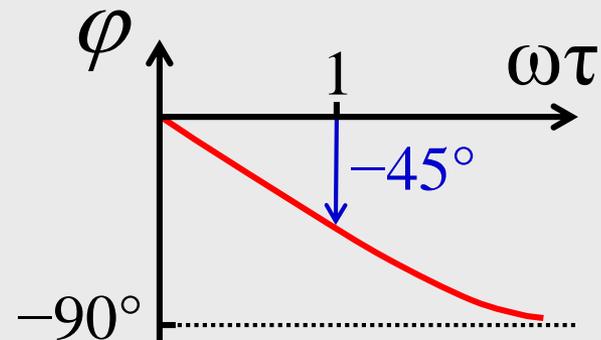
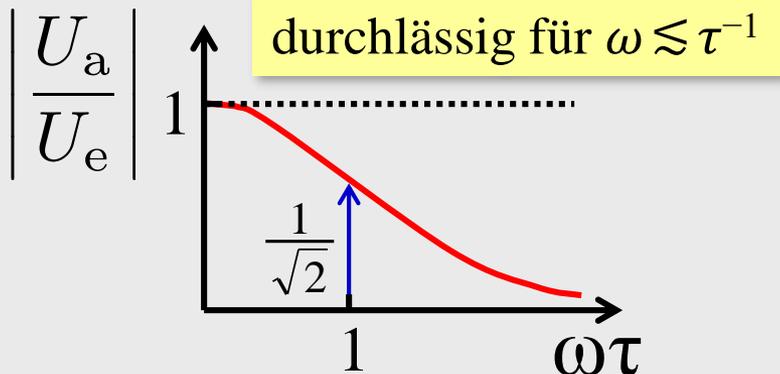


$$\left| \frac{U_a}{U_e} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$$

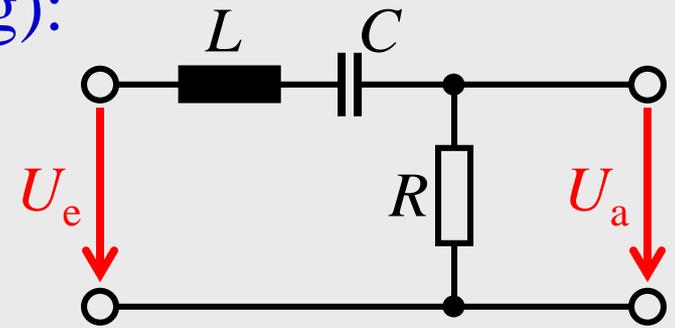
Übertragungsfunktion

$$\tan \varphi = -\omega\tau$$

Phasendrehung



c) (Passives) Bandfilter (erster Ordnung):



Spannungsteilerschaltung \Rightarrow

$$\begin{aligned}\frac{U_a}{U_e} &= \frac{R}{R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{1}{1 + i\frac{\omega L}{R}\left(1 - \frac{1}{\omega^2 LC}\right)} \\ &= \frac{1}{1 + i\frac{\omega}{\Delta\omega}\left(1 - \frac{\omega_R^2}{\omega^2}\right)}\end{aligned}$$

Resonanzfrequenz

$$\omega_R = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

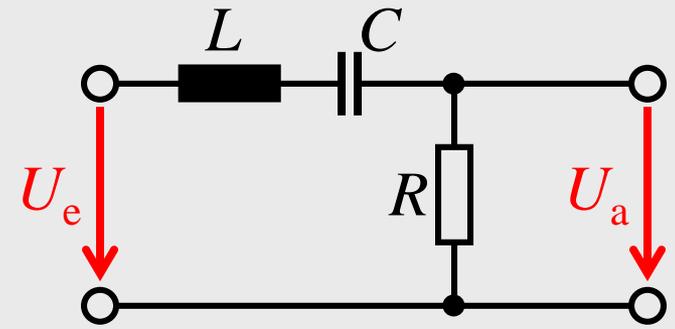
Bandbreite

$$\Delta\omega = \frac{R}{L}$$

Gütefaktor

$$Q = \frac{\omega_R}{\Delta\omega} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\frac{U_a}{U_e} = \frac{1}{1 + i \frac{\omega}{\Delta\omega} \left(1 - \frac{\omega_R^2}{\omega^2}\right)}$$

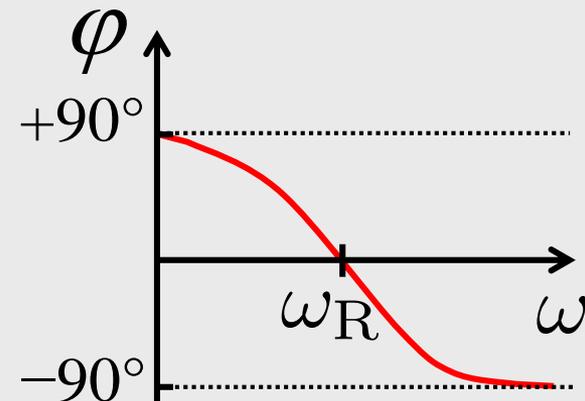
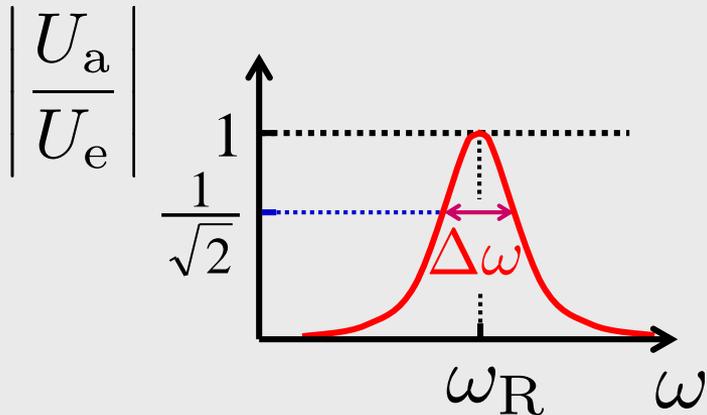


$$\left| \frac{U_a}{U_e} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{(\Delta\omega)^2} \left(1 - \frac{\omega_R^2}{\omega^2}\right)^2}}$$

$$\tan \varphi = -\frac{\omega}{\Delta\omega} \left(1 - \frac{\omega_R^2}{\omega^2}\right)$$

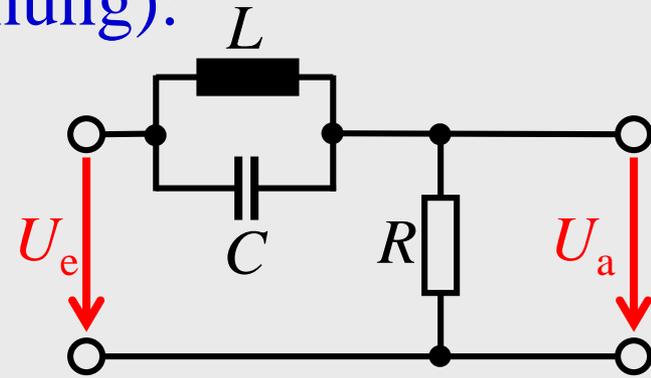
Phasendrehung

Übertragungsfunktion



durchlässig für $\omega \approx \omega_R \pm \Delta\omega/2$

d) (Passives) Bandsperrfilter (erster Ordnung):



Spannungsteilerschaltung \Rightarrow

$$\frac{U_a}{U_b} = \frac{R}{R + \frac{1}{i\omega C + \frac{1}{i\omega L}}} = \left(1 + \frac{1}{i\omega RC} \left(1 - \frac{1}{\omega^2 LC} \right)^{-1} \right)^{-1}$$
$$= \left(1 + i \frac{\Delta\omega}{\omega} \left(\frac{\omega_R^2}{\omega^2} - 1 \right)^{-1} \right)^{-1}$$

Resonanzfrequenz

$$\omega_R = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Bandbreite

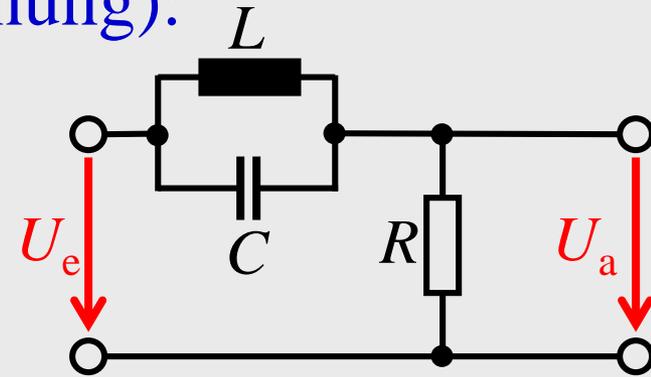
$$\Delta\omega = \frac{1}{RC}$$

Gütefaktor

$$Q = \frac{\omega_R}{\Delta\omega} = R\sqrt{\frac{C}{L}}$$

d) (Passives) Bandsperrfilter (erster Ordnung):

$$\frac{U_a}{U_b} = \left(1 + i \frac{\Delta\omega}{\omega} \left(\frac{\omega_R^2}{\omega^2} - 1 \right)^{-1} \right)^{-1}$$

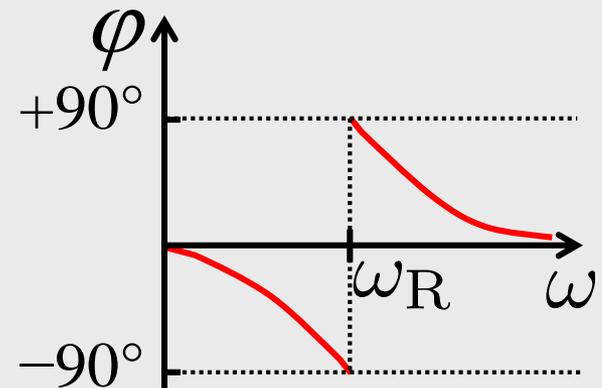
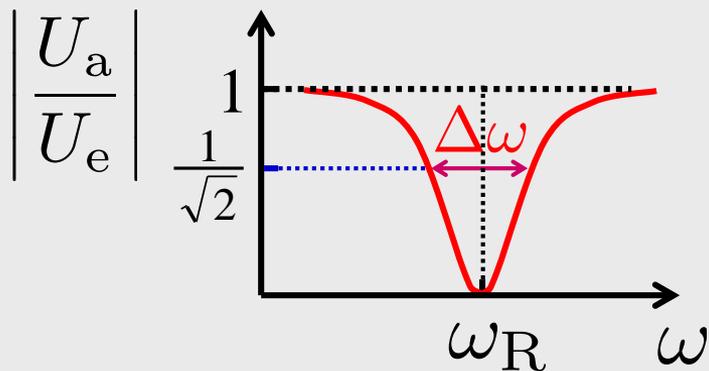


$$\left| \frac{U_a}{U_e} \right| = \left(1 + \frac{(\Delta\omega)^2}{\omega^2} \left(\frac{\omega_R^2}{\omega^2} - 1 \right)^{-2} \right)^{-1/2}$$

Übertragungsfunktion

$$\tan \varphi = -\frac{\Delta\omega}{\omega} \left(\frac{\omega_R^2}{\omega^2} - 1 \right)^{-1}$$

Phasendrehung



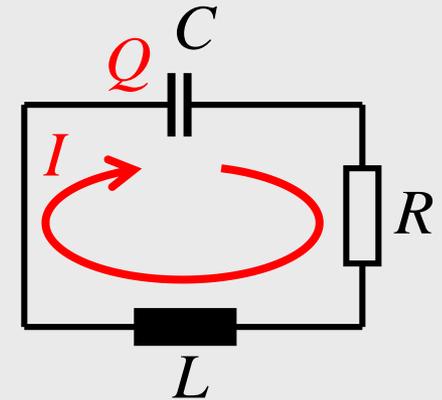
undurchlässig für $\omega \approx \omega_R \pm \Delta\omega/2$

4.4.6. Schwingkreise

a) Freie Schwingung

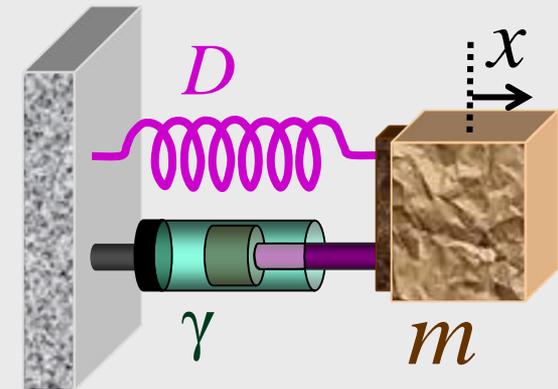
Maschenregel \Rightarrow $\frac{Q}{C} + RI + L\dot{I} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{Q}{C} + R\dot{Q} + L\ddot{Q} = 0$$



Mechanisches Analogon:

$$Dx + \gamma\dot{x} + m\ddot{x} = 0$$



Übersetzung: Mechanik \rightarrow Elektrodynamik

x	\rightarrow	Q
m	\rightarrow	L
γ	\rightarrow	R
D	\rightarrow	C^{-1}

$$Dx + \gamma \dot{x} + m\ddot{x} = 0$$

$$\frac{Q}{C} + R\dot{Q} + L\ddot{Q} = 0$$

Lösung übersetzt aus Mechanik:

Schwingfall: $R < 2\sqrt{L/C}$

$$Q \sim e^{-t/\tau} e^{i\omega t}$$

$$\tau = \frac{2L}{R}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{\tau^2}}$$

Aperiodischer Grenzfall: $R = 2\sqrt{L/C}$

$$Q \sim (t + \text{const.})e^{-t/\tau}$$

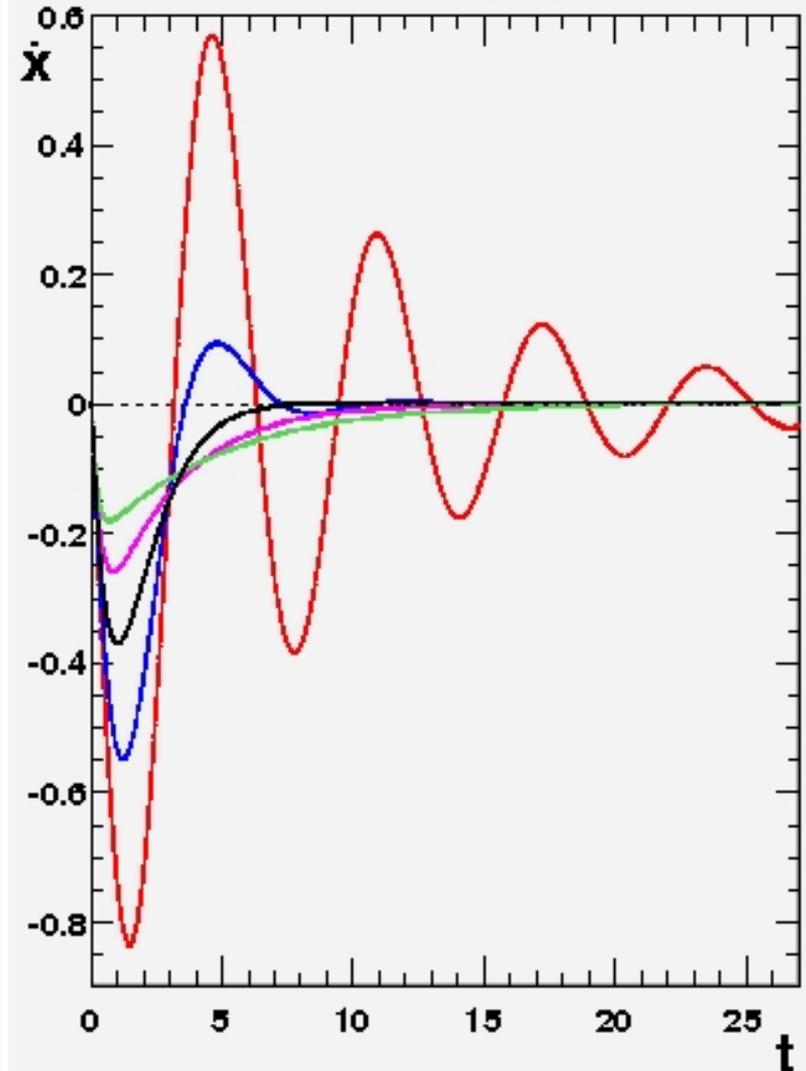
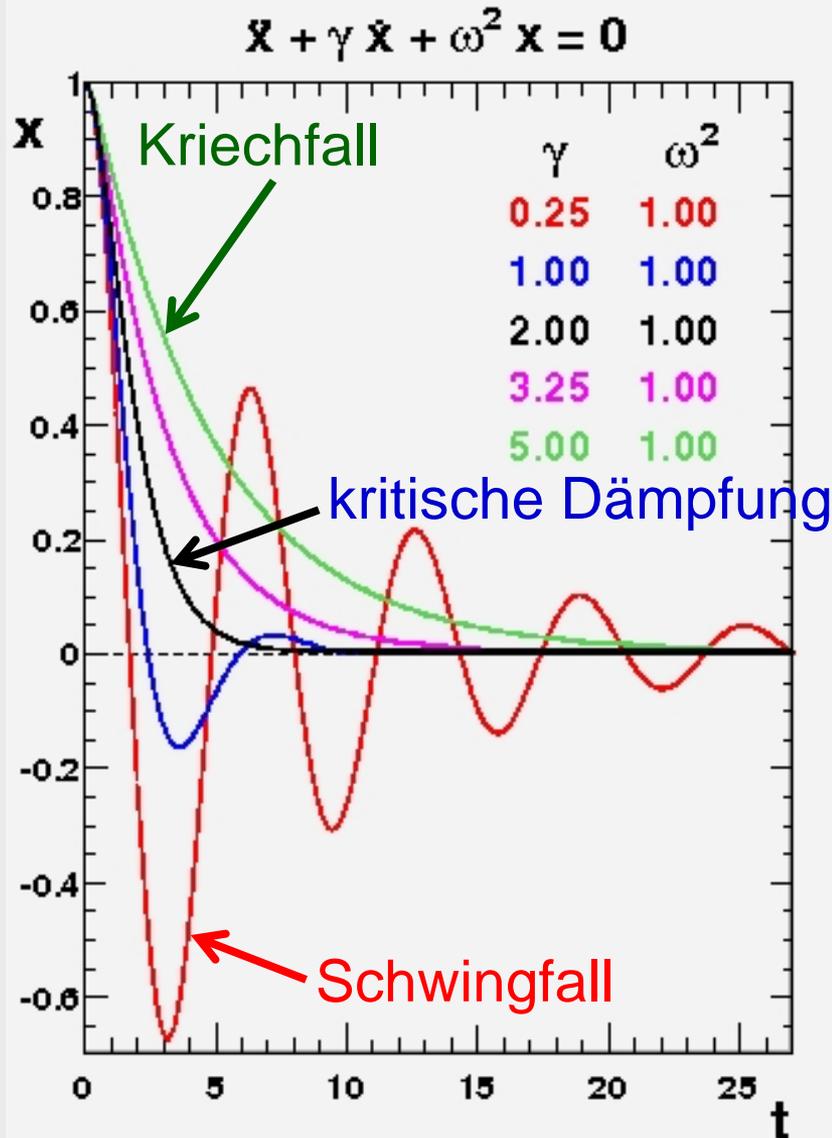
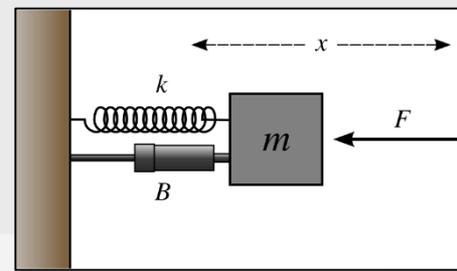
$$\tau = \sqrt{LC}$$

Kriechfall: $R > 2\sqrt{L/C}$

$$Q \sim e^{-t/\tau}$$

$$\frac{1}{\tau_{\pm}} = \frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

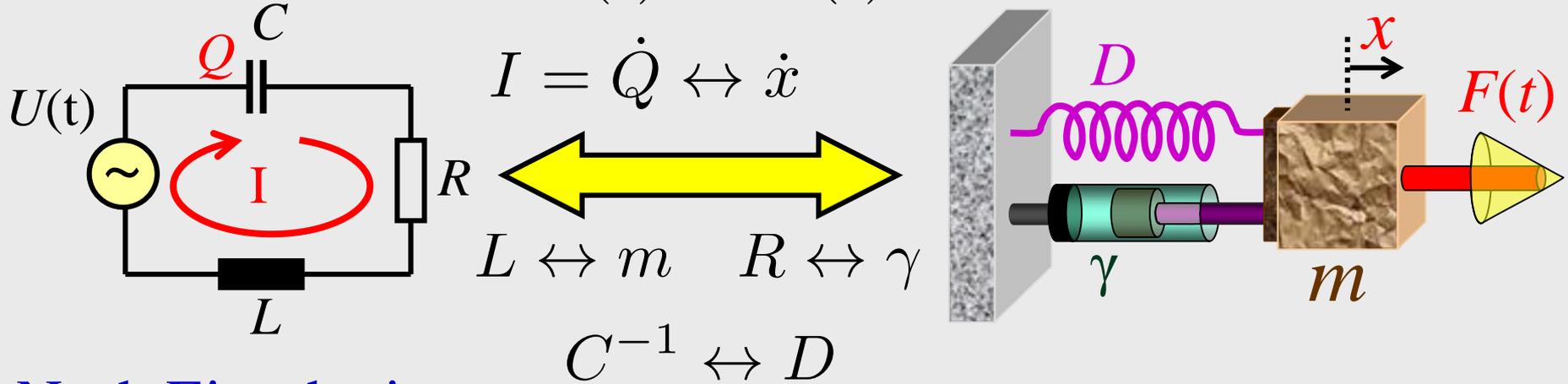
Messung am Analogrechner



b) Erzwungene Schwingung und Resonanz

(Übersetzung aus Mechanik)

Serienschwingkreis: $U(t) \leftrightarrow F(t)$



Nach Einschwingen:

Äquivalent zu Übertragungsfunktion des Bandpassfilters!

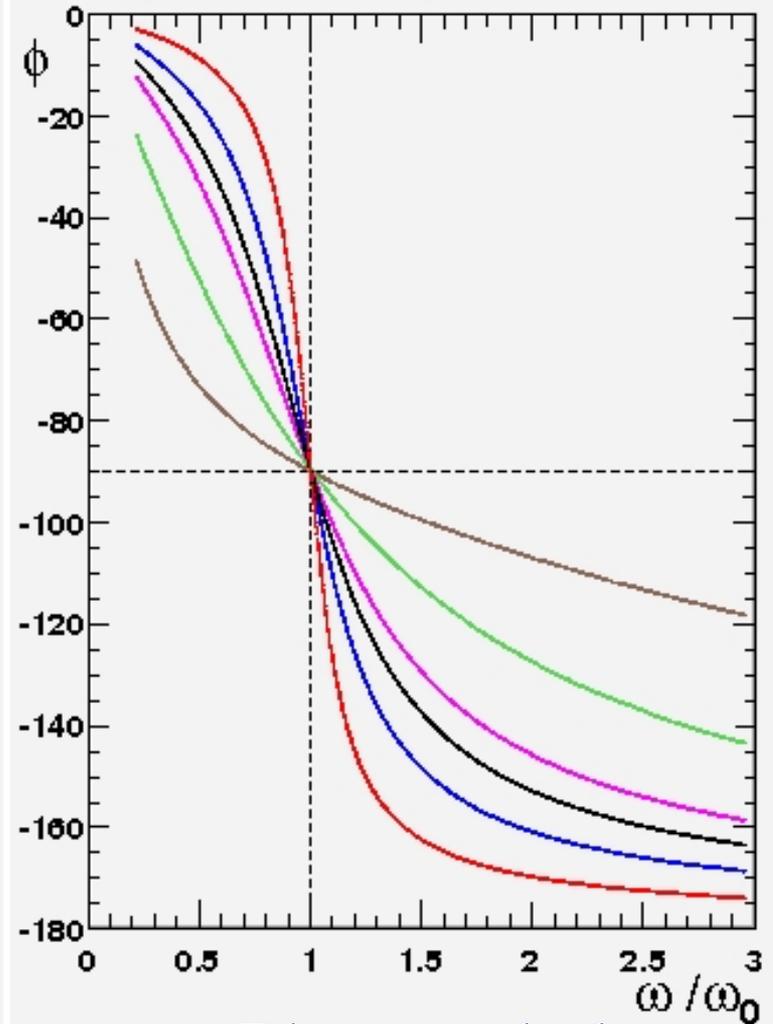
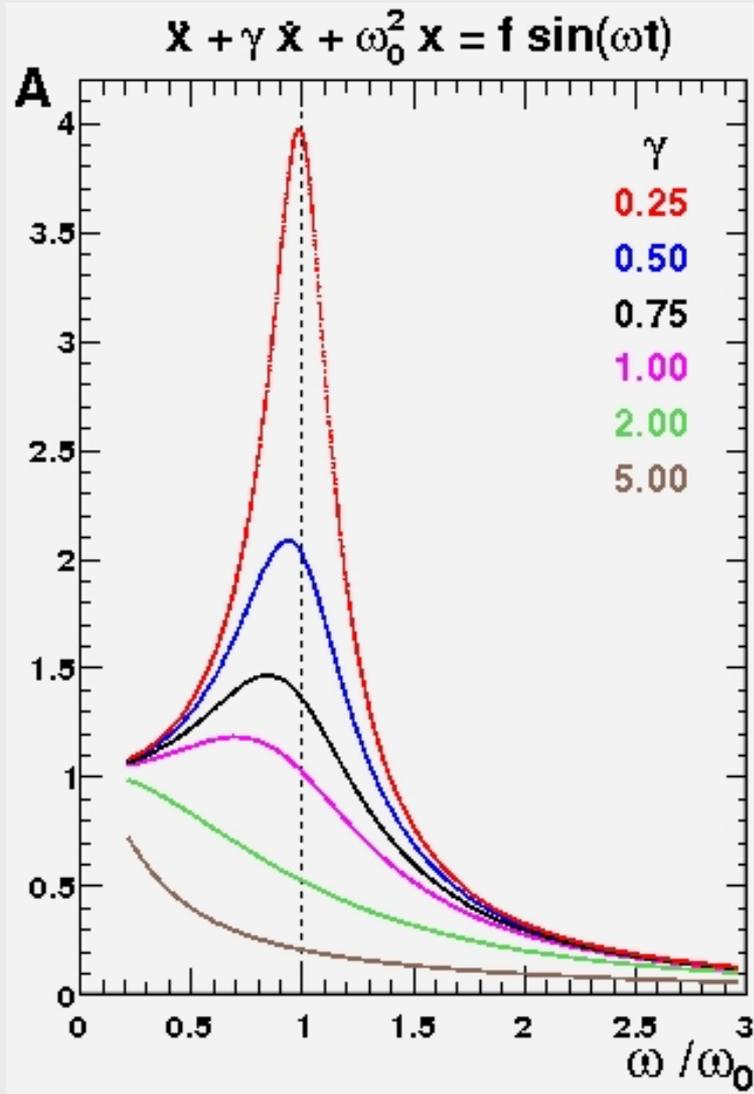
Resonanzfrequenz:
(für $I \leftrightarrow \dot{x}$)

$$\omega_R = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow |Z| = R \text{ minimal}$$

Bandbreite:

$$\Delta\omega = \frac{R}{L}$$

Messung am Analogrechner

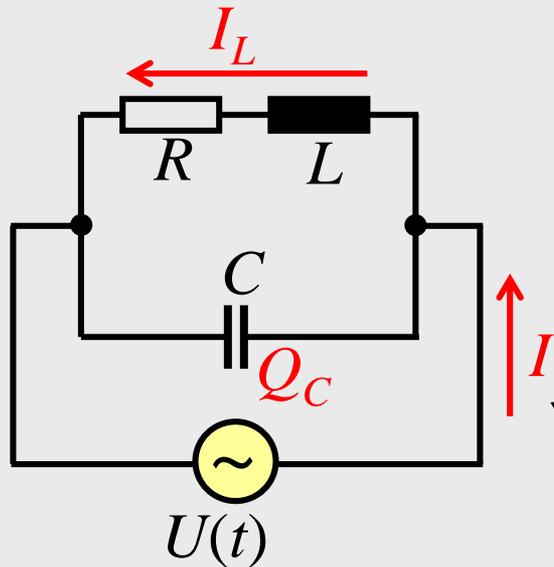


Amplitude für $x \leftrightarrow Q$

Phasenschub
Schwingung / Antrieb

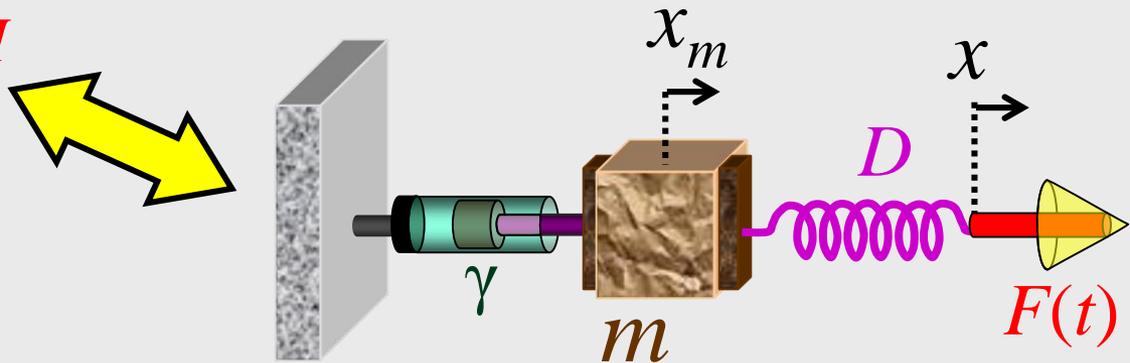
Parallelschwingkreis:

$$U(t) \leftrightarrow F(t)$$



$$I \leftrightarrow \dot{x} \quad I_L \leftrightarrow \dot{x}_m \quad Q_C \leftrightarrow x - x_m$$

$$L \leftrightarrow m \quad R \leftrightarrow \gamma \quad C^{-1} \leftrightarrow D$$



Nach Einschwingen:

Äquivalent zu Übertragungsfunktion eines Bandsperrfilters!

Kleine Dämpfung \Rightarrow

$$\text{Resonanzfrequenz: } \omega_R \approx \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow |Z| \approx \frac{L}{RC} \text{ maximal}$$

$$\text{Bandbreite: } \Delta\omega \approx \frac{R}{L}$$

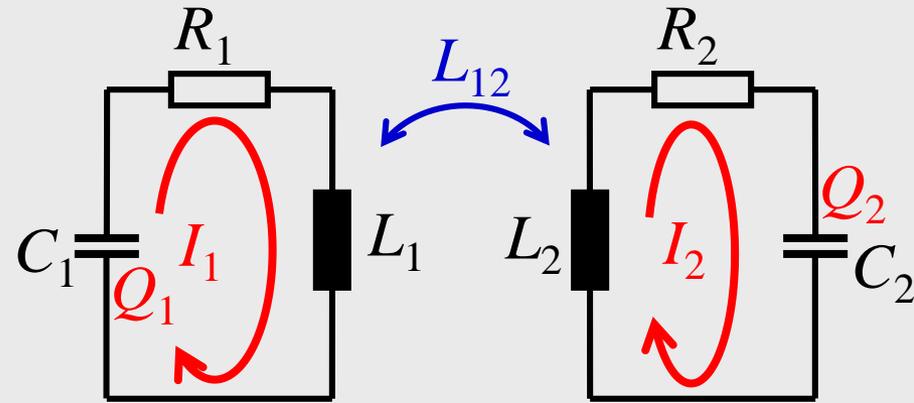
c) Gekoppelte Schwingkreise

(→ gekoppelte mechanische Schwinger)

Induktive Kopplung:

$$L_1 \ddot{Q}_1 + R_1 \dot{Q}_1 + \frac{1}{C_1} Q_1 = -L_{12} \ddot{Q}_2$$

$$L_2 \ddot{Q}_2 + R_2 \dot{Q}_2 + \frac{1}{C_2} Q_2 = -L_{12} \ddot{Q}_1$$



Lösungsweg: **Transformation auf Normalkoordinaten**

Beispiel: $L_1 = L_2 = L$ $C_1 = C_2 = C$ $R_1 = R_2 = R$

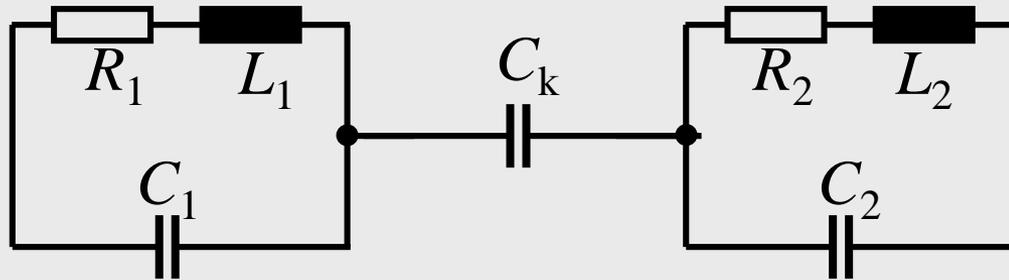
Normalkoord.: $Q_{\pm} = Q_1 \pm Q_2$, $(L \pm L_{12}) \ddot{Q}_{\pm} + R \dot{Q}_{\pm} + \frac{1}{C} Q_{\pm} = 0$

Eigenfrequenzen: $\omega_{\pm} = \sqrt{\frac{1}{(L \pm L_{12})C} - \frac{1}{4} \alpha_{\pm}^2}$, $\alpha_{\pm} = \frac{R}{L \pm L_{12}}$

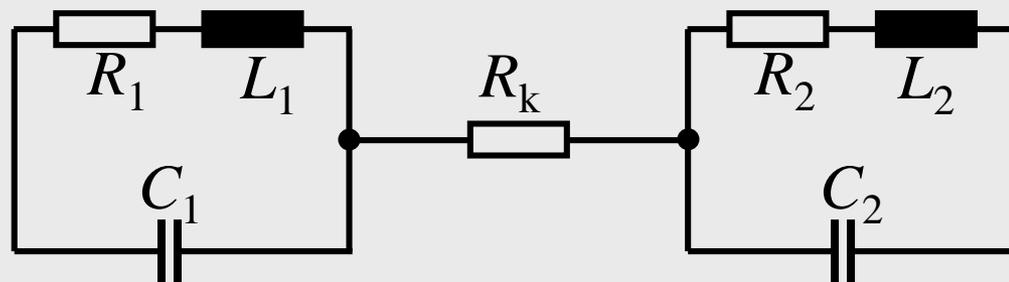
Normalmoden (Schwingfall): $Q_{\pm} \sim e^{-\frac{1}{2} \alpha_{\pm} t} e^{i \omega_{\pm} t}$

Analoges Verfahren →

Kapazitive Kopplung:

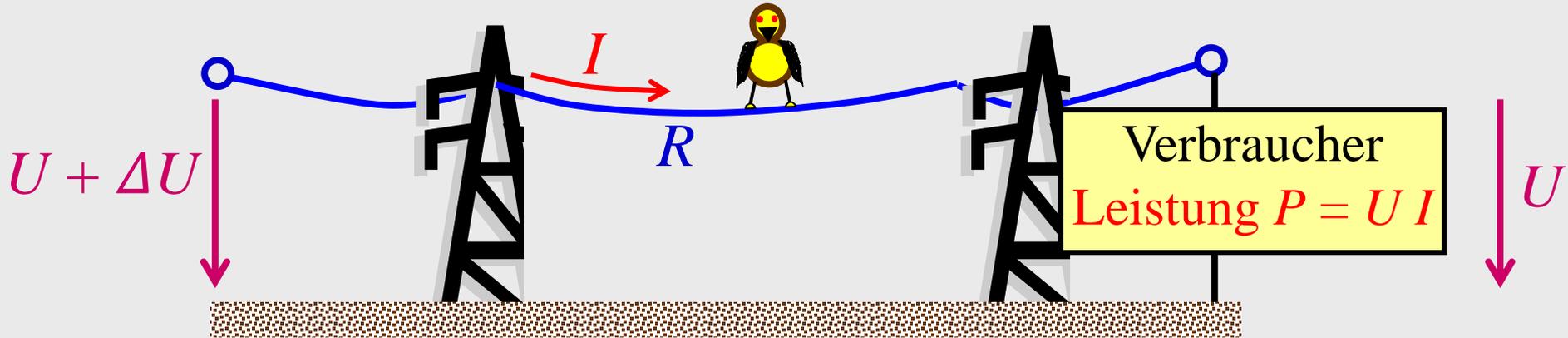


Galvanische Kopplung:



4.4.7. Der Transformator

Motivation:

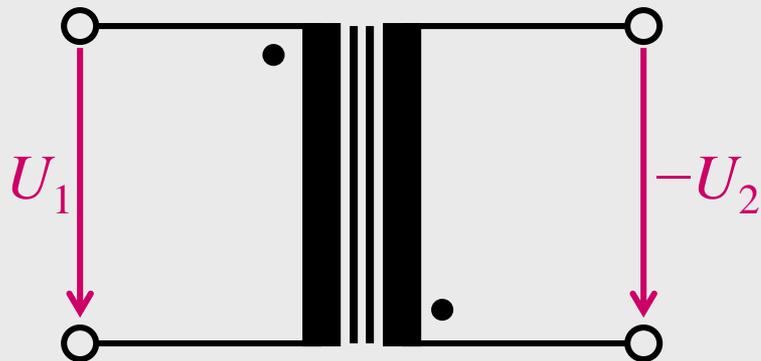
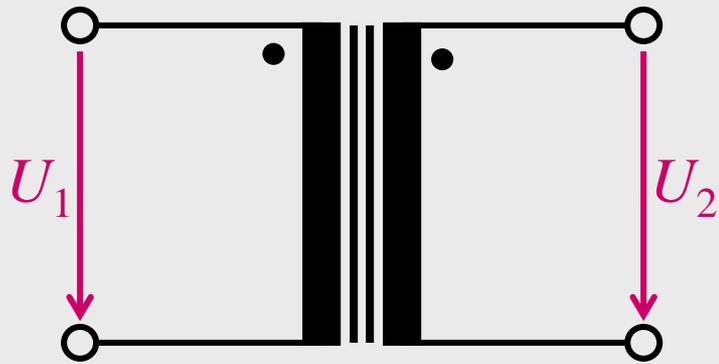


Relativer Leistungsverlust in der Leitung:

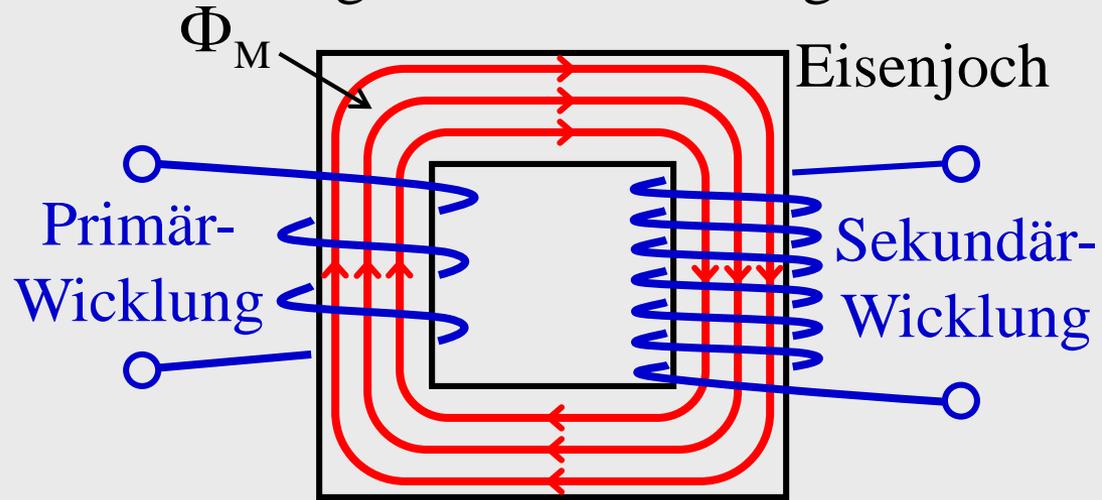
$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{I^2 R}{IU} = \frac{IR}{U} = \frac{UIR}{U^2} = P \frac{R}{U^2} \propto \frac{1}{U^2}$$

- **Umwandlung** der Eingangsspannung auf **Hochspannung**
- Übertragung über Hochspannungsleitung
- **Umwandlung** der Ausgangsspg. auf Verbraucherspannung (z.B. 230 V)

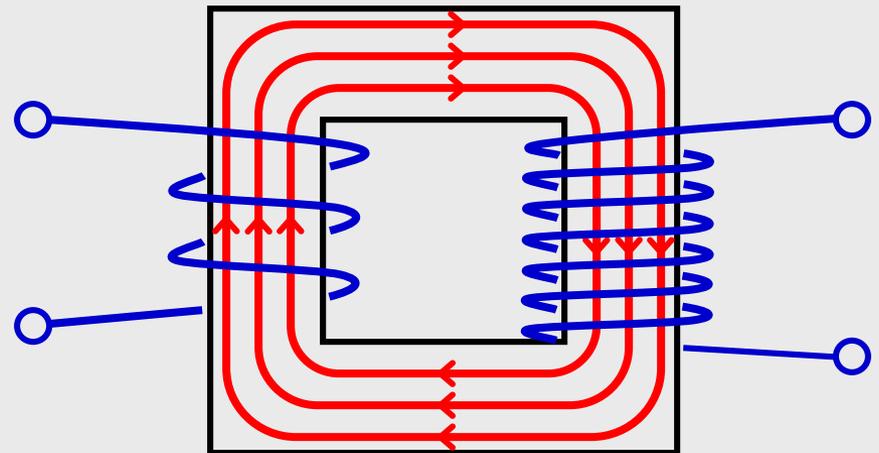
Schaltbild



mögliche Realisierung



Gleicher Wicklungssinn von Primär- und Sekundärwicklung bezüglich Richtung des magnetischen Flusses



Entgegengesetzter Wicklungssinn von Primär- und Sekundärwicklung bezüglich Richtung des magnetischen Flusses

Definition: Kopplungsstärke

$$k = \frac{L_{12}}{\sqrt{L_1 L_2}} \in [0, 1]$$

Bemerkung: Idealer Transformator

⇔ keine Streufeld- etc. Verluste

⇔ gesamter magnetischer Fluss durchsetzt beide Spulen

⇔ $k = 1$

Induktionsgesetz $U_{\text{ind}}^{(1)} = -L_1 \dot{I}_1 - L_{12} \dot{I}_2$ $U_{\text{ind}}^{(2)} = -L_2 \dot{I}_2 - L_{12} \dot{I}_1$

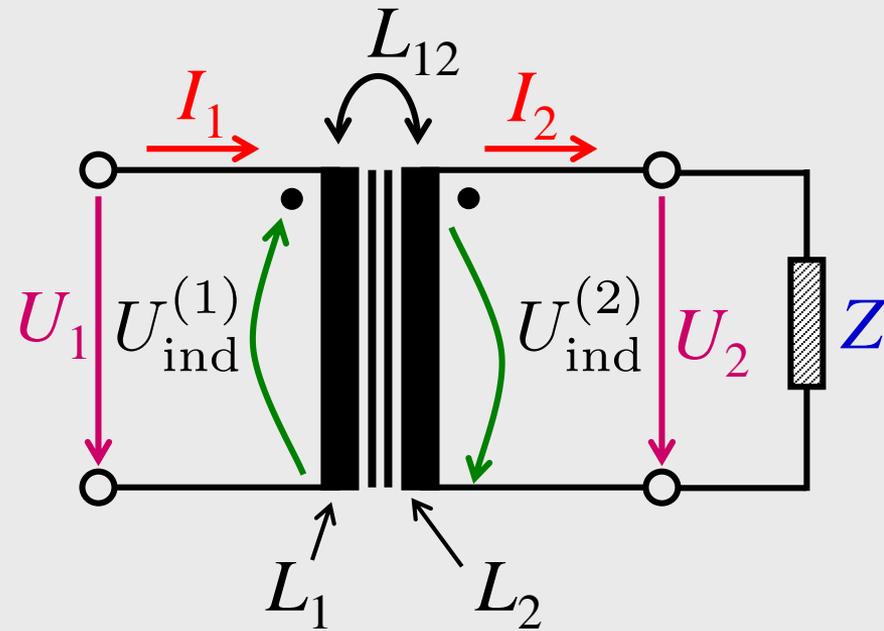
Maschenregel $U_1 = -U_{\text{ind}}^{(1)}$ $U_2 = U_{\text{ind}}^{(2)} = Z I_2$

Wechselstrom $\dot{I}_1 = i\omega I_1$ $\dot{I}_2 = i\omega I_2$

Tafelrechnung

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{-k \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}}{1 + i\omega(1 - k^2) \frac{L_2}{Z}}$$

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{-k \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}}{1 + \frac{Z}{i\omega L_2}}$$



Tafelrechnung zum Transformator (1)

Induktionsgesetz $U_{\text{ind}}^{(1)} = -L_1 \dot{I}_1 - L_{12} \dot{I}_2$ $U_{\text{ind}}^{(2)} = -L_2 \dot{I}_2 - L_{12} \dot{I}_1$

Maschenregel $U_1 = -U_{\text{ind}}^{(1)}$ $U_2 = U_{\text{ind}}^{(2)} = Z I_2$

Wechselstrom $\dot{I}_1 = i\omega I_1$ $\dot{I}_2 = i\omega I_2$

$$Z I_2 = U_{\text{ind}}^{(2)} = -L_2 \dot{I}_2 - L_{12} \dot{I}_1 = -i\omega L_2 I_2 - i\omega L_{12} I_1$$

$$-i\omega L_{12} I_1 = (Z + i\omega L_2) I_2$$

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{-i\omega L_{12}}{Z + i\omega L_2} = \frac{-\frac{L_{12}}{L_2}}{1 + \frac{Z}{i\omega L_2}} = \frac{-k \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}}{1 + \frac{Z}{i\omega L_2}}$$

Tafelrechnung zum Transformator (2)

Induktionsgesetz $U_{\text{ind}}^{(1)} = -L_1 \dot{I}_1 - L_{12} \dot{I}_2$ $U_{\text{ind}}^{(2)} = -L_2 \dot{I}_2 - L_{12} \dot{I}_1$

Maschenregel $U_1 = -U_{\text{ind}}^{(1)}$ $U_2 = U_{\text{ind}}^{(2)} = Z I_2$

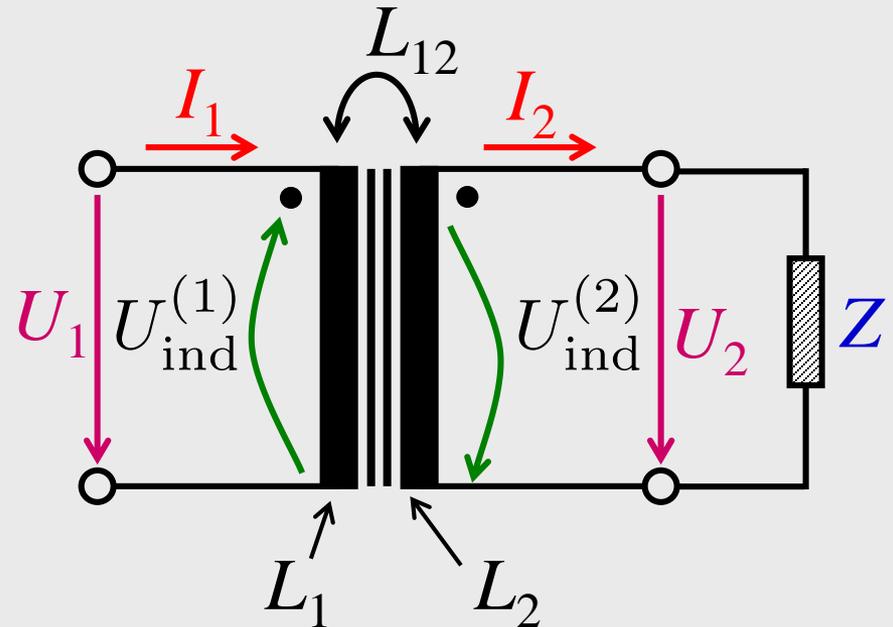
Wechselstrom $\dot{I}_1 = i\omega I_1$ $\dot{I}_2 = i\omega I_2$

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{-k \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}}{1 + \frac{Z}{i\omega L_2}}$$

$$\begin{aligned} U_1 &= L_1 \dot{I}_1 + L_{12} \dot{I}_2 = i\omega L_1 I_1 + i\omega L_{12} I_2 = i\omega I_2 \left(L_1 \frac{I_1}{I_2} + L_{12} \right) \\ &= \frac{i\omega}{Z} \left(L_1 \frac{1 + \frac{Z}{i\omega L_2}}{-k \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}} + k \sqrt{L_1 L_2} \right) U_2 = \frac{i\omega}{Z} \frac{L_1 + \frac{Z}{i\omega} \frac{L_1}{L_2} - k^2 L_1}{-k \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}} U_2 \\ &= \frac{\frac{L_1}{L_2} + i\omega(1 - k^2) \frac{L_1}{Z}}{-k \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}} U_2 = \frac{1 + i\omega(1 - k^2) \frac{L_2}{Z}}{-k \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}} U_2 \end{aligned}$$

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{-k \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}}{1 + i\omega(1 - k^2) \frac{L_2}{Z}}$$

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{-k \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}}{1 + \frac{Z}{i\omega L_2}}$$



Idealer Transformator

$$k = 1$$

Spulen gleichen Volumens
Windungszahlen N_1, N_2

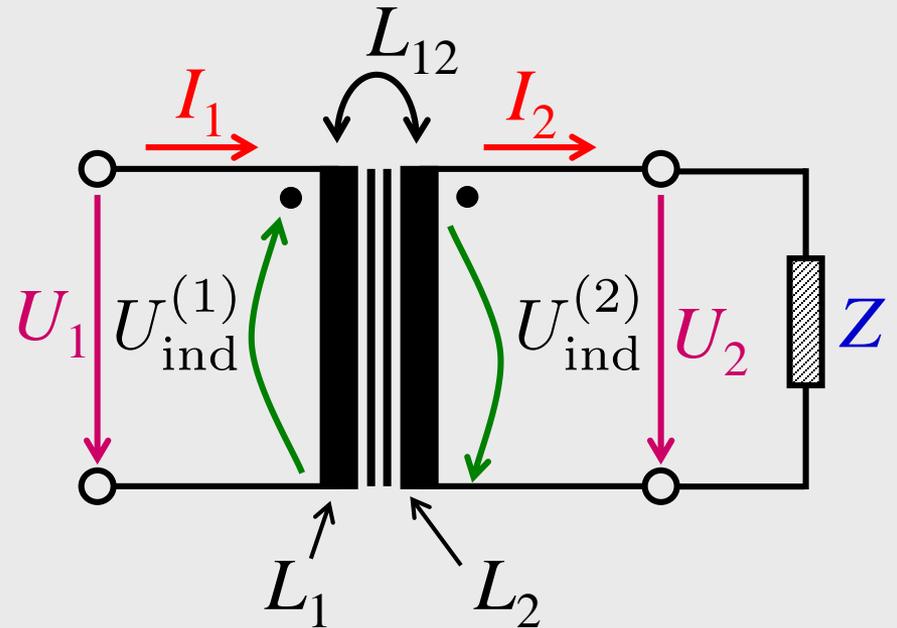
$$L_{1,2} = \mu\mu_0 V N_{1,2}^2 \Rightarrow \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = \frac{N_2}{N_1}$$

$$\frac{U_2}{U_1} = -\frac{N_2}{N_1}$$

$$\frac{I_2}{I_1} = -\frac{1}{1 + \frac{Z}{i\omega L_2}} \frac{N_1}{N_2}$$

$$\frac{U_2}{U_1} = -\frac{N_2}{N_1}$$

$$\frac{I_2}{I_1} = -\frac{1}{1 + \frac{Z}{i\omega L_2}} \frac{N_1}{N_2}$$



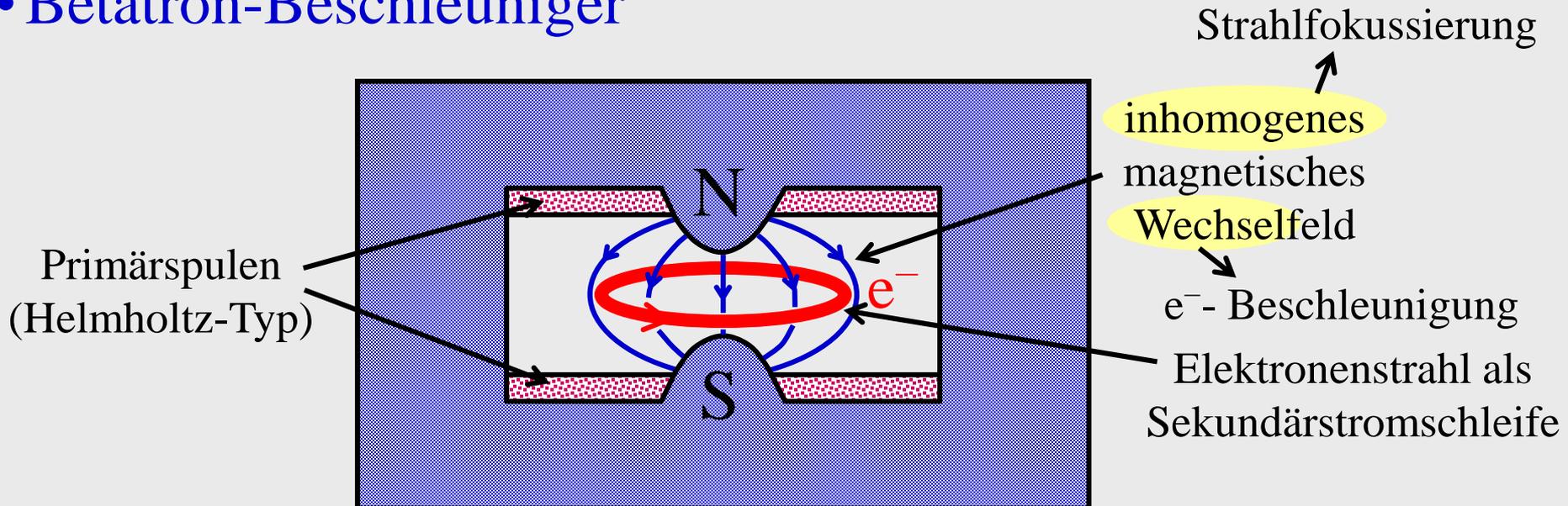
$$|Z| \gg \omega L_2 \Rightarrow I_2 \rightarrow 0$$

$$|Z| \ll \omega L_2 \Rightarrow \frac{I_2}{I_1} \approx -\frac{N_1}{N_2}$$

Anwendungen:

- Transformation auf Hochspannung
- Hochstromanwendung: $N_1 \gg 1$, $N_2 = 1$
 $\Rightarrow I_2 \gg I_1 \Rightarrow P = RI_2^2$ groß
→ Aluminium-Schmelzen → Edelstahl-Gewinnung
- Punktschweißen
- Aufheizen von Werkstücken durch Wirbelströme
- Betatron-Beschleuniger

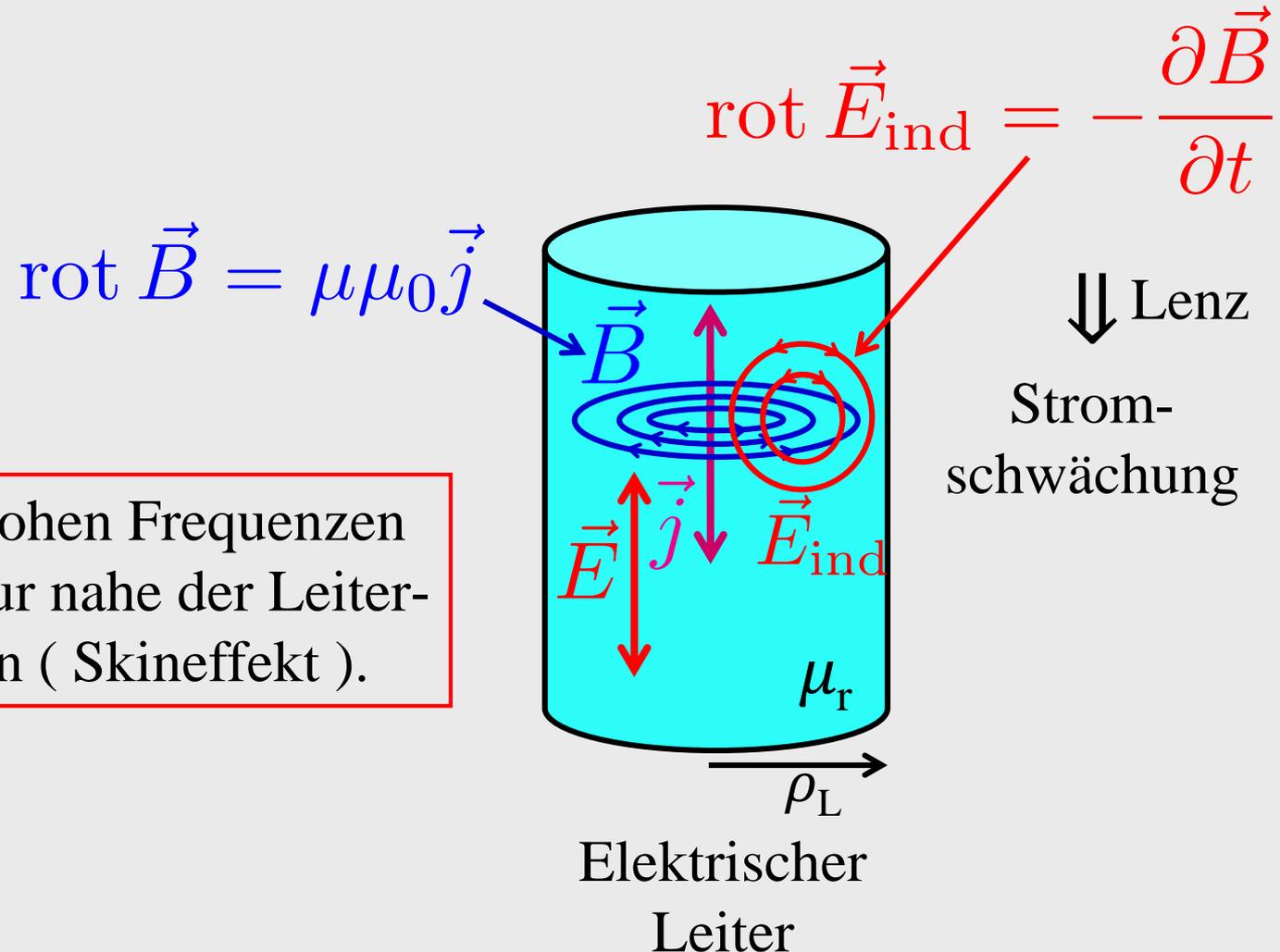
z.B. Rinne mit
Metallschmelze



4.4.8. Hochfrequenzleitung: Der Skineneffekt

Elektrischer Leiter \rightarrow ohmscher Widerstand und Induktivität: $Z = R + i\omega L$

\Rightarrow induktive Effekte dominieren für $\omega > R/L$ (typisch $\nu \gtrsim O(\text{MHz})$)

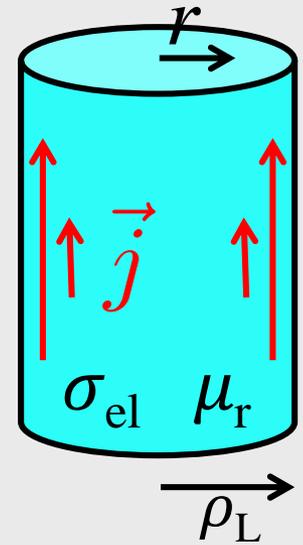
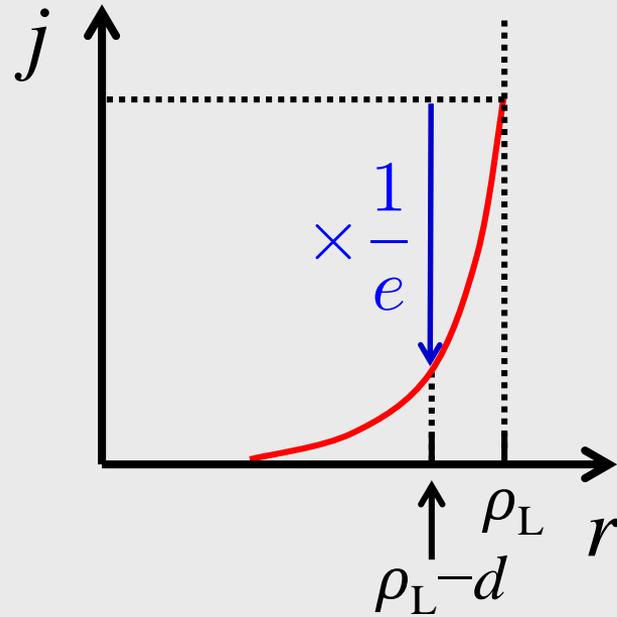


Folgerung: Bei hohen Frequenzen können Ströme nur nahe der Leiter-Oberfläche fließen (Skineneffekt).

Quantitative Untersuchung (\rightarrow Theorie) \Rightarrow **Eindringtiefe** des Stroms

$$d = \sqrt{\frac{2}{\mu\mu_0\sigma_{el}\omega}}$$

$$j \propto e^{-\frac{r-\rho_L}{d}}$$

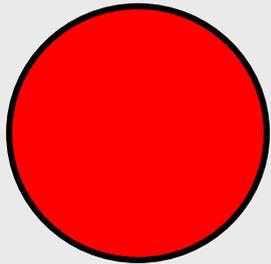


Beispiel: Kupferleiter

ν [Hz]	d [mm]
50	94
10^3	2
10^6	0,07

$$d = \sqrt{\frac{2}{\mu\mu_0\sigma_{el}\omega}}$$

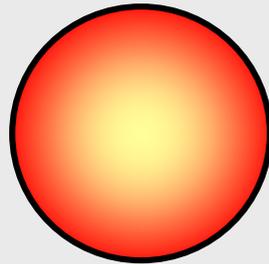
$\omega \rightarrow 0$



$$R \propto \frac{1}{\pi\rho_L^2}$$

$\propto 1/\text{Volumen}$

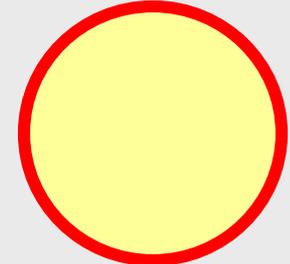
Übergangsbereich



$$R \propto \frac{1}{2\pi\rho_L d} \propto \sqrt{\omega}$$

\propto (effektives)
durchströmtes
Volumen

$\omega \rightarrow \infty$



$$R \propto \frac{1}{2\pi\rho_L}$$

$\propto 1/\text{Oberfläche}$

- HF-Spannungen sind relativ ungefährlich
- Eisendrähte (großes μ) sind schlechte HF-Leiter
- Gute HF-Leitung bei großer Oberfläche (\rightarrow Hohlrohre, Litzen, ...)